[新版]超函数入門

金子 晃——[著]

東京大学出版会

Introduction to Hyperfunctions
Akira KANEKO
University of Tokyo Press, 1996
ISBN4-13-061300-6

まえがき

本書は，佐藤の超函数（hyperfunction）のやさしい解説を目指したものである．一般に超函数の理論とは，微積分の演算が自由に行えるよう，函数の概念を拡張する方法をいい，これには種々の流儀がある．本書で扱われるのは佐藤幹夫先生により創始された理論で，日本人による独創的な数学業績の一つである．この理論は，一変数の場合には大変直観的で当初から評判が良かったのだが，多変数の場合，その表現に時代に先駆けた高度な抽象代数学を用いていたため，当初は肝心の解析を扱う人たちに難解という印象を与えて敬遠されがちであった．本書の前身はこのような空白を埋め，佐藤超函数論の一般的普及に微力を捧げようとの目的で 1980 年頃 UP 応用数学選書の一部として刊行されたものである．その後，佐藤超函数論の解説書は良書がいろいろ現れたが，手頃な入門書としての本書の価値はまだ保たれているものと信ずる．

次に本書の概要を述べる．第 1 章は一変数超函数の解説である．一変数の場合は直観的に分かり易く，かつ初等的に書かれた文献も多いので，ここではむしろ多変数とのつながりに焦点をあてて理論的トレーニングを目指した．第 2 章は多変数の超函数を記述するのに最小限必要な多変数の複素函数論の知識がまとめられている．第 3–4 章では多変数の超函数の概念把握や諸演算の扱い方などを超函数の具体的表現を用いてやや冗長なまでに初等的かつていねいに述べた．これによって応用方面への超函数論の普及を目指したつもりである．初等的ということは必ずしも読みやすいことを意味しないかもしれないが，少なくとも代数学の大道具に戸惑いを感じて遠ざかっていた人々には，超函数を身近なものとするのに役立っているであろう．第 5–7 章ではできるだけ少ない予備知識で手短に基礎理論を展開し，諸定理の証明を与え，全体として理論的にも完結したものとなるようにした．最後の第 8 章は Fourier 変換の解説である．これは使い方と理論とを一つの章にまとめるため最後においたが，使い方だけを知りたい読者は第 4 章からここに飛んでもほとんどの部分は読めるようになっている．

本書のための予備知識としては微積分と一変数函数論の標準的知識，それに

集合・位相・代数の常識的概念を仮定している．L. Schwartz の超函数（distribution）の理論は，これを既習の読者に対し比較の便を供するために適宜言及したが，本書の理論的構成のうえでも，また実際本書を理解するうえでも予備知識として必要ではない．故に本書は用い方によっては大学初年級から大学院までの広い範囲で教科書や自習書となり得るであろう．実際にも著者は駆け出しの頃，一変数函数論を予備知識として補いつつ本書前半の大部分に相当する内容を教養課程の学生に『全学ゼミナール』と呼ばれる自由選択科目として一年間にわたり講義したことがあり，懐かしい（一部は汗顔の）思い出となっている．そのとき出席してくれた学生諸君は主に工学部や理論物理等へ進学したが，中には数学者として活躍しておられる方々も居る．また本書後半の理論的構成の骨格は 1977–78 年の Grenoble 大学における大学院（DEA）の講義と，それに続く東京大学における 4 年・大学院共通講義に従ってまとめたものである．

本書では理論的にも種々の試みが企てられた．その主なものは，超函数に対する積分論の厳密な展開，Schwartz の超函数論や線型偏微分方程式の一般論への理論的依存の排除，そして δ 函数の曲面 Radon 分解の組織的使用である．特に，最後のものにより，元来，導来圏の理論を用いて記述されていたミクロ函数と特異スペクトルの理論はすっかり初等的になった．抽象代数に馴染まれた方には冗長と思われるかもしれないが，解析あるいは応用方面の方には本書のような書き方が迎えられるものと期待している．

以下，本書の読み方について具体的な注意を述べておこう．本書は超函数の使い方に比重をおいて書かれてはいるが，一応論理的にも筋が通るよう配慮されているため，第 4 章までの直観的記述も下記の諸定理を公理のように仮定し，それ以外は厳密な推論で構成されている（括弧内に示されているのはそれらの証明が与えられる第 5 章以降の箇所である）．以上のような構成のため，超函数の応用を意図して軽い気持で本書を通読されるつもりの読者には第 4 章までの記述にも煩わしい箇所があるであろう．その場合は初読の際に目次で＊印の付いた章や節を飛ばされるとよい．そして，もしも幸いに超函数論というものに興味を持たれたならば，後でそれらの箇所，及び引き続いて第 5 章以下の対応部分をじっくりと併せ読まれることにより，逆にその基礎理論を支えている

現代数学の一端に，超函数という具体例を介して触れ得るものと期待している．

定理 3.1.2 $\mathscr{B}$ が層をなすこと（定理 7.1.7），$\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ が単射なこと（定理 7.2.5），$\mathscr{B}$ が脆弱なこと（命題 7.3.1）

定理 4.3.2 $\mathscr{B}\mathscr{O}\to\mathscr{B}$ が単射なこと（補題 7.4.3 の後）

補題 4.3.3 $\dfrac{\partial}{\partial z_1}F(z)=G(z)$ の大域的可解性（第 6 章 § 3 末尾）

定理 4.3.5 $\mathscr{B}\mathscr{O}$ の $\mathscr{B}$ に関する脆弱性（定理 7.4.4）

定理 4.6.1 $\mathscr{B}/\mathscr{A}(\Omega)$ $\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)$（第 7 章 § 2 末尾）

読者はこれらの結果を証明するのにどのような数学が必要となるのかをじっくりと味わわれたい．それは，一言で言えばコホモロジーという概念と結びついたものである．ちなみに第 4 章までは（第 1 章の入門的記述を除き）コホモロジーの用語は一切用いられていない．複素解析にあまり馴染の無い読者にも予備知識の段階で敬遠されることが無いよう，第 5 章以降では，これらの証明のために必要とされる正則函数の層係数コホモロジー理論の必要最小限もすべて証明付きで自前で準備してある．通常，この種の内容は数学科の課程でもかなり後期にならないと聴くことができないものであるが，このような初歩からの自足的な入門書が一つはあってもよいと思ったからである．このため記述の量を減らす必要から，これら種々の基本定理に対しても本書ではいくつかの新しい証明法が工夫されている．ただし，引き続いて佐藤超函数論を純粋数学として専門的に学んでゆこうと云う読者は，時間はかかっても，ここで省略された多重劣調和函数などの概念を用いた伝統的な議論も是非併せて身につけてゆくべきである．

本文中に小活字で挿入した参考は，予備知識の補足あるいはより高度な知識への案内から無駄口に近いものまで，雑多なものを含んでいる．気楽に利用されたい．また各章の末尾には，付記として一通りの参考書と文献案内を与えた．

この度の再刊に当たっては，UP 応用数学選書から切り放し，従来，上下二巻に分かれていたものをまとめて一巻とし，読者の手元に届き易くした（本書の第 4 章までが旧上巻，第 5 章以降が旧下巻に相当する）．実はこれ以前，1988 年に本書の英訳がやはり一巻本として Kluwer から出版されており，そのとき本文の訂正のみならず，主に線型偏微分方程式論への応用に関することを中心とした補充が行われた．これはもともと下巻の最後の章に予定していた

ものを紙数の都合で省略せざるを得なくなったため，必要最小限の事項を随所に挿入したものであった．このときの改訂内容は，上巻の部分については1989年の増刷の折に注の形で取り込むことができたのだが，下巻部分については今回漸く同様の形で取り込むことを得た．これは著者の望外の喜びであった．

再刊の機会に，今まで本書に関してお世話になってきた方々，とりわけ著者に佐藤超函数論の手ほどきをして下さった小松彦三郎先生，Grenoble大学で最初の講義の機会を与えて下さったMalgrange, Koszul, Boutet de Monvelの各先生，本書初版の出版機会を与えられ，かつ原稿に対して種々の有益な助言を下さった杉浦光夫・藤田宏両先生を始めとするUP応用数学選書編集委員の方々，自ら英語版の出版の機会を作られかつ著者の度重なる原稿の手直しをその都度快く明快な英語に移して下さった山本裕博士，セミナーのテキストとして学生とともに本書を精読され多くの改良を御教示下さったソウル大の金道漢教授・韓国科学技術院の權覩憲教授を始め初版の出版以来本書に対して種々のご注意を下さった方々，本書の出版に関して終始お世話になってきた小池美樹彦氏を始めとする東京大学出版会の方々に心からの御礼の気持を記しとどめておきたい．

1996年9月

著者識

目　　次

序　章

解析学の歴史は Newton, Leibniz の輝かしい微分積分法の創始に始まる．揺籃期の人々にとって，函数とは近代科学の前に姿を見せ始めた調和的宇宙像にも似て，滑らかで完全なものであったに違いない．だがやがて数々の成果を挙げた初期解析学にも反省の世紀が訪れる．函数は必ずしも完全無欠な神の手に成るものばかりではない．連続ながら到るところ微分不可能な函数が存在する．冪級数は到底すべての函数を表現し得ない．そういう悪魔の作った函数に対しては偏微分や積分の順序交換は勝手には許されなくなる．滑らかな函数の列の極限がとんでもない不連続な函数を与え，極限操作と微積分演算の順序を交換するのに数学者は細心の注意を払わなければならない，という憂うつな時代の到来であった．

だがしかし数学とは本来人々を簡明さに導くために存在するのではないか．不自由さは制限から生じる．例外の多い規則は定義が悪いのである．こうして不連続な函数を積極的に導入することにより微分積分法に簡明さを呼び戻すきっかけを作ったのは，しかし残念ながら数学者ではなかった．（専門家の固陋を打破るのは常に素人なのかもしれない．）19 世紀の末に工学者 **Heaviside** は現在彼の名を以て呼ばれる不連続函数

$$Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ のとき}, \\ 1, & x \geq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{0.1}$$

を導入し，すこぶる有効な形式的計算法を発明した．20 世紀に入り，物理学者 **Dirac** は，量子力学に現われる一般固有函数の正規化のために

$$(0.2) \qquad \delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0 \text{ のとき},\\ +\infty, & x=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

という“擬函数”を導入した．この函数の原点における値 $+\infty$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

あるいは更に一般に，滑らかな函数 $\varphi(x)$ に対して

$$(0.3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx=\varphi(0)$$

が成り立つ程度のものだというのである．この Dirac の函数 $\delta(x)$ は Heaviside の函数 $Y(x)$ と次の“奇妙だが至極有効な”関係で結ばれている．

$$(0.4) \qquad Y'(x)=\delta(x)$$

これらの新算法に対する数学者の反応はまちまちであったがそれを積極的に評価しその正当化に力を貸す一連の人々が現われ，遂に 1940 年代後半に至り **L. Schwartz** が数学的に完全な一つの正当化を与えた．(Schwartz はその著書において“工学者が長年使っていてボロの出ない算法というものは必ず数学的に正当化できるはずである”と所信を述べている．) 彼の解釈は，**分布(distribution)**の理論と呼ばれ，擬函数を測度の拡張である一種の“汎函数”としてとらえようというものであった．すなわち，まず $\mathcal{D}(\boldsymbol{R})$ を無限回微分可能で台が有界な $\boldsymbol{R}$ 上の (複素数値) 函数の全体とし，これに適当な位相を入れて位相線型空間と考える．その位相的双対空間 $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$，すなわち $\mathcal{D}(\boldsymbol{R})$ 上の連続な線型汎函数 ($\mathcal{D}(\boldsymbol{R})$ から $\boldsymbol{C}$ への連続な線型写像) の全体が，分布の空間と呼ばれ，ここに δ や Y が住んでいると考えるのである．この両空間の双対を与える内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表わせば，Y は

$$\langle Y,\varphi\rangle=\int_{0}^{\infty}\varphi(x)dx\left(=\int_{-\infty}^{\infty}Y(x)\varphi(x)dx\right)$$

で与えられ，δ は

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)$$

で与えられる．分布の微分は部分積分だと思えば常に可能である．例えば

$$\langle Y',\varphi\rangle\underset{\text{定義}}{=}-\langle Y,\varphi'\rangle=-\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle$$

これにより (0.4) が正当化された．

ここで次のことを注意しておくのは無駄ではあるまい．すなわち，(0.2)と比較して，より普通の

(0.5)
$$f(x)=\begin{cases}0, & x \neq 0 \text{ のとき},\\ 1, & x=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

という集合論的函数は，解析学にとってはつまらないものとして，現代積分論におけると同様 Schwartz の分布の理論においても 0 と同一視されるということである．

さて，わが数学者**佐藤幹夫**は，学生時代に Schwartz の新しい理論に接し多くの人々と同様非常な感銘を受けた．しかし，彼には数学というものの自然さに関する独特な価値観があって，Schwartz の理論の基礎に用いられた $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ の函数(台の有界性の故にそれは決して解析函数とはならない)というものが彼のこの価値観と相容れなかった．この違和感は数年の懐抱期の後に，**超函数** (**hyperfunction**) の理論として結晶したのである．

今 $\varphi(x)$ を解析函数としよう．公式(0.3)を見て，函数論を習いたての読者はすぐに Cauchy の積分公式

(0.6)
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(z)}{z}dz=\varphi(0)$$

を想起するであろう．ここで $\gamma=-\gamma_+ + \gamma_-$ であり，$\gamma_\pm$ は例えば図のように原点を上下に避けて通るような，原点を含む区間 $[a,b]$ の両端を結ぶ道であるとする．

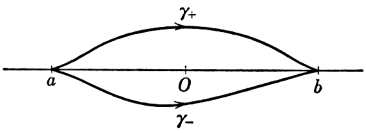


図 0.1

Cauchy の積分定理により積分値は道の変更による影響を受けないから，$\gamma_\pm$ をそれぞれ a から b に到り原点を無限小だけ上下に避ける仮想的な道まで変形すれば，(0.6)式の左辺は

$$\int_{\gamma_+}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\right)dz-\int_{\gamma_-}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\right)dz$$
$$=\int_{a+i0}^{b+i0}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\right)dz-\int_{a-i0}^{b-i0}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\right)dz$$

$$=\int_a^b\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)\varphi(x)dx$$

という実軸上の積分になる．つまり

$$\delta(x)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right) \tag{0.7}$$

と解釈されるわけである．

この考えを推し進めて，佐藤は任意の擬函数（彼の用語でいう超函数）が実軸の上下からの正則函数の境界値の差 $F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ として表わされると考えた．このような形式的記号の全体は $\boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R}$ 上の正則函数の全体が作る空間 $\mathcal{O}(\boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R})$ と一対一に対応しているが，それらは超函数の空間とみなすとき重複を含んでいる．例えば $F(z)$ を $\boldsymbol{C}$ 全体で正則な函数とすれば，(0.6)の $1/z$ の代わりに $1/z-2\pi iF(z)$ をとっても左辺の値は変わらないから，

$$\delta(x)=\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x+i0}+F(x+i0)\right)-\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x-i0}+F(x-i0)\right) \tag{0.8}$$

としても良いわけだが，(0.7)と(0.8)を同じ超函数とみなすのは自然であろう．故にこのような不定性を考慮したとき，佐藤の超函数全体は商空間 $\mathcal{O}(\boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R})/\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ に対応しているというべきである．（序ながらこの商空間は一次元相対コホモロジー群 $H^1_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{C},\mathcal{O})$ の一つの表現である．）この空間で δ は分子の空間 $\mathcal{O}(\boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R})$ の元 $-\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{z}$ で代表されるクラス $\left[-\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{z}\right]$ に，また Y は分子の元 $F(z)=-\dfrac{1}{2\pi i}\log(-z)$ で代表されるクラス $\left[-\dfrac{1}{2\pi i}\log(-z)\right]$ に対応すると考える（log は主値を表わす）．後者の例では実際に $F(x+i0)-F(x-i0)$ を計算してみれば，分枝の選び方により原点を除いて(0.1)が成り立っていることが確かめられる．さらに，解析函数 $\varphi(x)$ に対し

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_a^b\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\log(-x-i\varepsilon)\varphi(x+i\varepsilon)dx-\int_a^b\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\log(-x+i\varepsilon)\varphi(x-i\varepsilon)dx\right\}$$
$$=\int_a^b Y(x)\varphi(x)dx$$

となるから，Y のこの定義が原点まで込めて正当であることを確信することができる．

さて，超函数論では微分と極限の順序交換は常に可能なはずだと大らかに考

えれば，超函数の微分の定義として $f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)=[F(z)]$ に対し

$$f'(x)=(F_+(x+i0)-F_-(x-i0))'=\frac{dF_+}{dz}(x+i0)-\frac{dF_-}{dz}(x-i0),$$

あるいは $[F(z)]'=[F'(z)]$ が得られる．すると任意の超函数は微分可能となり，公式(0.4)は周知の等式

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)\right)'=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}$$

の言い換えに過ぎないことがわかる．こうして擬函数の理論に対する新しい正当化が得られた．

超函数のもう一つの起源は Fourier 変換の一般化である．周知のように，Fourier 変換

$$(\mathscr{F}f)(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}f(x)dx \tag{0.9}$$

は核 $e^{-ix\xi}$ が遠方で減少しないため，これを適用したい $f(x)$ に対してしばしば普通の意味では収束しなくなる．これを何とか解釈し直して Fourier 変換を拡張しようという試みも函数概念の拡張の歴史における重要な動機の一つであった．Schwartz の分布の理論の系統をひく解釈はおおむね次のようなものである：(0.9)が分布として収束するためには，$\varphi(\xi)\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ に対し積分順序の変更を仮定して得られる積分

$$\begin{aligned}\langle(\mathscr{F}f)(\xi),\varphi(\xi)\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}\langle e^{-ix\xi},\varphi(\xi)\rangle_\xi f(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(\mathscr{F}\varphi)(x)f(x)dx\end{aligned}$$

が“収束”すればよい．φ の滑らかさのお蔭で $(\mathscr{F}\varphi)(x)$ はかなり早く減少する函数となるので，この方法で多項式程度の増大度を持つ函数の Fourier 変換が可能となる．例として，1 の Fourier 変換が $2\pi\delta(\xi)$ になることがわかるが，この検証にはかなりの計算が要る．

これに対し佐藤による Fourier 変換の解釈は次のようなものであった．(0.9)が ξ の超函数として収束するためには，ξ を複素変数 ζ に変えたとき，積分

(0.9) がそれぞれ $\pm\,\mathrm{Im}\,\zeta>0$ で正則函数として収束するような二つの部分に分けられればよい．実際

$$F_+(\zeta)=\int_{-\infty}^{0}e^{-ix\zeta}f(x)dx,\qquad \mathrm{Im}\,\zeta>0\text{ において},$$

$$-F_-(\zeta)=\int_{0}^{\infty}e^{-ix\zeta}f(x)dx,\qquad \mathrm{Im}\,\zeta<0\text{ において}$$

と分けてみれば，これらは $f(x)$ が指数函数よりも遅い増大度を持っている限り収束する．故に

$$(\mathscr{F}f)(\xi)=F_+(\xi+i0)-F_-(\xi-i0)$$

と解釈することができる．例として $f(x)=1$ とすれば，初等的な計算により，$F_\pm(\zeta)=-\dfrac{1}{i\zeta}$．故に

$$(\mathscr{F}1)(\xi)=-\frac{1}{i}\left(\frac{1}{\xi+i0}-\frac{1}{\xi-i0}\right)=2\pi\delta(\xi)$$

が得られる．読者は複素領域の“風通しの良さ”を堪能されたい．

最後に蛇足ながら次のことを注意しておこう：集合論的な函数 (0.5) は佐藤の超函数論においても 0 と同一視される．佐藤超函数の見掛け上の代数的性格にも拘わらず，それはあくまで解析学の正道たる現代積分論の延長線上にあるのである．Schwartz の理論の正当化には位相線型空間論の最も深い知識が用いられ，また佐藤の理論の正当化には層係数コホモロジー論の最も進んだ概念が用いられる．難易の評判は多くは迷信である．前者に対する通俗解説書は数多いが，本書はいささか後者に対する通俗解説書の魁たろうとするものである．ともあれ，双対性とコホモロジーの二つは，偶然か必然か，現代数学における積分論の抽象化を競い合っていることに読者は深く思いを馳せるべきである．

第1章　一変数の超函数

この章では一変数の超函数について解説する．記述は自足的で一応一通りの材料を網羅しているが，一変数超函数論の講義として完璧を期したものではない．あくまでも多変数の場合の理解を助けるための準備のつもりである．そのため一変数の記述としてはやや大げさな用語を用いたところもある．多変数超函数を学ぶのが目的の読者も用語の準備等の都合上一通り本章に目を通してもらいたい．

§1　定義と初等的演算

序章で述べたことを精密化し，ここでは実数直線 $\boldsymbol{R}$ の開集合 Ω をとり，この上の超函数の空間の定義を与えよう．まず次の言葉を用意する．

定義 1.1.1　一般に $\boldsymbol{R}$ の部分集合 Ω に対し複素開集合 $U\subset\boldsymbol{C}$ が Ω の**複素近傍**であるとは Ω が U の閉部分集合となっていることをいう．(図 1.1 参照．そこでは $\Omega=]a,b[$ である．U には端点 a は含まれない．)

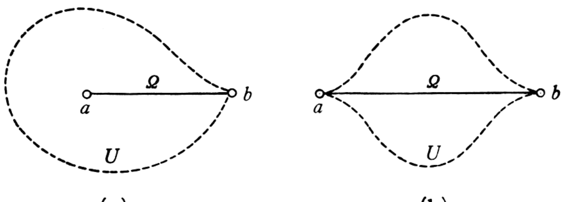


図 1.1

複素開集合 U, $U\setminus\Omega$ 上の正則函数の全体の作る線型空間をそれぞれ $\mathcal{O}(U)$, $\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ で表わす．自然な制限写像により前者を後者の線型部分空間とみな

して商空間 $\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)$ をとる．（すなわち，$\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ の元で U 上の正則函数に延長できるものは0と同一視する．）分子の元 $F(z)$ により代表されるクラス $[F(z)]$ が Ω 上の一つの**超函数**(hyperfunction) $f(x)$ を表わすと考える．この意味で $F(z)$ は $f(x)$ の一つの**定義函数**であるという．ところで

$$U\setminus\Omega = U_+\cup U_-,\qquad U_\pm = U\cap\{\pm\mathrm{Im}\,z>0\} \tag{1.1.1}$$

と非連結な和になっている時は，$F_\pm(z)=F(z)|_{U_\pm}$ とおき $f(x)=[F(z)]$ の代わりに

$$f(x) = F_+(x+i0)-F_-(x-i0) \tag{1.1.2}$$

という表記(**境界値表示**)を採用してもよい．このとき分母 $\mathcal{O}(U)$ の元は実際に解析接続により普通の引算で相殺されているわけである．$U_\pm$ はそれぞれ Ω の上半近傍及び下半近傍と呼ばれる．

上で選んだ近傍 U には特別な意味はない．Ω の他の複素近傍 $V\subset U$ をとれば $\mathcal{O}(V\setminus\Omega)/\mathcal{O}(V)$ もまた同等の資格を持つが，このとき制限写像から誘導される自然な写像 $\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)\to\mathcal{O}(V\setminus\Omega)/\mathcal{O}(V)$ が存在する．超函数の定義を特別な近傍から開放するためにはこの自然な写像により対応する元を同一視すればよい．こうして **Ω 上の超函数の空間** $\mathcal{B}(\Omega)$ の正確な定義が得られる．

定義 1.1.2　$\mathcal{B}(\Omega)=\varinjlim_{U\supset\Omega}\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)$

記号 $\varinjlim_{U\supset\Omega}$ (帰納極限)は Ω の複素近傍 U をどんどん縮めてゆくとき包含関係にある二つの近傍の間の制限写像で対応しているものをどんどん同一視してゆくことを意味する(参考1.1を見よ)．記号 $F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ からも想像されるように極限にとって大事なのは Ω のごく近くなのだからこの定義は自然である．ところで実は次の定理が成り立つので帰納極限は取るには及ばなかったのである．

定理 1.1.3　$U\supset V$ を Ω の任意の二つの複素近傍とするとき制限写像から誘導された自然な写像

$$\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)\longrightarrow\mathcal{O}(V\setminus\Omega)/\mathcal{O}(V)$$

は同型である．従っていずれも線型空間 $\mathcal{B}(\Omega)$ と同一視できる．

上の写像が単射なことは明らかであろう．全射の証明は§5で他の諸定理の証明と一緒にまとめて与えよう．

参考 1.1　帰納極限の概念は本書の前半を理解するには必ずしも必須の予備知識ではないが，念のためここで厳密な定義を与えておこう．いま記号を少し簡単にして，上の状況と同様の性質を有する添え字集合 $\{U\}_{U\in\mathcal{U}}$ に対し，その各元 U から $U\mapsto E_U$ という $\boldsymbol{C}$–線型空間への対応があり，$U\supset V$ のときは $\rho_{VU}:E_U\to E_V$ という線型写像が定義されて $\rho_{UU}=id$，かつ $U\supset V\supset W$ のとき $\rho_{WU}=\rho_{WV}\circ\rho_{VU}$ という連鎖律を満たしているとする．このとき $\{E_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ は $\boldsymbol{C}$–線型空間の帰納系であるという．これに対しその帰納極限 $\varinjlim_{U\in\mathcal{U}} E_U$ を次のように定義する：まず $E=\bigsqcup_{U\in\mathcal{U}} E_U$ という非連結和を作る．（非連結和 (disjoint union) とは，各 E_U を互いに無関係な集合と考えて合併したものである．）この空間 E の二つの元 $F\in E_U$, $G\in E_V$ の間に

$$F\sim G \Longleftrightarrow \exists\ W\subset U\cap V \text{ に対し } \rho_{WU}(F)=\rho_{WV}(G) \text{ が } E_W \text{ において成立}$$

という同値関係が入るが，これにより E を類別して得られる空間 $E/\sim$ をもって帰納極限 $\varinjlim_{U\in\mathcal{U}} E_U$ の定義とする．容易にわかるように $\rho_U:E_U\to\varinjlim_{U\in\mathcal{U}} E_U$ という自然な写像が存在し，逆にこの空間の任意の元はある代表元 $F\in E_U$ を用いて $\rho_U(F)$ の形に書ける．このことから帰納極限 $\varinjlim_{U\in\mathcal{U}} E_U$ が自然に $\boldsymbol{C}$–線型空間の構造を持ち，その構造に関して ρ_U が $\boldsymbol{C}$–線型写像となっていることがわかる．実際，二つの元 $\rho_U(F)$, $\rho_V(G)$ の線型結合は $W\subset U\cap V$ を選び，E_W における線型演算を用いて

$$\lambda\rho_U(F)+\mu\rho_V(G)=\rho_W(\lambda\rho_{WU}(F)+\mu\rho_{WV}(G))$$

というように計算すればよい．これはまさに異なる定義域を持つ定義函数で表わされた二つの超函数に対する線型結合の計算の仕方を示している．すなわち，各々の定義函数を共通の定義域に制限しておいて，そこで線型結合を計算すればよいのである．

さて次に起こる疑問は分母 $\mathcal{O}(U)$ は小さすぎないかということである．例えば $F(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ が連続に Ω まで延長できれば $F(x+i0)-F(x-i0)$ は連続函数として相殺して 0 となるが上の定義の意味で超函数としても 0 であろうか？これにはしかし古典函数論が既に答を用意してくれている．

定理 1.1.4 (Painlevé)　$F(z)$ が $U\setminus\Omega$ で正則，U で連続なら実は U で正則である．

参考 1.2　Schwartz の分布の理論を御存知の方は上の定理を次のように拡張してみよ．

定理 1.1.4′　$F_\pm(z)\in\mathcal{O}(U_\pm)$ とし $F_\pm(x\pm i\varepsilon)$ の $\varepsilon\downarrow 0$ のときの極限が分布の意味で存在

して等しいならば，即ち任意の $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\Omega)$ に対し

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\langle F_+(x+i\varepsilon),\varphi(x)\rangle=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\langle F_-(x-i\varepsilon),\varphi(x)\rangle$$

が成り立つならば，$F_\pm(z)$ は U 上の一つの正則函数としてつながる．

［ヒント：数回の不定積分で通常の Painlevé の定理に帰着せよ．］

さて超函数に対して初等的諸演算を定義しよう．

1° C-線型演算　これは $\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)$ の線型空間としての構造に他ならない：$\lambda,\mu\in \boldsymbol{C}$，$F(x)$，$G(x)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ に対し

$$\lambda[F(z)]+\mu[G(z)]=[\lambda F(z)+\mu G(z)]$$

あるいは記号的に

$$\begin{aligned}(1.1.3)\qquad &\lambda(F_+(x+i0)-F_-(x-i0))+\mu(G_+(x+i0)-G_-(x-i0))\\ &=(\lambda F_++\mu G_+)(x+i0)-(\lambda F_-+\mu G_-)(x-i0)\end{aligned}$$

2° 実解析函数による掛け算　$\varphi(x)$ を Ω 上の**実解析函数**とする．即ち Ω のある複素近傍 U に正則函数として解析接続できるような函数とする．この U に対して超函数 $f(x)$ を $F(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ により代表させれば再び $F(z)\varphi(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ となり $f(x)\varphi(x)\in[F(z)\varphi(z)]$ という定義が意味を持つ．あるいは記号的に

$$(1.1.4)\quad \varphi(x)(F_+(x+i0)-F_-(x-i0))=(\varphi F_+)(x+i0)-(\varphi F_-)(x-i0)$$

3° 微　分　超函数 $f(x)$ を微分するにはその定義函数 $F(z)$ を微分すればよい：

$$f'(x)=[F(z)]'=[F'(z)]$$

あるいは記号的に

$$(1.1.5)\quad \frac{d}{dx}(F_+(x+i0)-F_-(x-i0))=\frac{dF_+}{dz}(x+i0)-\frac{dF_-}{dz}(x-i0)$$

正則函数は何回でも微分できるので，その結果超函数も何回でも微分できることになる．

以上を総合すれば実解析函数を係数に持つ線型常微分作用素が超函数に作用できることとなる：

$$(1.1.6)\quad P(x,D)f(x)=\left\{a_0(x)\frac{d^m}{dx^m}+a_1(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+\cdots+a_m(x)\right\}f(x)$$

よく使われる超函数の例をその定義函数とともに掲げよう．

例 1.1.5 (以下の諸例において多価函数の分枝はいずれも主値である.)

a) $Y(x)=\left[-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)\right]$ (Heaviside 函数)

b) $\delta(x)=\left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right]$ (Dirac のデルタ函数)

c) $(x+i0)^\lambda$ 定義函数は $F_+(z)=z^\lambda$, $F_-(z)=0$

$(x-i0)^\lambda$ 定義函数は $F_+(z)=0$, $F_-(z)=-z^\lambda$

d) $\lambda\notin \boldsymbol{Z}$ に対し

$$x_+{}^\lambda=\left[\frac{-(-z)^\lambda}{2i\sin\pi\lambda}\right]=\frac{1}{2i\sin\pi\lambda}\{(-x+i0)^\lambda-(-x-i0)^\lambda\}$$

$$x_-{}^\lambda=\left[\frac{z^\lambda}{2i\sin\pi\lambda}\right]=\frac{1}{2i\sin\pi\lambda}\{(x+i0)^\lambda-(x-i0)^\lambda\}$$

$x_\pm{}^\lambda$ はそれぞれ次のような函数の超函数論的解釈である:

$$x_+{}^\lambda=\begin{cases}|x|^\lambda, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad x_-{}^\lambda=\begin{cases}0, & x>0,\\ |x|^\lambda, & x<0.\end{cases}$$

$\lambda\in\boldsymbol{Z}$ のときは上の公式において λ につき整数点のまわりで有限部分(Laurent 展開の 0 次の項)をとることにより得られる次の公式が採用される.

d′) $x_\pm{}^n=\left[\mp\frac{(\pm z)^n}{2\pi i}\log(\mp z)\right]$

これは $n\geq 0$ のとき $(\pm x)^n Y(\pm x)$ に等しい.

e) $|x|^\lambda=x_+{}^\lambda+x_-{}^\lambda$ と定義する.

一般に $F(z)$ を Ω の近傍で有理型の(即ち極以外の特異点を持たぬ)解析函数とするとき, $F(x)$ の**有限部分**(finite part)と呼ばれる超函数を次式で定義する:

f) $\text{f. p.}\,F(x)=\frac{1}{2}(F(x+i0)+F(x-i0))$

これの定義函数は

$$F_+(z)=\frac{1}{2}F(z),\qquad F_-(z)=-\frac{1}{2}F(z)$$

特に

$$\text{f. p.}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right)=\frac{1}{x+i0}+i\pi\delta(x)=\frac{1}{x-i0}-i\pi\delta(x)$$

これはしばしば p. v. $\frac{1}{x}$ とも書かれその場合は **Cauchy の主値**(principal value)と呼ばれる.

g)　$\log|x| = \frac{1}{2}(\log(x+i0)+\log(x-i0)) = \log(x+i0) - \pi i Y(-x)$

問 1.1.1　f. p. $\frac{1}{x^m} = x_+{}^{-m} + (-1)^m x_-{}^{-m}$. 特に m が偶数のとき f. p. $\frac{1}{x^m} = |x|^{-m}$.

問 1.1.2　$x\cdot\delta^{(k)}(x)$ を計算せよ. $\left(\delta^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\delta(x)\right.$ である.$\left.\right)$

問 1.1.3　f. p. $\frac{1}{x}$, $x_\pm{}^\lambda$, $\log|x|$ の逐次微分を計算せよ.

§2　局　所　性

超函数は拡張された函数の一つのクラス(級)である. 一般に函数のあるクラスを考えるとき, そのクラスが局所的な性質で定義されているか, または大域的なのかを区別するのは大切なことである. 例えば連続函数という性質は局所的であり, L_1 級函数(即ち絶対積分可能)という性質は大域的で, 考えている領域に依存する. 我々の超函数の空間 $\mathcal{B}(\Omega)$ は Ω を動かしたとき前者に似た振舞をする. 即ち局所的である. このことを正確に表現するためやや大げさだが層の用語を用いることにする. まず制限という演算の意味から反省しよう.

定義 1.2.1　X を位相空間とする. $\mathcal{F}$ が X 上の $\boldsymbol{C}$-線型空間の**前層**であるとは, 任意の開集合 $U\subset X$ に対し $\boldsymbol{C}$-線型空間 $\mathcal{F}(U)$ が, また開集合の対 $U\supset V$ に対しそれらの間の $\boldsymbol{C}$-線型写像 $\rho_{VU}:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V)$ が与えられていて, 次の諸性質を満たしていることをいう.

a)　$\rho_{UU} = id.$

b)　$U\supset V\supset W$ ならば $\rho_{WV}\circ\rho_{VU} = \rho_{WU}$

$\mathcal{F}(U)$ は U 上の**切断**の作る空間と呼ばれ, その元 f は $\mathcal{F}$ の U 上の一つの切断といわれる. あるいは切断 f は U 上で定義されているなどという. ρ_{VU} は $\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}(V)$ への制限写像と呼ばれ, $\rho_{VU}(f)$ はしばしば $f|_V$ とも書かれる.

前層の概念は, 切断という言葉の代りに $\mathcal{F}$ 級函数と読めば, ある函数のクラスが制限写像に対してもつ性質を抽象化したものであることがわかるであろう. 上のことは普通に考えられる函数のクラスについては皆成り立っている.

さて $\Omega\supset\Omega'$ を $\boldsymbol{R}$ の開集合の対とし，それらの複素近傍 U, U' を $U\setminus\Omega\supset U'\setminus\Omega'$ となるように選ぶ．このとき制限写像 $\mathcal{O}(U\setminus\Omega)\to\mathcal{O}(U'\setminus\Omega')$ から自然に $\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)\to\mathcal{O}(U'\setminus\Omega')/\mathcal{O}(U')$ という写像が，従って $\mathcal{B}(\Omega)\to\mathcal{B}(\Omega')$ という写像が誘導されるが，容易にわかるようにそれは U, U' の選び方によらない．このことから $\Omega\mapsto\mathcal{B}(\Omega)$ が $\boldsymbol{R}$ 上の前層となることが容易に確かめられる．

さて，局所性は制限写像とのかかわりあいとして次に述べる層の概念により表現される．

定義 1.2.2 (Serre)　X 上の前層 $\mathcal{F}$ が**層**であるとは，さらに次の諸性質が満たされることをいう：$\{U_\lambda\}$ を開集合 $U\subset X$ の任意の開被覆とするとき，

F I)　切断 $f\in\mathcal{F}(U)$ が，被覆の任意の元 U_λ について $f|_{U_\lambda}=0$ を満たせば $\mathcal{F}(U)$ の元として $f=0$.

F II)　$f_\lambda\in\mathcal{F}(U_\lambda)$ より成る切断たちの族 $\{f_\lambda\}$ が与えられ，それらの間に両立条件

$$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi\implies f_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu}=f_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}$$

が成り立っていれば，切断 $f\in\mathcal{F}(U)$ で $f|_{U_\lambda}=f_\lambda$ となるものを見出すことができる．

つまり層とは 0 であるかどうか，及びつなげられるかどうかが局所的に判定できるような，函数の拡張概念である．

例 1.2.3　Ω に対し Ω 上の L_1 函数全体 $L_1(\Omega)$ を対応させると前層にはなるが層にはならない．F II が満たされないからである．これに似ているが層をなすものとしては，Ω に対し Ω 上の局所可積分函数すなわち Ω の任意のコンパクト部分集合上で絶対積分可能な函数の全体 $L_{1,loc}(\Omega)$ を対応させるものがある．次のような日常よく使われる函数のクラスはいずれも層をなす：

a)　正則函数の作る $\boldsymbol{C}$ 上の層 $\mathcal{O}$

b)　実解析函数の作る $\boldsymbol{R}$ 上の層 $\mathcal{A}$，ここに開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{R}$ に対し $\mathcal{A}(\Omega)=\varinjlim_{U\supset\Omega}\mathcal{O}(U)$ である．即ち，Ω 上の函数であって，Ω のある複素近傍まで解析接続されるようなものの全体である．これは，容易にわかるように，Ω 上の函数であって Ω の各点で Taylor 級数に展開されるようなものの全体と一致する．

c)　無限階可微分函数の作る $\boldsymbol{R}^n$ 上の層 $\mathcal{E}$

もう少し一般に

d)　C^k 級函数(即ち，k 階以下の連続な偏導関数を持つ函数)の作る $\boldsymbol{R}^n$ 上の層 ($k=0,1,2,\cdots,\infty$). 特に $k=0$ の場合は連続函数の作る層 C である.

e)　Schwartz の分布 (distribution) も $\boldsymbol{R}^n$ 上の層 $\mathcal{D}'$ をなす.

定理 1.2.4　対応 $\Omega\to\mathcal{B}(\Omega)$ は $\boldsymbol{R}$ 上の層を定める. これを $\mathcal{B}$ で表わし，超函数の層と呼ぶ.

F I の検証　$f(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ は複素近傍 $U\supset\Omega$ により $F(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ で代表されるものとする. $\Omega=\bigcup\Omega_\lambda$ を一つの開被覆とし $f|_{\Omega_\lambda}=0$ としよう. これは Ω_λ の複素近傍 U_λ で U に含まれるものを適当にとったとき $F(z)|_{U_\lambda}\in\mathcal{O}(U_\lambda)$ となることを意味する. これが任意の λ について成り立つことから $F(z)$ は Ω の近傍で正則となり，従って $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ となるから $f(x)=[F(z)]=0$. F II の検証は §5 にまわす.

開部分集合 $\Omega'\subset\Omega$ に対し $f|_{\Omega'}=0$ のとき超函数 f は Ω' で 0 に等しいという. この 0 は値の 0 ではなくて超函数の 0 であることに注意せよ. さて，性質 F I により超函数 $f\in\mathcal{B}(\Omega)$ が与えられたときこのような性質を持つ最大の開集合 Ω' が存在する(合併をとればよい). その Ω における補集合のことを f の**台**と呼び $\operatorname{supp} f$ で表わす. これは直観的にいえば f が“0 でない”点の集まりである. 一般に

定義 1.2.5　層 $\mathcal{F}$ の U 上の切断 f に対し f の**台**($\operatorname{supp} f$) とは f が 0 となる U の最大の開部分集合の U における補集合のことをいう.

台は定義により U の閉部分集合である. さて解析学の重要な対象の一つは線型微分作用素であるが，その最大の特徴はそれが局所的に作用するということである. これは次の用語で表現される.

定義 1.2.6　$\mathcal{F},\mathcal{G}$ を位相空間 X 上の二つの(前)層とする. $\boldsymbol{C}$-線型写像 h_U: $\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ の族 $h=\{h_U\}$ は次の図式を可換にするとき(前)層の準同型であるといわれる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow[h_U]{} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho^{\mathcal{F}}{}_{VU}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{\mathcal{G}}{}_{VU}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow[h_V]{} & \mathcal{G}(V) \end{array} \tag{1.2.1}$$

(可換とは矢印の始点 $\mathcal{F}(U)$ からどの道をたどっても終点 $\mathcal{G}(V)$ に着いたとき

同じ元が得られることをいう.)

V として固定した一点 $x\in X$ の微小近傍をとってみれば，上の図式の可換性が h の局所性を表現していることが理解されるであろう．特に

系 1.2.7 層の準同型は切断の台を増やさない.

定理 1.2.8 実解析函数を係数とする線型微分作用素(1.1.6)は層 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ からそれ自身への層の準同型として(すなわち自己準同型として)働く．また正則函数を係数とする複素線型微分作用素 $P(z, D_z)=a_0(z)\dfrac{d^m}{dz^m}+\cdots+a_m(z)$ も層 $\mathscr{O}$ の自己準同型となる.

これも明らかであろう．もっとも微分作用素の係数が開集合 U の上だけで定義されているときは，$P(z, D_z):\mathscr{O}(V)\to\mathscr{O}(V)$ という線型写像は $V\subset U$ なる開部分集合に対してしか定義されない．このような場合，層の準同型は開集合 U の上だけで定義されているという．あるいは層 $\mathscr{O}$ を U 上に制限したもの $\mathscr{O}|_U$ を考え，“$P(z, D_z)$ は開集合 U 上の層 $\mathscr{O}|_U$ の自己準同型である”ともいうことができる．$\mathscr{O}|_U$ の定義はおのずから明らかであろう．以上のことは微分作用素の $\mathscr{A}$ や $\mathscr{B}$ への作用についても同様である.

問 1.2.1 例 1.1.5 に挙げた超函数たちの台を決定せよ.

問 1.2.2 超函数 $f(x)$ に対し $\operatorname{supp} f(x)\setminus\{0\}\subset\operatorname{supp} xf(x)\subset\operatorname{supp} f(x)$ を示せ.

§3 通常の函数の超函数としてのみなし方

さて超函数に対する演算はかなり自由にできることがわかったが，それが通常の函数に対するものの拡張となっていなければ意味がない．そのことを調べるために厳密な言葉の準備から始めよう.

定義 1.3.1 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ を位相空間 X 上の二つの層とする．$\mathscr{F}$ が $\mathscr{G}$ の**部分層**であるとは各開集合 $U\subset X$ に対し，包含写像 $\iota_U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U)$ が定義され $\iota=(\iota_U)$ が層の準同型となっていることをいう.

さて，まず実解析函数 $\varphi(x)$ は $\varphi(x+i0)$，あるいは $\varphi(x-i0)$ という表現により超函数とみなされる．これをいま導入した用語を用いて厳密に述べれば次のようになる.

定理 1.3.2 $\mathscr{A}$ は $\mathscr{B}$ の部分層である.

(1.3.1)
$$\varepsilon(z)=\begin{cases}1 & (\boldsymbol{C}_+=\{\mathrm{Im}\,z>0\}\text{上}),\\ 0 & (\boldsymbol{C}_-=\{\mathrm{Im}\,z<0\}\text{上}),\end{cases}$$

なる函数を用いるとき，包含写像 $\mathcal{A}(\Omega)\to\mathcal{B}(\Omega)$ は

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A}(\Omega)=\displaystyle\varinjlim_{U\supset\Omega}\mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\Omega)=\displaystyle\varinjlim_{U\cap\Omega}\frac{\mathcal{O}(U\setminus\Omega)}{\mathcal{O}(U)}\\ \Psi & & \Psi\\ \varphi(z)\in\mathcal{O}(U) & \longmapsto & [\varepsilon(z)\varphi(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)]\end{array}$$

により定義される．あるいは

(1.3.2)
$$\tilde{\varepsilon}(z)=\begin{cases}0 & (\boldsymbol{C}_+\text{上}),\\ -1 & (\boldsymbol{C}_-\text{上}),\end{cases}$$

を用いて $\varphi(z)\mapsto\tilde{\varepsilon}(z)\varphi(z)$ により定義しても同じ結果になる．

容易にわかるように $f\in\mathcal{B}(\Omega)$ が $\mathcal{A}(\Omega)$ に入るのは，f のある境界値表示(実は任意の表示) $F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ において $F_\pm(z)$ がともに Ω の近傍まで解析接続できるときである．$\Omega'\subset\Omega$ を開部分集合とするとき $f|_{\Omega'}\in\mathcal{A}(\Omega')$ ならば超函数 f は Ω' で実解析的であるということにしよう．この性質は局所的なので，はり合わせにより f が実解析的となるような最大の開部分集合を求めることができる．(一般に層 $\mathcal{G}$ のある切断 f をとるとき，f がそこで $\mathcal{G}$ の部分層 $\mathcal{F}$ の切断となっているような最大の開部分集合が同じ理由で存在する．)

定義 1.3.3　f がそこで実解析的となるような最大の開部分集合 $\Omega'\subset\Omega$ の Ω における補集合を f の**特異台**と呼び sing supp f で表わす．

例 1.3.4　sing supp $Y(x)=$ sing supp $\delta(x)=\{0\}$

問 1.3.1　例 1.1.5 に挙げた他の超函数の特異台も決定せよ．

次は明らかであろう．

系 1.3.5　微分作用素(1.1.6)は超函数の特異台を増やさない．

次に定積分を定義しよう．$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ の近傍で定義された超函数で端点 a,b の近傍で実解析的なものとし，$F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ をその一つの表示とする．このとき定義により $F_\pm(z)$ は点 a,b の近傍に解析接続される．

定義 1.3.6　γ_+,γ_- を a,b を結びそれぞれ上および下半平面を通る(区分的に

滑らかな)道とするとき

(1.3.3)
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\gamma_+} F_+(z)dz - \int_{\gamma_-} F_-(z)dz$$

定義の直観的正当性は(1.3.3)の左辺の $f(x)$ に表示 $F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ を代入してそれぞれの項において積分路 $[a,b]$ を $[a,b]+i0$, $[a,b]-i0$ と解釈し

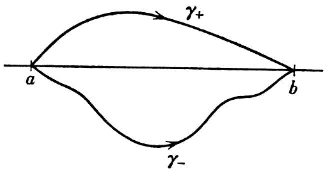


図 1.2

てみれば明らかであろう．Cauchy の積分定理により上の値は現実に用いる道 $\gamma_\pm$ の選び方によらない．また f の定義函数 $F_\pm(z)$ の選び方にもよらない．この定積分が線型性や区間に関する加法性を適当な意味で満たしていることも明らかであろう．超函数 f の定積分は f が積分区間の上下端で実解析的である限り常に有限な値を与えることに注意せよ．一方 $\int_0^1 \delta(x)dx$ のように積分区間の端点が超函数の特異台に含まれるときは上の定義は意味を失う．

問 1.3.2　$\int_a^b \mathrm{f.\,p.}\dfrac{1}{x}dx$ を計算せよ．ただし $a<0<b$ とする．

さて，特別な場合として $f(x)$ がコンパクトな台 K を持つ超函数の場合を考えよう．0 は実解析的函数であるから，f の台を含む区間 $[a,b]$ を選んで上の定義により f の定積分を計算することができる．しかしこの場合は特に重要なのでもう少しくわしく見てみよう．K を含む開集合 Ω をとり $f\in\mathcal{B}(\Omega)$ とみなしたとき，f の定義函数 $F_\pm(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ は定義により $\Omega\setminus K$ において正則につながり，$F(z)\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ を定める．このとき次の補題が成り立つ．

補題 1.3.7　コンパクト集合 K に台が含まれる超函数の全体のなす空間 $\mathcal{B}[K]$ は K の複素近傍 U を任意に一つ選ぶとき，商空間

(1.3.4)
$$\mathcal{B}[K] \cong \mathcal{O}(U\setminus K)/\mathcal{O}(U)$$

で表現される．

実際，上のような開集合 Ω と，その複素近傍 U を選んだとき，$\mathcal{B}(\Omega)$ の表現

$\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)$ において台が K に含まれるものがちょうど(1.3.4)に対応していることは明らかであろう．一方，台が K に含まれるような超函数はその外へ0で一意に拡張されるから，任意の $\Omega\supset K$ に対し $\mathcal{B}[K]\to\mathcal{B}(\Omega)$ という包含写像は確定しており，従って Ω の選び方に特別な意味はない．

さて $f(x)\in\mathcal{B}[K]$ に対し上のような定義函数 $F(z)\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ を選ぶ．K を内部に含む区間 $[a,b]\subset U$ をとりこれを上述のごとく上下に変形したものを $\gamma_\pm$ とすれば，$\gamma=-\gamma_+ +\gamma_-$ は K を正の向きに一周する閉路となる．積分の定義により

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\gamma_+}F(z)dz-\int_{\gamma_-}F(z)dz=-\oint_\gamma F(z)dz$$

となる．この値は$[a,b]$の選び方によらないのでこれを普通

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=-\oint_\gamma F(z)dz$$

と書いて $f(x)$ の定積分と呼ぶ．もう少し一般にして $\varphi(x)$ を f の台 K の近傍で実解析的な函数とすれば積 $\varphi(x)f(x)$ は再び台が K に含まれる超函数となり，従って

$$\langle f,\varphi\rangle \underset{\text{定義}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx=-\oint_\gamma \varphi(z)F(z)dz \tag{1.3.5}$$

が計算できる．ここで閉路 γ は K を囲みかつ F と φ の共通の定義域内にあるように取る．（この議論では K が連結である必要はない．）この積分は，普通，台が K に含まれるような超函数の空間 $\mathcal{B}[K]$ と，K の近傍で定義された実解析函数の空間 $\mathcal{A}(K)$ との間の双対性を定義する内積と解釈されるものである．以上により序章で述べた公式(0.3)が，実解析函数 φ に対しては我々の立場から完全に正当化できた．

定積分を用いると超函数の定義函数を計算することができる．次の補題は Cauchy の積分公式の言い換えにすぎない．

補題 1.3.8 $f(x)$ をコンパクトな台を持つ超函数とし

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z}dx \tag{1.3.6}$$

とおくとき，$G(z)$ は f の台の外で正則で$[G(z)]=f(x)$．

証明 $K=\operatorname{supp} f$，U を K の複素近傍とし $f=[F(z)]$，$F(z)\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ を一

つの表示とする．上の式において $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{x-z}$ は固定された各 $z\in\boldsymbol{C}\setminus K$ に対し，x の実解析関数として超函数 f に乗じてあることに注意せよ．故に K を正の向きに囲む閉路 $\gamma\subset U$ を，点 z がその外にあるように選べば，積分の定義により

$$G(z)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

(図 1.3 では K が連結に描いてあるがその必要はない．）この式から $G(z)$ が $\boldsymbol{C}\setminus K$ で正則となることが直ちにわかる．故に $[G(z)]$ は K に台を持つ超函数

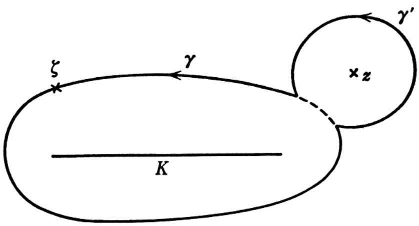


図 1.3

となる．それが f に等しいことをいうには超函数としての等式 $[G(z)]=[F(z)]$ が K の近傍で成り立つことをいうだけで十分であるから，結局 $G(z)-F(z)$ が K の近傍に正則に拡張できることをいえばよい．さて，z を正の向きに囲み γ と弧の一部を共有する閉路 γ' を図 1.3 のように選べば Cauchy の積分定理により

$$G(z)-F(z)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma'}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma+\gamma'}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

閉路 $\gamma+\gamma'$ は(共通弧を消し去れば)点 z を内部に取り込んでしまったから，この表現は $\gamma+\gamma'$ の内部，つまり K のある近傍に z の正則函数として延長できることを示している．証了．

上の補題によりコンパクトな台を持つ超函数に対して定義函数を計算する標準的な方法が存在することがわかった．ところで(1.3.6)で与えられる定義函数は次の著しい性質を持っている．

a)　$G(z)$ は $\boldsymbol{P}^1\setminus K$ で正則となる．($\boldsymbol{P}^1=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ は Riemann 球面)

b)　$G(\infty)=0$

この性質を満たす定義函数 $F(z)$ が他にあれば，差 $G(z)-F(z)$ は全 Riemann 球で正則かつ無限遠点で 0 となり，従って Liouville の定理により恒等的に 0 に等しい．つまり上の二性質は(1. 3. 6)で与えられる定義函数を一意的に特徴づけている．(∞ で 0 になる $\boldsymbol{P}^1$ 上の正則函数の層を $\mathcal{O}_\infty$ で表わすことにすれば $\mathcal{B}[K]\cong\mathcal{O}_\infty(\boldsymbol{P}^1\setminus K)$ となる．)

定義 1.3.9　コンパクトな台を持つ超函数 f に対し(1. 3. 6)で与えられる定義函数を f の**標準定義函数**と呼ぶ．

さて，公式(1. 3. 6)は f が普通の可積分函数のときにも意味がある．そこでこの式を用いて普通の函数を超函数とみなすことを考えよう．f がコンパクトな台 K を持つ L_1 級函数のとき，公式(1. 3. 6)はやはり $\boldsymbol{C}\setminus K$ で正則な函数を与えるので f は超函数として $\iota(f)=[G(z)]\in\mathcal{B}[K]$ に対応すると考える．一般に局所可積分函数 $f\in L_{1,loc}(\Omega)$ に対しては，それをコンパクトな台を持つ L_1 級函数の**局所有限和**に分解する：

$$f(x)=\sum_\lambda f_\lambda(x) \tag{1.3.7}$$

すなわち，各 $f_\lambda(x)$ は台が Ω 内のコンパクト集合であり，かつ Ω のどの点 x をとってもその適当な近傍は $\operatorname{supp} f_\lambda$ の高々有限個としか交わらないように分解するのである．このとき各 f_λ に対して $G_\lambda(z)$ を(1. 3. 6)により計算すれば，$\iota(f_\lambda)=[G_\lambda(z)]$ は台が $\operatorname{supp} f_\lambda$ に含まれる超函数となり，従って

$$\iota(f)=\sum_\lambda \iota(f_\lambda)$$

は再び(超函数の)局所有限和となる．こうして Ω 上の超函数 $\iota(f)$ が得られるが，これを f に対応する超函数と定める．(一般に層 $\mathcal{F}$ のコンパクトな台を持つ切断 $f_\lambda\in\mathcal{F}(U)$ の無限和は，切断の空間 $\mathcal{F}(U)$ に位相が定義されていなければ意味を持たないが，同じ無限和でも局所有限和ならば必ず意味を持ち，一つの U 上の切断を定める．実際，各点 $x\in U$ の十分小さい近傍の上では和は有限和として確定するが，これらは明らかにはり合せの条件を満たす．局所的に首尾一貫して定まる切断は，まさに層の定義により大域的な切断となる．)

定理 1.3.10　上の対応により層の準同型 $\iota: L_{1,loc}\to\mathcal{B}$ が定まり $L_{1,loc}$ は(a. e. で等しい函数を同一視すれば) $\mathcal{B}$ の部分層となる．この包含関係は先に定めた $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ 及び通常の意味の $\mathcal{A}\subset L_{1,loc}$ 等の包含関係と両立する．

証明　(積分論を未習の読者は以下 $L_{1,loc}$ を C として読み換えられてもよい.) まず $\iota(f)$ が $f\in L_{1,loc}(\Omega)$ の局所有限和(1.3.7)への分解の仕方によらぬことを見よう. $f(x)=\sum_\mu g_\mu(x)$ を他の同種の分解とする. これから定まる超函数が Ω の各点 x のある近傍 V で, (1.3.7)を用いて先に定めた超函数と一致することを見れば十分である. V は $\mathrm{supp}\, f_{\lambda_1},\cdots,\mathrm{supp}\, f_{\lambda_I}$ および $\mathrm{supp}\, g_{\mu_1},\cdots,\mathrm{supp}\, g_{\mu_J}$ としか交わらぬとしよう. このとき V の上で次の等式が成り立つ.

$$\sum_\lambda \iota(f_\lambda)-\sum_\mu \iota(g_\mu)=\sum_{i=1}^I \iota(f_{\lambda_i})-\sum_{j=1}^J \iota(g_{\mu_j})$$
$$=\iota\left(\sum_{i=1}^I f_{\lambda_i}-\sum_{j=1}^J g_{\mu_j}\right)$$

ここで包含写像 ι はコンパクトな台の函数に対して(1.3.6)で定まる対応にのみ用いてある. 等号は(1.3.6)の線型性による. さて, 最後の辺の括弧内は同じ函数 f の分解だから V 上 0 に等しいはずであり, 従ってそれから(1.3.6)を用いて計算した超函数も V 上 0 に等しい. これで ι の定義が正当化された. ι が層の準同型となることも同様にしてわかる.

次に ι が単射であることを示そう. このためには $f\in L_{1,loc}(\Omega)$ の台がコンパクトのとき $\mathrm{supp}\, f\subset \mathrm{supp}\, \iota(f)$ を示せば十分である. $\varphi(x)$ を台が有界な連続函数で $\mathrm{supp}\,\varphi\cap\mathrm{supp}\,\iota(f)=\phi$ なるものとする.

$$\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon}e^{-(x/\varepsilon)^2}*\varphi(x)\underset{\text{定義}}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-t)^2/\varepsilon^2}\varphi(t)dt$$

とおく. ここで実は x を複素数 z に変えてもこの積分は z につき明らかに広義一様収束し, 従って $\varphi_\varepsilon(x)$ は z の整函数 $\varphi_\varepsilon(z)$ に拡張される. $\varepsilon\downarrow 0$ としよう.

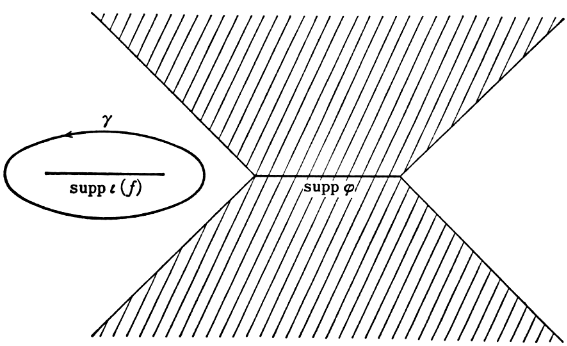


図 1.4

z が図 1.4 の斜線の外の領域 $\boldsymbol{C}\setminus[\mathrm{supp}\,\varphi+\{|\mathrm{Im}\,z|\geq|\mathrm{Re}\,z|\}]$ のコンパクトな部分集合を動くとき，$\delta>0$ が存在して積分変数 $t\in\mathrm{supp}\,\varphi$ について一様に

$$\mathrm{Re}[-(z-t)^2/\varepsilon^2]\leq-\frac{\delta}{\varepsilon}$$

という評価が成り立つ．故に $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $\varphi_\varepsilon(z)$ はそこで一様に 0 に収束する．さて γ を $\mathrm{supp}\,\iota(f)$ の非常に近くを一周する閉路とすれば，上に述べたことから γ 上一様に $\varphi_\varepsilon(z)\to 0$，従って

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\iota(f)\varphi_\varepsilon(x)dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}-\oint_\gamma G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz=0$$

と仮定してよい．一方，極限をとる以前の積分において γ を拡げてゆき $\mathrm{supp}\,f$ を含む位置 γ' まで変形すれば

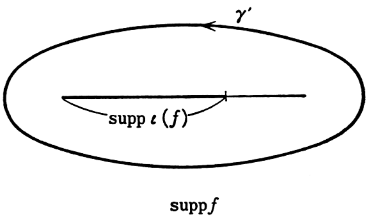


図 1.5

$$\begin{aligned}-\oint_\gamma G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz&=-\oint_{\gamma'}G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz\\&=-\oint_{\gamma'}dz\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi_\varepsilon(z)}{x-z}f(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{f(x)}{2\pi i}\oint_{\gamma'}\frac{\varphi_\varepsilon(z)}{z-x}dz\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\end{aligned}$$

となる．ここで積分順序の変更には絶対収束による Fubini の定理を，最後の簡略化は Cauchy の積分公式を用いた．さて $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $\varphi_\varepsilon(x)$ は一様に $\varphi(x)$ に近づくことが知られている．（すぐ後の参考 1.3 を見よ．）故に上の積分は $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx$ に近づく．結局 $\mathrm{supp}\,\varphi\cap\mathrm{supp}\,\iota(f)=\phi$ を満たし有界な台を持つ任意の連続函数 φ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx=0$$

が示された．これは L_1 級函数として $\mathrm{supp}\, f\subset \mathrm{supp}\, \iota(f)$ を示している．

最後に包含写像の整合性を見よう．$f(x)$ を区間$[a, b]$の近傍で定義された実解析函数とする．$\chi(x)$ をこの区間の定義函数とする：

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x\in[a,b] のとき, \\ 0, & x\notin[a,b] のとき. \end{cases}$$

すると $\chi(x)f(x)\in L_1(\boldsymbol{R})$ と見て

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f(x)}{x-z}dx \tag{1.3.8}$$

に対し $\iota(\chi(x)f(x))=[G(z)]$ となる．(1.3.8) の積分は f が正則なところで道を図 1.6 の γ_- または γ_+ に変更できるから，初め $\boldsymbol{C}\setminus[a,b]$ で正則だった $G(z)$ は

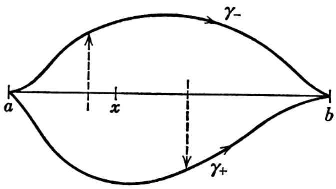


図 1.6

開区間 $]a,b[$ を通して実軸の上方から下方へ，または下方から上方へそれぞれ解析接続される．こうして得られた二つの解析接続の実軸上の一点 x における差は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_+-\gamma_-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}d\zeta = f(x)$$

に等しい．故に少なくとも開区間 $]a,b[$ の上では超函数 $\iota(f)$ は実解析的となり

$$\iota(f)|_{]a,b[} = \iota(\chi(x)f(x))|_{]a,b[} = f|_{]a,b[}$$

となる．証了．

参考 1.3　一般に $K(x)$ を絶対積分可能で $\int_{-\infty}^{\infty}K(x)dx=1$ を満たす $\boldsymbol{R}^n$ 上の函数とするとき，コンパクトな台を持つ連続函数 $\varphi(x)$（またはコンパクトな台を持つ C^k 級函数 $\varphi(x)$，または $\varphi(x)\in L_1(\boldsymbol{R}^n)$）に対して

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)*\varphi(x) \underset{定義}{=} \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}K\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right)\varphi(t)dt$$

とおけば，$\boldsymbol{R}^n$ 上一様に(または k 階以下の導函数も込めて $\boldsymbol{R}^n$ 上一様に，または $L_1(\boldsymbol{R}^n)$ において) $\varphi_\varepsilon(x)\to\varphi(x)$ となる．ここでは $\varphi(x)$ がコンパクトな台を持つ連続函数のときだけ確かめておこう．(上の証明で用いたのは $K(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ ととった特別の場合である．)

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)\int_{\boldsymbol{R}^n}K\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right)\frac{dt}{\varepsilon^n} - \int_{\boldsymbol{R}^n}(\varphi(x)-\varphi(t))K\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right)\frac{dt}{\varepsilon^n}.$$

ここで第一項は仮定 $\int_{\boldsymbol{R}^n}K(x)dx=1$ により $\varphi(x)$ に等しい．第二項の方は積分領域を $|x-t|\geq\sqrt{\varepsilon}$ と $|x-t|\leq\sqrt{\varepsilon}$ に分けてみれば，前者の絶対値は $2\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|\varphi(x)|\int_{|t|\geq 1/\sqrt{\varepsilon}}|K(t)|dt$ で抑えられ，これは $K(x)$ の絶対積分可能性により，$\varepsilon\downarrow 0$ とともに 0 に近づく．また後者は $\sup_{|x-t|\leq\sqrt{\varepsilon}}|\varphi(x)-\varphi(t)|\int_{\boldsymbol{R}^n}|K(t)|dt$ で抑えられるので $\varphi(x)$ の一様連続性によりやはり $\varepsilon\downarrow 0$ とともに 0 に一様収束する．

$\varphi(x)$ が C^k 級の場合，導函数の収束は部分積分により微分を積分記号下の φ の方に移せば同様にして示される．L_1 級の場合は連続函数列で近似すれば上の場合に帰する．

参考 1.4　上の議論を適当に修正すれば $\mathscr{A}\subset L_{1,loc}\subset\mathscr{D}'\subset\mathscr{B}$ を示すこともできる．実際，上の証明で φ として $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ の元をとれば参考 1.3 より $\mathscr{E}(\boldsymbol{R})$ において $\varphi_\varepsilon(x)\to\varphi(x)$ となり，分布の理論を少し御存知の読者は以後の部分を容易に読み替えることができるであろう．

例 1.3.11　区間$[a,b]$の定義函数を $\chi_{[a,b]}$ で表わそう．これを超函数とみなしたときの標準定義函数は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\log(x-z)\Big|_a^b = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{b-z}{a-z}$$

(分枝に注意せよ．) 導函数を計算すると

$$\begin{aligned}\chi'_{[a,b]}(x) &= \left[\left(\frac{1}{2\pi i}\log\frac{b-z}{a-z}\right)'\right] = \left[\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-b}-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}\right]\\ &= -\delta(x-b)+\delta(x-a).\end{aligned}$$

という予期できそうな結果を得る．ここに $\delta(x-a)$ は δ 函数の平行移動であり，その定義はおのずから明らかであろう．次に Heaviside 函数 $Y(x)$ を $L_{1,loc}(\boldsymbol{R})$ の元とみなして超函数への翻訳を試みよう．この函数の台は有界でないので分解する必要がある．例えば $Y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\chi_{[k,k+1]}(x)$ (a. e. で) とすれば

$$(1.3.9)\qquad \iota(Y) = \sum_{k=0}^{\infty}\iota(\chi_{[k,k+1]}) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\log\frac{k+1-z}{k-z}\right].$$

右辺の無限和は $\mathcal{B}$ の大域的切断としては意味を持つけれども，それは無限和 $\sum \frac{1}{2\pi i}\log\frac{k+1-z}{k-z}$ が正則函数として収束することを必ずしも意味しない．実際，この場合は発散しているのであるが，定義函数の不定性を利用して我々は次のようにこの和を収束するように調節することができる：$k\geq 1$ に対し

$$\frac{1}{2\pi i}\log\frac{k+1-z}{k-z}-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{k}$$

は $\chi_{[k,k+1]}(x)$ と同じ超函数を定める．ところが Taylor の公式からわかるように，z が $\boldsymbol{C}\setminus\overline{\boldsymbol{R}^+}$ のコンパクト部分集合を動くとき，これは z について一様に $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ となるので，k について無限和をとるとそこで一様収束する．こうして $\boldsymbol{C}\setminus\overline{\boldsymbol{R}^+}$ 上の正則函数

$$\frac{1}{2\pi i}\log\frac{1-z}{-z}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\frac{k+1-z}{k-z}-\frac{1}{k}\right) \tag{1.3.10}$$

が得られる．これを

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2\pi i}\log\frac{k+1-z}{k-z}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{k+1-z}{k-z}-\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{k}\\&=-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)+\frac{1}{2\pi i}\left\{\log(N+1-z)+\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\log\frac{k+1-z}{k-z}-\frac{1}{k}\right)\right\}\\&\quad-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

と書き直してみよう．これらの式で後の方の項はいずれも $\boldsymbol{C}\setminus[N+1,\infty[$ で正則だから，正則函数(1.3.10)または $-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)$ が定める超函数は任意の開区間 $]-\infty, N+1[$ 上で超函数(1.3.9)と一致すること，従って(1.3.10)または $-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)$ が我々の定義で $Y(x)$ に対応する超函数 $\iota(Y)$ の一つの定義函数であるここことがわかる．さて，以上の計算を振り返ってみれば最初から

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\log\frac{k+1-z}{k-z}\right]&=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2\pi i}\log\frac{k+1-z}{k-z}\right]\\&=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)+\frac{1}{2\pi i}\log(N+1-z)\right]\\&=\left[-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)\right]\end{aligned}$$

という計算をすればよかったのである．$N\to\infty$ のとき $\frac{1}{2\pi i}\log(N+1-z)$ は正則函数として 0 には収束しないが，それが定める超函数は台が $[N+1,\infty[$ に含

まれ，従って $N\to\infty$ のとき0に“収束”する(より正確には“安定化”する)のである.

さて普通の函数 $f(x)$ から上の方法で得られた超函数 $\iota(f)$ に対しては，超函数の形式的極限 $F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ は普通の意味での極限としてもとの $f(x)$ に戻ることを見よう.

定理 1.3.12 $f(x)$ を連続函数とする．超函数 $\iota(f)$ の定義函数の一つを $F_\pm(z)$ とするとき $F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)$ は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $f(x)$ に広義一様に収束する.

証明 $f(x)$ を台がコンパクトな連続函数の局所有限和に分解したとき，その一成分を $f_\lambda(x)$ とすれば，$f_\lambda(x)$ から補題 1.3.8 により計算した $G(z)$ と $F_\pm(z)$ との差は f_λ が f に等しいところでは正則につながる．故に $G(x+i\varepsilon)-G(x-i\varepsilon)$ が $\varepsilon\downarrow 0$ のとき f_λ に一様収束することを示せば十分である．そこで初めから $f_\lambda=f$ と書き

$$G(x+i\varepsilon)-G(x-i\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(\frac{1}{t-x-i\varepsilon}-\frac{1}{t-x+i\varepsilon}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}dt$$

を考察しよう．これはいわゆる Poisson 核による畳み込みであって，これが $f(x)$ に一様収束することは良く知られている．(定理 1.3.9 の後の参考 1.3 において $K(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$ の場合である.)

参考 1.5 f が L_1 級函数または Schwartz の分布のときも上の定理に相当する事実が同様に示される．ところで f が連続函数の場合，片側からの極限 $F_\pm(x\pm i\varepsilon)$ は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき必ずしも連続函数として広義一様収束しないことを注意しておこう．ただ $f(x)$ が Hölder 連続ならば(すなわちある正数 α について $|f(x)-f(t)|\leq C|x-t|^\alpha$ という良い連続性を持てば)，積分(1.3.6)で与えられる $G(z)$ に対して片側極限 $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}G(x\pm i\varepsilon)$ はそれぞれ一様収束し

$$\pm\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{p.\,v.}\int\frac{f(t)}{t-x}dt$$

を与えることが知られている (Privalov の定理と呼ばれる)．ここに，$\mathrm{p.\,v.}\displaystyle\int\frac{f(t)}{t-x}dt=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|t-x|\geq\varepsilon}\frac{f(t)}{t-x}dt$ はいわゆる Cauchy の主値である．これを $\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{f.\,p.}\frac{1}{t-x}dt$ と解釈すれば，この極限値は分布あるいは超函数の意味でも正しいものとなる.

最後に包含写像ιが微積分の諸演算と両立することを示そう.

定理 1.3.13 $\varphi\in\mathscr{A}(\Omega)$ とする.

a) $f\in L_{1,loc}(\Omega)$ に対し $\varphi\cdot\iota(f)=\iota(\varphi f)$

b) $f\in C^1(\Omega)$ に対し $\dfrac{d}{dx}\iota(f)=\iota\left(\dfrac{d}{dx}f\right)$

c) $[a,b]\subset\Omega$ とし, f が端点 a, b の近傍で実解析的ならば

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \iota(f)dx.$$

証明 a) 両辺とも積は局所的に定まるので f の台が$[a, b]$に入っているときに調べれば十分である. $\iota(f)=[G(z)]$, $G(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_a^b\frac{f(x)}{x-z}dx$ であるから

$$\varphi\cdot\iota(f)=[\varphi(z)G(z)]=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(x)\varphi(z)}{x-z}dx\right]$$
$$=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(x)\varphi(x)}{x-z}dx\right]+\left[\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(x)(\varphi(z)-\varphi(x))}{x-z}dx\right]$$

最後の辺の第一項は超函数 $\iota(\varphi f)$ を定める. 第二項の括弧内は$[a, b]$の近傍で正則な函数を与えるので, 超函数としては0を定める.

b) 同じく f の台は$[a, b]$に含まれるとし, $\iota(f)=[G(z)]$と仮定して

$$\frac{d}{dx}\iota(f)=\left[\frac{d}{dz}G(z)\right]=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(x)}{(x-z)^2}dx\right]$$
$$=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x-z}\right)dx\right]$$
$$=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f'(x)}{x-z}dx\right]=\iota\left(\frac{df}{dx}\right).$$

c) まず f が$[a, b]$の近傍で実解析的のときを考える. このとき定理 1.3.2 の包含写像の定義により $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\iota(f)dx$ は明らかである. 次に f の台が$[a, b]$に含まれているときを考える. $\iota(f)=[G(z)]$, $G(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_a^b\frac{f(x)}{x-z}dx$ であり, $[a, b]$を正の向きに一周する閉路γをとれば, 定積分の定義より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\iota(f)dx=-\oint_\gamma G(z)dz$$
$$=\int_a^b f(x)dx\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{dz}{z-x}$$
$$=\int_a^b f(x)dx$$

となる．積分順序の変更は絶対収束性より許される．最後に f が端点の近く $[a, a+2\delta]$，$[b-2\delta, b]$ で実解析的な一般の場合を考える．まず普通の意味で

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(x)f(x)dx$$

故に既に述べたところにより，これは超函数の意味での積分

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \iota(\chi_{[a,b]}(x)f(x))dx$$

に等しい．さて区間に関する加法性により，これは

$$= \int_{-\infty}^{a+\delta} \iota(\chi_{[a,b]}(x)f(x))dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} \iota(\chi_{[a,b]}(x)f(x))dx + \int_{b-\delta}^{\infty} \iota(\chi_{[a,b]}(x)f(x))dx$$

と書き直されるが，まず第二項は被積分超函数 $\iota(\chi_{[a,b]}(x)f(x))$ が積分区間 $[a+\delta, b-\delta]$ の近傍では $\iota(f)$ に等しいことから $\int_{a+\delta}^{b-\delta} \iota(f)dx$ と書き直される．次に，例えば，第一項が $\int_a^{a+\delta} \iota(f)dx$，すなわち $\int_a^{a+\delta} f(x)dx$ に等しいことを見よう．この被積分超函数は，積分区間の近傍では $\iota(\chi_{[a,a+2\delta]}(x)f(x))$，すなわち $f(x)\cdot\iota(\chi_{[a,a+2\delta]}(x))$ に等しいことに注意せよ．ここで $f(x)$ は区間 $[a, a+2\delta]$ で実解析的なことから既に証明した定理の主張 a) を用いた．故に結局

$$\int_{-\infty}^{a+\delta} f(x)\iota(\chi_{[a,a+2\delta]}(x))\,dx = \int_a^{a+\delta} f(x)dx$$

をいえばよい．左辺は例 1.3.11 を用いて

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x)\iota(\chi_{[a,a+2\delta]}(x))dx$$
$$= \int_{\gamma_+} f(z)\frac{1}{2\pi i}\log\frac{a+2\delta-z}{a-z}dz - \int_{\gamma_-} f(z)\frac{1}{2\pi i}\log\frac{a+2\delta-z}{a-z}dz$$

と変形される．ここに $\gamma_\pm$ は $a-\delta$, $a+\delta$ を結ぶ上および下半平面の道である．ここで特に

$$\gamma_\pm = \{a-\delta\pm ti; 0\le t\le\varepsilon\} \cup \{t\pm i\varepsilon; a-\delta\le t\le a+\delta\} \cup \{a+\delta\pm ti; 0\le t\le\varepsilon\}$$

ととろう．$\varepsilon\downarrow 0$ とするとき，上の積分の一番目と三番目の線分に対応する部分は $\log\left(\frac{a+2\delta-z}{a-z}\right)$ がそこで正則なことから明らかに 0 に収束する．残りの部分が $\int_a^{a+\delta} f(x)dx$ に収束することを見よう．(Lebesgue の収束定理を既知の読者は参考 1.5 に鑑み以下の証明を飛ばされよ．)

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(t+i\varepsilon)\frac{1}{2\pi i}\log\frac{a+2\delta-t-i\varepsilon}{a-t-i\varepsilon}dt\right.$$
$$\left.-\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(t-i\varepsilon)\frac{1}{2\pi i}\log\frac{a+2\delta-t+i\varepsilon}{a-t+i\varepsilon}dt\right\}$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(t)\frac{1}{2\pi i}\left\{\log\frac{a+2\delta-t-i\varepsilon}{a-t-i\varepsilon}-\log\frac{a+2\delta-t+i\varepsilon}{a-t+i\varepsilon}\right\}dt$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(t)\frac{1}{2\pi i}\left\{i\arg(a-t+i\varepsilon)-i\arg(a-t-i\varepsilon)\right.$$
$$\left.+\log\frac{a+2\delta-t-i\varepsilon}{a+2\delta-t+i\varepsilon}\right\}dt$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(t)\frac{1}{\pi}\arg(a-t+i\varepsilon)dt$$

となる．ここで $x\to 0$ のとき $x\log x\to 0$ 等を用い一様収束と積分との順序交換可能性を用いている．さて $\varepsilon\downarrow 0$ のとき log の分枝の定め方により $\frac{1}{\pi}\arg(a-t+i\varepsilon)\to Y(t-a)$ である．ここで $Y(t-a)$ は $t\geq a$ で 1，$t<a$ で 0 に等しい $L_{1,loc}$ $(\boldsymbol{R})$ の函数を表わしている．これは一様収束ではないのでさらに次のように変形しよう．

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a-\delta}^{a-\sqrt{\varepsilon}} f(t)\frac{1}{\pi}\arg(a-t+i\varepsilon)dt+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a-\sqrt{\varepsilon}}^{a+\sqrt{\varepsilon}} f(t)\frac{1}{\pi}\arg(a-t+i\varepsilon)dt$$
$$+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\sqrt{\varepsilon}}^{a+\delta} f(t)\frac{1}{\pi}\arg(a-t+i\varepsilon)dt.$$

ここで真中の項は被積分函数が有界なことから 0 に収束する．また第一項，第三項においては

$$\left|\frac{1}{\pi}\arg(a-t+i\varepsilon)-Y(t-a)\right|\leq c\sqrt{\varepsilon}$$

となるので，それぞれ 0 および $\int_a^{a+\delta} f(t)dt$ に収束する．証了[注1)]

問 1.3.3　方程式 $x\cdot u(x)=1$ の超函数解をすべて求めよ．

§4 脆　弱　性

以上のように我々は超函数というものが一般の函数の（更には Schwartz の分布の）拡張概念であって微積分の演算が自由に行なえるものであることを知

った．この外に超函数には更にもう一つ，始めの定義域から自由に延長できるという著しい性質がある．この性質はSchwartzの分布には無かったもので，これに対する超函数の優位性を示すものとして常に引合いに出される．まず延長の可能性の概念の厳密な定義から始めよう．

定義 1.4.1 位相空間 X 上の層 $\mathscr{F}$ が**脆弱** (flabby) であるとは任意の開集合 $U\subset X$ に対し制限写像 $\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(U)$ が全射となることをいう．

つまり与えられた任意の切断 $f\in\mathscr{F}(U)$ に対し新しい切断 $g\in\mathscr{F}(X)$ で f の延長となっているもの，すなわち $g|_U=f$ を満たすものを見出すことができるということである．このとき任意の開集合の対 $U\supset V$ に対し $\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$ も全射となることは明らかであろう．

定理 1.4.2 超函数の層 $\mathscr{B}$ は脆弱である．

これは既に仮定した定理 1.1.3 を用いれば次のように容易に証明できる：$\Omega\subset\boldsymbol{R}$ を開集合とする．$\mathscr{B}(\Omega)$ は定理 1.1.3 によれば Ω の任意の複素近傍 U を用いて商空間 $\mathscr{O}(U\setminus\Omega)/\mathscr{O}(U)$ として表現できるのであった．そこで今 U として $\boldsymbol{C}\setminus\partial\Omega$ をとる．($\partial\Omega$ は $\boldsymbol{R}$ における Ω の境界である．) この表現において，$f\in\mathscr{B}(\Omega)$ を代表する元 $F(z)\in\mathscr{O}(U\setminus\Omega)$ をとろう．$U\setminus\Omega=\boldsymbol{C}\setminus\bar{\Omega}$ に注意すれば，$F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ は $\boldsymbol{R}$ 上の一つの超函数 g で台が $\bar{\Omega}$ に含まれるものを定めると考えることができる．明らかに $g|_\Omega=f$ であり，従って台が最小の延長が得られた．証了．

例 1.4.3 $x>0$ で定義された超函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta(x-a_k)$$

を考えよう．ここに $\{a_k\}$ は単調減少に 0 に収束する正数列とする．無限和は $x>0$ で局所有限なので意味がある．(例 1.3.11 でも述べたようにそのことは必ずしも $\delta(x-a_k)$ の標準定義函数 $-\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{z-a_k}$ の和が収束することを意味しない．) さて，台が $x\geq0$ に含まれる $f(x)$ の全空間への延長 $g(x)$ を求めよう．これは結局 $\delta(x-a_k)$ の適当な定義函数を選んで，それらの無限和が $\boldsymbol{C}\setminus\overline{\boldsymbol{R}^+}$ で広義一様収束するように調節する計算になる．$x\neq0$ では $g(x)$ は定まっているので，調節できるのは原点以外で正則な函数だけである．そこで

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a_k}=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\frac{1}{1-a_k/z}$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\left\{1+\frac{a_k}{z}+\cdots+\frac{a_k{}^{N_K}}{z^{N_K}}+\frac{a_k{}^{N_K+1}}{z^{N_K+1}}\frac{1}{1-a_k/z}\right\}$$

と変形する．$a_k\to 0$ なので自然数列$\{N_k\}$を適当に選べば $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k{}^{N_k+1}}{z^{N_k+1}}$ が $|z|\neq 0$ において広義一様収束するようにできる．(例えば $N_k=k$ なら十分である．)

$$G(z)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-a_k}-\frac{1}{z}\left(1+\frac{a_k}{z}+\cdots+\frac{a_k{}^{N_k}}{z^{N_k}}\right)\right\}$$

とおけば級数は $\boldsymbol{C}\setminus\overline{\{a_k\}}$ において広義一様に収束し，従って$\overline{\{a_k\}}$に台を持つ一つの超函数 $g(x)\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ を定める．これが f の延長となっていることは級数を途中で二つに分ける例の技法によりすぐわかる．

問 1.4.1　$x>0$ 上の函数 $e^{1/x}$ を台が $x\geq 0$ に含まれるように $x\leq 0$ に超函数として延長してみよ．

層の脆弱性には，たとえば次のような応用がある．これは Schwartz の分布における 1 の分解の代用となるが，端の変更のための幅を必要としない点で，はるかに強力である．

補題 1.4.4　$\mathcal{F}$ を位相空間 X 上の脆弱層とする．切断 $f\in\mathcal{F}(U)$ の台が，$\mathrm{supp}\,f=E_1\cup E_2$ と二つの閉集合の和になっているならば，$\mathrm{supp}\,f_j\subset E_j$ なる $f_j\in\mathcal{F}(U)$, $j=1,2$ を適当に選び $f=f_1+f_2$ と分解できる．更に一般に $\mathrm{supp}\,f=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ と閉集合の局所有限和になっているときも，同様の分解 $f=\sum_{\lambda\in\Lambda}f_\lambda$, $\mathrm{supp}\,f_\lambda\subset E_\lambda$, が可能である．

証明
$$f_1=\begin{cases}f, & U\setminus E_2 \text{ の上で,}\\ 0, & U\setminus E_1 \text{ の上で}\end{cases}$$

とおけば，これは共通部分 $(U\setminus E_1)\cap(U\setminus E_2)=U\setminus(E_1\cup E_2)$ においてともに

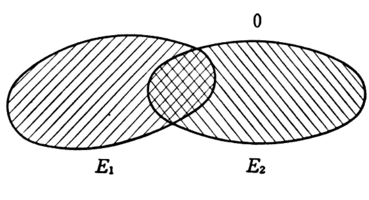


図 1.7

0 でつながっており，従って和集合 $(U\setminus E_1)\cup(U\setminus E_2)=U\setminus(E_1\cap E_2)$ 上の切断を定める．$\mathscr{F}$ の脆弱性によりこれを適当に U 全体に延長したものを改めて f_1 と書こう．このとき $\mathrm{supp}\, f_1\subset E_1$ であり，また $f_2=f-f_1$ とおけば明らかに $\mathrm{supp}\, f_2\subset E_2$ でもある．一般の場合はこれを順番にやってゆけばよい．

C^∞ 級函数は一般の超函数に掛けることはできない．一方，実解析函数にはコンパクトな台を持つものが 0 しかないので，たとえ端の変更のための幅を許容したとしても，Schwartz の分布のように 1 の分解を用いて超函数の台を標準的な方法でコンパクトに切り落とすわけにはゆかない．1 の分解に慣れた者にはそのことは最初不便に感じられるかもしれないが，超函数の演算を徹底的に調べてゆけば上の補題のような切り方で十分実用になることが追々納得されるであろう．

問 1.4.2　超函数 $\dfrac{1}{x+i0}$ を台が $x\geq 0$ に含まれるものと $x\leq 0$ に含まれるものとの和に分解せよ．このような分解の不定性は何か？

§5　基本的定理の証明

以下二つの開集合 U, V に対し記号 $V\Subset U$ は $\bar{V}$ が U 内のコンパクト集合となることを意味する．（これを V が U にコンパクトに含まれるともいう．）

次の補題はまさに基本的である．

補題 1.5.1　U_j, $j=0,1$ を $\boldsymbol{C}$ の二つの開集合とする．$F(z)\in\mathcal{O}(U_0\cap U_1)$ が与えられたとき，$F_j(z)\in\mathcal{O}(U_j)$, $j=0,1$ で

$$F_1(z)-F_0(z)=F(z)\qquad (U_0\cap U_1 \text{ の上で}) \tag{1.5.1}$$

となるものが存在する．

証明　最初に，U_j が有界で区分的に滑らかな境界を持ち，しかも $F(z)$ が $\overline{U_0\cap U_1}$ の近傍で正則な場合を考えよう．γ_j, $j=0,1$ をそれぞれ ∂U_j の $\overline{U_{1-j}}$ 内に在る弧とし，$\gamma_1-\gamma_0$ が正の向きに一周する閉曲線となるように向きをつける．（図1.8 を見よ．）

$$F_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\qquad j=0,1 \tag{1.5.2}$$

とおこう．これが (1.5.1) を満たしていることは Cauchy の積分定理により明

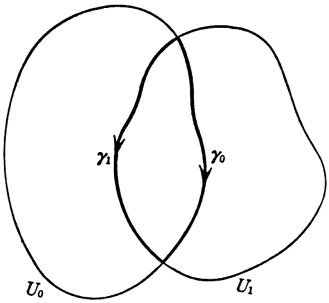


図 1.8

らかである.

さて，一般の場合には各 $U_j, j=0,1$ の中に開部分集合の取り尽し増大列 $U_{j,k}, k=1,2,\cdots$(すなわち $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{j,k}=U_j$ となるもの)を，$U_{j,k+1}\supseteq U_{j,k}$ かつ $U_{j,k}$ は区分的に滑らかな境界を持ち，そして最後にこれが一番大事な仮定であるが，各 k について $U_0\cup U_1$ と $U_{0,k}\cup U_{1,k}$ とが Runge 対をなすように取る(参考 1.6 を見よ). $F(z)|_{U_{0,k}\cap U_{1,k}}$ に上の構成法をあてはめて $F_{j,k}(z)\in\mathcal{O}(U_{j,k})$ による分解

$$F_{1,k}(z)-F_{0,k}(z) = F(z) \qquad (U_{0,k}\cap U_{1,k}\text{ の上で})$$

を得る. 故に隣り合う k について差をとれば,

$$F_{0,k+1}(z)-F_{0,k}(z) = F_{1,k+1}(z)-F_{1,k}(z) \qquad (U_{0,k}\cap U_{1,k}\text{ の上で})$$

となり，この両辺でもって $U_{0,k}\cup U_{1,k}$ 上の正則函数 $G_k(z)$ が定まる. Runge の近似定理により $H_k(z)\in\mathcal{O}(U_0\cup U_1)$ を

$$|G_k(z)-H_k(z)| \le \frac{1}{2^k} \qquad (U_{0,k-1}\cup U_{1,k-1}\text{ の上で})$$

を満たすように選び

$$F_j(z) = F_{j,1}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}(G_k(z)-H_k(z)), \qquad j=0,1$$

とおこう. 例の変形法:

$$F_j(z) = F_{j,N}(z)+\sum_{k=N}^{\infty}(G_k(z)-H_k(z))-\sum_{k=1}^{N-1}H_k(z)$$

により $F_j(z)\in\mathcal{O}(U_j)$, $j=0,1$ かつ等式(1.5.1)の成り立つことが確かめられる.

参考 1.6 函数論の基本定理の一つとして次の Runge の近似定理がある. $U\supset V$ を

$\boldsymbol{C}$ の二つの開集合の対とし $\boldsymbol{P}^1\setminus V$ の各連結成分は必ず $\boldsymbol{P}^1\setminus U$ と交わるとする．このとき $\mathcal{O}(V)$ の任意の元は，$\mathcal{O}(U)$ の元より成るある函数列の，V における広義一様収束極限となる．$U=\boldsymbol{C}$ で V がいわゆる単連結領域の場合が古典的な Runge の多項式近似定理であり，上の形の拡張もこれと同じ方針で証明できる．（実際にはもっと強く，$\mathcal{O}(V)$ の元は U 内に極を持たない有理函数の列の広義一様収束極限となることが示される．普通の函数論の教科書にはこの形で載っていることが多い．）なお，上の近似定理の仮定を満たす開集合の対 $U\supset V$ を Runge 対という．

定理 1.1.3 の証明　Ω の二つの複素近傍 $U\supset V$ に対し，$\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)\to\mathcal{O}(V\setminus\Omega)/\mathcal{O}(V)$ が全射となることを示すのが残っていた．$F(z)\in\mathcal{O}(V\setminus\Omega)$ を取ろう．$U_1=U\setminus\Omega$, $U_0=V$ として上の補題を適用すれば $F_1(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$, $F_0(z)\in\mathcal{O}(V)$ で $U_0\cap U_1=V\setminus\Omega$ 上 $F_1(z)-F_0(z)=F(z)$ を満たすものが得られる．すると $[F_1(z)]\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)$ であり，上の制限写像によりこれは $\mathcal{O}(V\setminus\Omega)/\mathcal{O}(V)$ の元 $[F_1(z)|_{V\setminus\Omega}]=[F(z)+F_0(z)]=[F(z)]$ にゆく．証了．

定理 1.2.4 の証明　F II の検証が残っていた．$\{\Omega_\lambda\}$ を Ω の開被覆とし，両立条件を満たす局所切断 $f_\lambda\in\mathcal{B}(\Omega_\lambda)$ たちが与えられたとき，Ω 上でこれらをつなぐのである．各 $f_\lambda\in\mathcal{B}(\Omega_\lambda)$ は $F_\lambda(z)\in\mathcal{O}(U_\lambda\setminus\Omega_\lambda)$ で定義されるとしよう．ここに U_λ は Ω_λ の複素近傍である．$\bigcup_\lambda U_\lambda=U$ とおく．$\boldsymbol{C}$ はパラコンパクトな位相空間だから，必要なら細分をとることにより $\{\Omega_\lambda\}$, $\{U_\lambda\}$ は局所有限な被覆と仮定してよい．両立条件 $f_\lambda|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}=f_\mu|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}$ は $F_{\lambda\mu}=F_\mu-F_\lambda\in\mathcal{O}(U_\lambda\cap U_\mu)$ となることを意味する．ここで $F_{\lambda\mu}=0$ なら定義函数を直ちにつなぎ合わせることができるわけであるが，一般にはそうならないので定義函数を適当にとり替えてそれを実現しよう．この二重添字を持った函数の族 $\{F_{\lambda\mu}\}$ は明らかに次の二性質を満たす：

$$\text{(1.5.3)}\qquad \begin{cases} F_{\lambda\mu}=-F_{\mu\lambda}, \\ F_{\lambda\mu}+F_{\mu\nu}+F_{\nu\lambda}=0 \qquad (U_\lambda\cap U_\mu\cap U_\nu\ \text{の上で}). \end{cases}$$

（このとき $\{F_{\lambda\mu}\}$ は一次の**余輪体**(cocycle)であるという．）さて次の補題 1.5.2 を用いると，このとき函数の族 $G_\lambda\in\mathcal{O}(U_\lambda)$ で

$$\text{(1.5.4)}\qquad F_{\lambda\mu}=G_\mu-G_\lambda \qquad (U_\lambda\cap U_\mu\ \text{の上で})$$

となるものを見出すことができる．すると

$$F_\mu - F_\lambda = G_\mu - G_\lambda \qquad (U_\lambda \cap U_\mu \text{ の上で})$$

従って

$$F_\lambda - G_\lambda = F_\mu - G_\mu \qquad ((U_\lambda \setminus \Omega_\lambda) \cap (U_\mu \setminus \Omega_\mu) \text{ の上で})$$

となり，これにより一つの正則函数 $F(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ が定義される．$[F_\lambda - G_\lambda] = [F_\lambda] = f_\lambda$ だから $[F(z)] \in \mathcal{B}(\Omega)$ は求める貼り合わせである．証了．

補題 1.5.2 $U \subset \boldsymbol{C}$ を開集合，$\{U_\lambda\}$ をその局所有限な開被覆とする．函数の族 $\{F_{\lambda\mu}(z) \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu)\}$ で余輪体の条件 (1.5.3) を満たすものが与えられたとき，函数の族 $\{G_\lambda(z) \in \mathcal{O}(U_\lambda)\}$ で (1.5.4) を満たすものが存在する．

証明 最初に有限被覆の場合を考える．$N=2$ のときは補題 1.5.1 に外ならない．帰納法により $N-1$ 個の成分を持つ被覆までは正しいとし，N 個の成分をもつ被覆 $\{U_j\}_{j=1}^{N}$ を考えよう．$\{U_j\}_{j=1}^{N-1}$ に対して帰納法の仮定を適用し，$\{F_j \in \mathcal{O}(U_j)\}_{j=1}^{N-1}$ を得たとする．$1 \leq j, k \leq N-1$ に対し

$$F_k - F_j = F_{jk} \qquad (U_j \cap U_k \text{ の上で}) \tag{1.5.5}$$

となっている．$V = \bigcup_{j=1}^{N-1} U_j$ とおくとき，$V \cap U_N$ 上の正則函数 $G(z)$ が

$$G(z) = F_{jN}(z) + F_j(z) \qquad (U_j \cap U_N \text{ の上で})$$

により定義される．実際，余輪体の条件と (1.5.4) とにより，この定義は次のように共通部分 $U_j \cap U_k \cap U_N$ 上で両立している．

$$\begin{aligned}(F_{kN} + F_k) - (F_{jN} + F_j) &= (F_{kN} - F_{jN}) + (F_k - F_j) \\ &= -F_{jk} + F_{jk} = 0.\end{aligned}$$

故に $G(z)$ は $V \cap U_N$ 上の正則函数となる．この函数について組 (V, U_N) に再び補題 1.5.1 を適用し

$$G(z) = G_N(z) - H(z); \qquad G_N(z) \in \mathcal{O}(U_N),\ H(z) \in \mathcal{O}(V)$$

という分解を得たとせよ．

$$G_j(z) = F_j(z) + H(z), \qquad j = 1, \cdots, N-1$$

と最終的に調節すれば $\{G_j(z)\}_{j=1}^{N}$ が求める解答である．実際 $U_j \cap U_N$ 上で

$$G_N - G_j = (G_N - H) - F_j = G - F_j = (F_{jN} + F_j) - F_j = F_{jN}$$

が成立している．

次に一般の場合を考える．開集合の取り尽し増大列 $V_n \nearrow U$ を，$V_{n+1} \Supset V_n$ かつ各 (U, V_n) が Runge 対となっているように選ぶ．$\{U_\lambda\}$ は局所有限被覆なの

で，固定した各 n に対し V_n と交わる元は有限個しかない．そのような元 U_λ に対し上で示したところにより $\{F_{\lambda,n}\in\mathcal{O}(U_\lambda)\}$ を選ぶ．話をすっきりさせるため，これら以外の U_λ に対しては $F_{\lambda,n}=0$ と定めよう．条件(1.5.4)が V_n の上では成り立っているため $F_{\lambda,n+1}(z)-F_{\lambda,n}(z)$ は V_n 上で一つの正則函数 $H_n(z)$ につながる．Runge の定理により $K_n(z)\in\mathcal{O}(U)$ を

$$|H_n(z)-K_n(z)|\le 1/2^n, \qquad (V_{n-1}\text{ の上で})$$

となるように選ぼう．

$$G_\lambda = F_{\lambda,1}+\sum_{n=1}^{\infty}(F_{\lambda,n+1}-F_{\lambda,n}-K_n)$$

とおけば，例の変形 $G_\lambda(z)=F_{\lambda,N}+\sum_{n=N}^{\infty}(H_n-K_n)-\sum_{n=1}^{N-1}K_n$ により級数が U_λ 上広義一様収束し，$G_\lambda\in\mathcal{O}(U_\lambda)$ となることがわかる．ここで V_N が U_λ, U_μ の双方と交わるように N を大きくとっておけば $G_\lambda-G_\mu=F_{\mu\lambda}$ も確かめられる．証了．

参考 1.7　函数の族 $\{F_\lambda\in\mathcal{O}(U_\lambda)\}$，$\{F_{\lambda\mu}\in\mathcal{O}(U_\lambda\cap U_\mu)\}$ は被覆 $\{U_\lambda\}$ に対する0次及び1次の $\mathcal{O}$-係数**余鎖**と呼ばれる．0次の余鎖から $F_{\lambda\mu}=F_\mu-F_\lambda$ とおくことにより1次の余鎖が得られるが，これを $\{F_\lambda\}$ の**余境界**と呼び $\delta\{F_\lambda\}$ で表わす．余境界は明らかに余輪体となる，すなわち(1.5.3)を満たすが，その逆は少しも明らかではない．余輪体の全体と余境界の全体との差は商空間により表現されて一般に**コホモロジー群**と呼ばれるものになるが，補題1.5.2は一変数の場合にこの差が存在しないことを示している．すなわち1次元コホモロジー群の消滅を主張している．以上は本書の後半において多変数の場合に展開される重要な理論の特別な場合となっている．

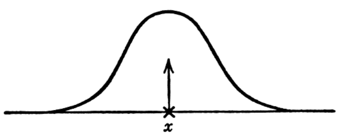
§6　特異スペクトル

実解析函数というのは実軸から複素近傍に解析接続できる函数のことであった．さて超函数の境界値表示 $f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ を逆に実軸の方から見れば，これは超函数，従って特に普通の函数というものが実軸の上方 $y>0$ のみに解析接続できる成分 $F_+(x+i0)$ と下方 $y<0$ のみに解析接続できる成分 $F_-(x-i0)$ の二つの合成になっていると解釈できる．こうして函数の解析性を更に半分ずつ精密化した次の概念に達する．

定義 1.6.1　$\boldsymbol{S}^0=\{\pm 1\}$ とし $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ の点 (x,ξ) を便宜上 $\left(x, \dfrac{\xi}{i}dx\infty\right)$ と記す．超函数 $f(x)$ が点 $\left(x, +\dfrac{1}{i}dx\infty\right)$ で**ミクロ解析的**(微局所あるいは超局所解析的)

とは，x の適当な複素近傍 U をとるとき f の一組の定義函数 $F_{\pm}(z)$ がともに x の上半近傍 $U_{+}=U\cap\{\mathrm{Im}\,z>0\}$ に解析接続できることをいう．(従って実質的には $F_{-}(z)$ の方が x のある近傍に解析接続できることをいう．) 点 $\left(x, -\frac{1}{i}dx\infty\right)$ におけるミクロ解析性も $U_{-}=U\cap\{\mathrm{Im}\,z<0\}$ を用いて同様に定義される．

上の定義を標語的にいえば，超函数 $f(x)$ が点 $\left(x, \frac{\xi}{i}dx\infty\right)$ で，ミクロ解析的とは $f(x)$ が $x+iy0$, $\langle\xi, y\rangle>0$ なる点に解析接続できるということである．ここに $\xi=1$ 又は -1 であり，これに応じて $\langle\xi, y\rangle=y$, または $\langle\xi, y\rangle=-y$ となる．$x+iy0$ (あるいは $x-iy0$) というのは点 x の上(あるいは下)無限小半近傍の点を表わしている．つまり $iy0$ は長さを無限小に正規化した，点 x における接ベクトルである．$\left(x, \frac{\xi}{i}dx\infty\right)$ という表記に $\frac{1}{i}dx\infty$ というアクセサリーが付いているのは $iy0$ に対するこの双対性を表わしている，というふうに解釈することができる．(もっともこれは Fourier 変換の指数部の位相の符号の決め方と同じで結局はどちらでもよく，あまり深刻に考えるには及ばない．) この辺の事情は多変数の超函数を考察するときもっと良くわかるようになるであろう．考える空間にもアクセサリーを付けて $\boldsymbol{R}\times\frac{1}{i}\boldsymbol{S}_{\infty}^{*0}$ と書くことがある．実用上



$f(x)$ は $(x, \frac{1}{i}dx\infty)$ で解析的　**図 1.9**

は $\pm\frac{1}{i}dx\infty$ を $\mp idx\infty$ と書いても一向差支えない．その方が簡単なので本書も以下そうすることにする．定義から明らかに f がミクロ解析的な点たちは $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ の開集合をなす．故にその補集合は (f の定義域内の) 閉集合である．

定義 1.6.2　f がミクロ解析的でない点の集合を f の**特異スペクトル**といい S. S. f で表わす．

S. S. f は $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ の部分集合であることに注意せよ．$\pi:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0\to\boldsymbol{R}$ を自然な射影写像とすれば明らかに次が成り立つ．

系 1.6.3　$\pi(\mathrm{S.\,S.}\,f)=\mathrm{sing\,supp}\,f$.

系 1.6.4　実解析係数の線型微分作用素 (1.1.6) は超函数の特異スペクトル

を増やさない.

例 1.6.5　$\mathrm{S.S.}\,\delta=\{0\}\times\{\pm idx\infty\}$

$$\mathrm{S.S.}\,Y=\{0\}\times\{\pm idx\infty\}$$

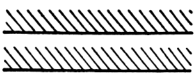
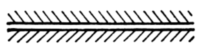
$$\mathrm{S.S.}\,\frac{1}{x+i0}=\{(0,+idx\infty)\}\qquad(\text{一点})$$

特異スペクトルの概念の一つの応用として超函数の積について考えよう.

定理 1.6.6　f,g を二つの超函数とし，$\mathrm{S.S.}\,f$ と $\mathrm{S.S.}\,g$ は互いに対蹠点の関係にある点対を含まないとする.（即ち，$(x,i\xi dx\infty)\in\mathrm{S.S.}\,f$，$(x,-i\xi dx\infty)\in\mathrm{S.S.}\,g$ となることはないと仮定する.）このとき積 fg が定義でき，次の関係を満たす.

$$\mathrm{S.S.}\,fg\subset\mathrm{S.S.}\,f\cup\mathrm{S.S.}\,g \tag{1.6.1}$$

証明　$f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$，$g(x)=G_+(x+i0)-G_-(x-i0)$ とする. 積 fg は局所的に正しく定義できればよい. すると次の二つの典型的な場合が考えられる.

	第1型		第2型	
$\mathrm{S.S.}\,f$	$\not\ni(x,-idx\infty)$		$\not\ni(x,\pm idx\infty)$	
$\mathrm{S.S.}\,g$	$\not\ni(x,-idx\infty)$		一般	
fg	$(F_+G_+)(x+i0)$		$(FG_+)(x+i0)-(FG_-)(x-i0)$	

上の表において，第1型の場合は下側の成分を解析接続して上側の成分に繰り込むことにより f も g も共に上側だけからの境界値 $F_+(x+i0)$，$G_+(x+i0)$ で表現されていると仮定できる. このとき積 fg は $F_+(z)G_+(z)$ の上側からの境界値として定義され(1.6.1)は明らかに成り立っている. 第2型においては f の方が実解析函数となるから§1で既に定義した積となり，やはり(1.6.1)が成り立つ. 以上の積の定義が定義函数のとり方によらず，従って局所的な定義が全体として両立的につながることは明らかであろう. 証了.

積の定義から次のこともわかる.

系 1.6.7　上で定義された積は可換であり，導函数の計算において Leibniz の公式を満たす. また任意の二つの因子の対が上記定理の仮定を満たしていれば結合律も成り立つ.

積の典型的な例として $\dfrac{1}{(x+i0)^m}=\left(\dfrac{1}{x+i0}\right)^m$ がある. これについて

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(x+i0)^m}=\frac{-m}{(x+i0)^{m+1}}$$

という計算が $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x+i0}=-\dfrac{1}{(x+i0)^2}$ のみを既知として定義函数に戻らず形式的に可能となる.

次の定理は一変数の場合は明らかであるが，解析接続の一意性を超局所的に翻訳したものとして重要な意味を持っている.

定理 1.6.8 超函数 f が $\mathrm{supp}\, f\subset\{x\geq 0\}$ かつ $0\in\mathrm{supp}\, f$ を満たせば $(0, \pm i dx\infty)\in \mathrm{S.S.}\, f$ となる.

参考 1.8 異なる方向からの境界値の積，例えば $\dfrac{1}{x+i0}\cdot\dfrac{1}{x-i0}$ などは一般に意味が無い. ところで物理学者は時に

$$\delta(x)\ \mathrm{f.\,p.}\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}\delta'(x)$$

という公式を用いるそうである. これを我々の立場から見てみると

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right)\\&=-\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{(x+i0)^2}-\frac{1}{(x-i0)^2}+\frac{1}{x+i0}\cdot\frac{1}{x-i0}-\frac{1}{x-i0}\cdot\frac{1}{x+i0}\right)\end{aligned}$$

となり不合理な二項が丁度打ち消し合って（無限大の繰り込み？）合理的な量 $-\dfrac{1}{2}\delta'(x)$ が残るという仕掛けになっている. こういうことをすると積の結合律が成立しなくなる. 例えば

$$\begin{aligned}(x\delta(x))\ \mathrm{f.\,p.}\frac{1}{x}&=0\times\mathrm{f.\,p.}\frac{1}{x}=0\\&\mp x\left(\delta(x)\ \mathrm{f.\,p.}\frac{1}{x}\right)=x\left(-\frac{1}{2}\delta'(x)\right)=\frac{1}{2}\delta(x).\end{aligned}$$

しかし，$\mathcal{B}$ にこのような形式的な積をどんどん付け加えて自由生成することによって得られる非可換な多元環をあらかじめ用意しておき，上の拡張された積をこの中での積と考え，無限大の繰り込みは最後の段階だけで行なうようにすれば，正しい(？)計算が得られる:

$$\begin{aligned}&((x+i0)\delta(x))\ \mathrm{f.\,p.}\frac{1}{x}\\&=\left\{(x+i0)\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)\right\}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right)\\&=\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(1-\frac{x+i0}{x-i0}\right)\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right)\\&=\left(-\frac{1}{4\pi i}\right)\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}+\frac{1}{x-i0}-\frac{x+i0}{(x-i0)^2}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{1}{4\pi i}\right)\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta(x).$$

(途中の $\dfrac{x+i0}{x-i0}$ を1でおき換えてしまうと上と同じ不合理な式に導びかれてしまうことに注意せよ.) この計算は x を $x-i0$ と解釈しても同じ結果を与える[注2].

次に座標変換について述べよう. 簡単な座標変換 $\delta(x-a)$, $Y(-x)$ 等は既に断わり無しに使用して来たがここで厳密な定義を与えることにする. $\Omega, \tilde{\Omega}$ を $\boldsymbol{R}$ の二つの開集合とする. 実解析函数 $\tilde{x}=\Phi(x)$ が Ω を $\tilde{\Omega}$ の上に一対一に写像し Ω の上で $d\Phi/dx \neq 0$ となっているとき, Φ は Ω から $\tilde{\Omega}$ への実解析的同型写像であるという. あるいは $\tilde{x}=\Phi(x)$ により開集合 $\tilde{\Omega}$ の上に新しい座標 x が入れられたものと見て, これを実解析的な座標変換ともいう. このとき, 逆向きの線型写像 $\Phi^*: \mathcal{B}(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{B}(\Omega)$, すなわち超函数に対する座標変換が次のようにして定まる: まず Φ は解析函数だから Ω のある複素近傍 U から $\tilde{\Omega}$ のある複素近傍 $\tilde{U}$ の上への一対一双正則写像に延張できる. これを同じ文字 $\Phi(z)$ で表わそう. $f(\tilde{x})=F_+(\tilde{x}+i0)-F_-(\tilde{x}-i0) \in \mathcal{B}(\tilde{\Omega})$ をとる. ここで $d\Phi/dx$ の符号により場合が分れる. Ω 上で $d\Phi/dx>0$ ならば $\tilde{z}=\Phi(z)$ により $\tilde{U}^+$ は U^+ に, $\tilde{U}^-$ は U^- に写るが, $d\Phi/dx<0$ ならば $\tilde{U}^+$ は U^- に, $\tilde{U}^-$ は U^+ に写る. これらはそれぞれ向きを保つ変換, および向きを逆にする変換といわれる.

定義 1.6.9 $d\Phi/dx>0$ のときは

$$\Phi^*f = F_+(\Phi(x+i0)) - F_-(\Phi(x-i0))$$

と定める. 定義函数は $F_\pm(\Phi(z))(\pm\mathrm{Im}\, z>0)$ である. また $d\Phi/dx<0$ のときは

$$\Phi^*f = F_+(\Phi(x-i0)) - F_-(\Phi(x+i0))$$

と定める. 定義函数は $-F_\mp(\Phi(z))(\pm\mathrm{Im}\, z>0)$ である.

普通は直観を重視して $\Phi^*f(x)$ の代わりに $f(\Phi(x))$ と書く. 例えば $\delta(x-a)$ は $\tilde{x}=x-a$ という向きを保つ変換で $\delta(\tilde{x})$ の定義函数 $-\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{\tilde{z}}$ から得られる正則函数 $-\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{z-a}$ により定まる. $Y(-x)$ は $\tilde{x}=-x$ という向きを逆にする変換で $Y(\tilde{x})$ の定義函数 $-\dfrac{1}{2\pi i}\log(-\tilde{z})$ から得られる $\dfrac{1}{2\pi i}\log z$ により定まる.

補題 1.6.10 上の座標変換は通常の函数に対するものと両立的である. また座標変換に関する微積分の通常の演算規則を満たす. すなわち

$$\frac{d}{dx}f(\tilde{x})=\frac{d}{dx}\Phi(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x). \qquad \text{(合成函数の微分)} \tag{1.6.2}$$

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)}f(\tilde{x})d\tilde{x}=\int_a^b f(\Phi(x))\frac{d}{dx}\Phi(x)dx. \tag{1.6.3}$$

また台，特異台，および特異スペクトルについて次の公式が成り立つ：

$$\operatorname{supp} f(\Phi(x))=\Phi^{-1}(\operatorname{supp} f)$$

$$\operatorname{sing\,supp} f(\Phi(x))=\Phi^{-1}(\operatorname{sing\,supp} f)$$

$$\mathrm{S.S.}\,f(\Phi(x))=\left(\Phi^{-1}\times{}^t\!\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right)(\mathrm{S.S.}\,f)$$

ここに $\Phi^{-1}\times{}^t\!\left(\dfrac{d\Phi}{dx}\right)\colon \tilde{\Omega}\times\boldsymbol{S}^0\to\Omega\times\boldsymbol{S}^0$ は点 $\tilde{x}=\Phi(x),\tilde{\xi}$ を点 $x,\xi=\dfrac{d\Phi}{dx}(x)\tilde{\xi}$ に写す写像である．

証明 公式(1.6.2), (1.6.3)は定義函数に対する微積分の公式に書き直してみれば明らかであろう．最後の諸公式も定義から明らかである．実解析函数に対する座標変換との両立性は定義から直ちに出る．一般の局所可積分函数に対してはコンパクトな台のものについて調べれば十分であるから，補題 1.3.8 で与えられる対応を思い出せば $f(\tilde{x})\longleftrightarrow G(\tilde{z})$ として

$$G(\Phi(z))=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tilde{x})}{\tilde{x}-\Phi(z)}d\tilde{x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\Phi(x))\dfrac{d}{dx}\Phi(x)}{\Phi(x)-\Phi(z)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\Phi(x))}{x-z}dx+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Phi(x))\Psi(x,z)dx.$$

ここで $\Psi(x,z)=\dfrac{\dfrac{d}{dx}\Phi(x)}{\Phi(x)-\Phi(z)}-\dfrac{1}{x-z}$ は z につき正則であり，従って第二項は超函数として 0 となる．証了．

問 1.6.1 $p,q\in\boldsymbol{C}$ に対し

$$B(p,q)=\int_{-\infty}^{\infty}x_+{}^{p-1}(1-x)_+{}^{q-1}dx \tag{1.6.4}$$

とおく (Euler の Beta 函数)．この式が意味を持つことを説明した上で次のことを示せ：
a) $B(p,q)=B(q,p)$ b) $qB(p+1,q)=pB(p,q+1)$ c) p,q が正整数のとき $B(p,q)=\dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$ d) $B(p,q)$ は $p,q\in\boldsymbol{C}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\}$ においてp, q おのおのの正則函数であることを示せ．e) $p=0,-1,-2,\cdots$ のとき $B(p,q)$ は p につき一位の極を持つことを確かめ，そこでの有限部分が再び(1.6.4)式で与えられることを確かめよ．

問 1.6.2　$s\in \boldsymbol{C}$ に対し

$$\Gamma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} x_+{}^{s-1} dx$$

とおく．（この積分は例えば $]-\infty, \varepsilon]$ の部分を超函数の意味で，$[\varepsilon, \infty[$ の部分を普通の意味で計算すればよい．）これが $s\in \boldsymbol{C}\setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$ においていわゆる Euler の Γ 函数を与えることを確かめよ．また $s=0, -1, -2, \cdots$ においては何を与えるか？

最後に座標変換ではないが計算が似ているので，複素共役の定義をここで与えておこう．$U\subset \boldsymbol{C}$ に対し U の実軸に関する反転を U^a で表わす．すなわち

$$U^a = \{z\in \boldsymbol{C};\ \bar{z}\in U\}$$

$F(z)\in \mathcal{O}(U)$ に対し $\bar{F}(z)=\overline{F(\bar{z})}$ と定めれば $\bar{F}(z)\in \mathcal{O}(U^a)$ となることに注意せよ．

定義 1.6.11　超函数 $f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ に対しその**複素共役** $\bar{f}(x)$ を

$$\bar{f}(x) = \bar{F}_+(x-i0)-\bar{F}_-(x+i0)$$

で定める．また $f(x)$ が**実数値超函数**であるとは $f(x)=\bar{f}(x)$ となることをいう．

次の補題は明らかであろう．

補題 1.6.12　任意の超函数 f は二つの実数値超函数 g, h を用いて，$f=g+ih$ の形に一意的に表わされる．（実際 $g=(f+\bar{f})/2$, $h=(f-\bar{f})/2i$ となる．）f が実数値超函数ならば S. S. f は**対蹠写像** $a:(x,\xi)\mapsto (x, -\xi)$ で不変な集合となる．

問 1.6.3　超函数 $\dfrac{1}{x+i0}$ は実数値ではないことを説明し，その複素共役，および実部，虚部への分解を求めよ．

問 1.6.4　方程式 $x\dfrac{du}{dx}+u=0$ の実数値超函数解は 2 次元の $\boldsymbol{R}$-線型空間をなす．その一つの基底を求めよ．

問 1.6.5　注 3 参照．

§7　ミクロ函数

超函数の性質を特にその特異性に注目して局所的に調べようという場合，解析函数だけの誤差は無視してしまうことにより議論が簡単になる．このような差の無視という手続きは数学では商空間の構成として表現される．この節ではこれに関連した概念を準備しよう．ただし，これらの概念が本質的に必要とな

るのは本書の後半においてなので，煩わしく思う読者は最初に出てくる“芽”の定義だけを覚えたら早々に切り上げて次の節に進まれてもよい．

さてまず層に対し商空間の概念を導入するため少し言葉の準備をしよう．

定義 1.7.1 $\mathscr{F}$ を X 上の(前)層とし，$x \in X$ とする．

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U) \tag{1.7.1}$$

を点 x における $\mathscr{F}$ の**茎**という．$\mathscr{F}_x$ の元は点 x における $\mathscr{F}$ の**切断の芽**という．

やさしくいえば，茎 $\mathscr{F}_x$ とは x のある近傍で定義された $\mathscr{F}$ の局所的切断の全体であるが，帰納極限の記号は，その際二つの切断が x のさらに小さい共通の近傍で一致しているときはそれらを同一視して同じ芽と見なすことを意味している．(前)層 $\mathscr{F}$ の切断 $s \in \mathscr{F}(U)$ が一つあれば，帰納極限の定義によりこれは U の各点 x に芽 $s_x \in \mathscr{F}_x$ を定める．$\mathscr{F}$ が層ならば，公理 F I により

$$s = 0 \iff \forall x \text{ について } s_x = 0$$

となる．$\mathscr{F}$ が連続函数の層 C のとき，$s \in C(U)$ に対し s_x は，連続函数 s が点 x の近傍に定める函数芽(函数要素)の意味であって，函数の値 $s(x)$ ではないことに注意されたい．たとえば，$s_x=0$ は，点 x のある近傍に属する点 y について $s(y) \equiv 0$ を意味する．ただし，一般に層の切断に関しては時に s_x のことを $s(x)$ とも書く．

茎や芽の概念は歴史的には定義 1.2.2 の流儀による層の定義よりも古く，そこでは定義の基本として用いられていた．故に現在でも例えば層 $\mathscr{O}$ のことを正式には“正則函数の芽の層”という風に呼んでいる．しかし“超函数の芽の層”という言い方はあまり聞かない．

補題と定義 1.7.2 X 上に前層 $\mathscr{F}$ が与えられたとき，$\bar{\mathscr{F}}(U)$ を $\mathscr{F}$ の局所的切断を U 上でつなげたものの全体とする．すなわち

$$\bar{\mathscr{F}}(U) = \{s: U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathscr{F}_x;\ \forall x \in U \text{ に対し } \exists V \ni x,\ \exists t \in \mathscr{F}(V) \text{ で } \forall y \in V \text{ に対し } s(y)=t(y) \text{ となっているものが存在}\}$$

とおけば，$U \mapsto \bar{\mathscr{F}}(U)$ は自然な制限写像とともに X 上の層となり $\mathscr{F}$ と同じ茎を持つ．これを前層 $\mathscr{F}$ に**同伴した層**と呼ぶ．

証明　F I の検証　$s \in \bar{\mathscr{F}}(U)$ とする．$s|_{U_\lambda}=0$ とは U_λ の各点 x において $\mathscr{F}_x$ の元として $s(x)=0$ を意味するから，定義により $s \equiv 0$ となる．

F II の検証　$s_\lambda \in \bar{\mathscr{F}}(U_\lambda)$ が与えられたとき，これらを写像 $s: U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathscr{F}_x$ に貼り合わせることは容易にできる.

最後に茎の一致を見よう. $s\in\bar{\mathscr{F}}_x$ は x のある近傍 V について $\bar{\mathscr{F}}(V)$ の元で代表される. 従って，更に小さい近傍 $W\subset V$ について $\mathscr{F}(V)$ の元で代表される. 後者により $\mathscr{F}_x$ の元が一つ定まり，写像 $\bar{\mathscr{F}}_x \to \mathscr{F}_x$ が定義された. これが同型となるのは容易に確かめられる. 証了.

注意 1　同伴層 $\bar{\mathscr{F}}$ を構成するには(茎の定義で極限をとっているので)，前層 $\mathscr{F}$ の切断空間 $\mathscr{F}(U)$ が開集合のある基底$\{U\}$に対して与えられていれば十分である. そこで以下簡単のため，このような部分的データに対しても(制限写像について両立的な限り)前層という言葉を使うことにする.

注意 2　前層 $\mathscr{F}$ が既にF I を満たしている時は $\bar{\mathscr{F}}(U)$ の定義は次のように簡略化される.

$$\bar{\mathscr{F}}(U) = \varinjlim_{\{U_\lambda\}} \{(s_\lambda) : s_\lambda \in \mathscr{F}(U_\lambda),\ s_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = s_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}\}$$

すなわち U の局所的切断の族で相互にはり合わせの条件を満たしているものの全体を $\bar{\mathscr{F}}(U)$ とすればよい. 帰納極限は被覆の細分に関する制限写像に関してとられる. この場合，性質F I のためこの細分に移る写像は単射的となり，従って極限に行って $\mathscr{F}(U) \subset \bar{\mathscr{F}}(U)$ が得られる.

例 1.7.3　前層 $U \mapsto L_1(U)$ に同伴した層は $U \mapsto L_{1,loc}(U)$ に他ならない. 次に位相空間 X の開集合 U に対し常に一定の $\boldsymbol{C}$-線型空間 G を対応させ，制限写像としては G の恒等写像をとれば，一つの前層 $\mathscr{F}$ が得られる. これに同伴した層 $\bar{\mathscr{F}}$ を，茎 G を持つ X 上の**定数層**と呼び $\boldsymbol{G}_X$ で表わす. 前層 $\mathscr{F}$ は層にはならない. $\mathscr{F}(U)$ と $\bar{\mathscr{F}}(U)$ の差は U が連結でないとき現われる. すなわち，前者では切断の値は U 全体で一定だが後者では連結成分毎に異なってもよい.

さて，X 上に層 $\mathscr{G}$ およびその部分層 $\mathscr{F}$ が与えられたとき

$$U \longmapsto \mathscr{G}(U)/\mathscr{F}(U) \tag{1.7.2}$$

という対応は X 上の前層となることが容易に確かめられる. この前層は一般に層ではない. (F I は常に満たすがF II の方が一般にはだめになる.)

定義 1.7.4　前層(1.7.2)に同伴した層を $\mathscr{G}$ の $\mathscr{F}$ による**商層**と呼び $\mathscr{G}/\mathscr{F}$ で表わす[注4)].

前層(1.7.2)はＦＩを満たすので自然な写像 $\mathscr{G}(U)/\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}/\mathscr{F}(U)$ は常に単射となることに注意せよ．

次に $h:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ を X 上の層の準同型とする．対応

$$U\longmapsto \mathrm{Ker}\, h_U$$

は明らかに $\mathscr{F}$ の部分層を定める．(Ker h_U は線型写像 $h_U:\mathscr{F}(U)\longrightarrow\mathscr{G}(U)$ により 0 に写る元の全体を表わす．) これを h の**核**とよび Ker h で表わす．また

$$U\longmapsto \mathrm{Image}\, h_U$$

は明らかに X 上の前層となる(一般には層ではない)．これに同伴する層を h の**像**と呼び Image h で表わす．つまり標語的に $(\mathrm{Image}\, h)(U)\neq\mathrm{Image}\, h_U$ が一般に成り立つ．これから

$$\mathrm{Coker}\, h=\mathscr{G}/\mathrm{Image}\, h$$

などが定義でき，$\boldsymbol{C}$-線型空間の層が代数的にまとまった概念(Abel 圏)をなすことがわかる．

例 1.7.5　$\boldsymbol{C}$ 上の層準同型 $d/dz:\mathscr{O}\to\mathscr{O}$ を考える．Ker d/dz は茎 $\boldsymbol{C}$ を持つ $\boldsymbol{C}$ 上の定数層となる．一方 $(d/dz)_U:\mathscr{O}(U)\to\mathscr{O}(U)$ の像は U 内にある穴のまわりでの周期(一周積分)がすべて 0 に等しいような函数の全体である．(特に U が単連結なら d/dz は全射．) 故に前層 $U\mapsto \mathrm{Image}\,(d/dz)_U$ は層にはならず，これに同伴する層は $\mathscr{O}$ と一致する．また

$$U\longmapsto \mathscr{O}(U)\Big/\frac{d}{dz}\mathscr{O}(U)$$

という対応を考えると，これは U 内の穴の数を μ とすれば $\boldsymbol{C}^\mu$ に同型で，ＦＩを満たさない前層の例となる．

さて，(前)層の準同型 $h:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ があったとき，極限に移って $h_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$ という $\boldsymbol{C}$-線型写像が導かれる．次の補題は定義から明らかであろう．

補題 1.7.6　このとき $(\mathrm{Image}\, h)_x=\mathrm{Image}\, h_x$ が成り立つ．特に $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$ という対があったとき $\mathscr{F}=\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}_x=\mathscr{G}_x$ が $\forall x\in X$ について成り立つことと同値である．

定義 1.7.7　$\mathscr{F}\xrightarrow{h}\mathscr{G}\xrightarrow{k}\mathscr{H}$ を X 上の層の準同型の列とする．この列が(項 $\mathscr{G}$ において)**完全**であるとは層の等式 Image h＝Ker k が成りたつことをいう．特に $0\to\mathscr{G}\xrightarrow{k}\mathscr{H}$ が完全とは k が単射，$\mathscr{F}\xrightarrow{h}\mathscr{G}\to 0$ が完全とは h が全射というに

等しい.

上の補題により，これは

$$\mathscr{F}_x \xrightarrow{h_x} \mathscr{G}_x \xrightarrow{k_x} \mathscr{H}_x \tag{1.7.3}$$

が任意の $x \in X$ について $\boldsymbol{C}$-線型空間の完全列となること (即ち Image $h_x = \mathrm{Ker}\, k_x$ となること) と同値となる．このとき切断空間の列

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{h_U} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{k_U} \mathscr{H}(U) \tag{1.7.4}$$

は必ずしも完全とはならないことに注意せよ．もちろん(1.7.4)が x の基本近傍系をなす U について完全なら(1.7.3)は完全になるが，逆は必ずしも正しくない.

次に我々は以上の概念を $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ という対に応用する．商層 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ は超函数の特異性のみを取出した層ということができる.

定理 1.7.8　$\mathscr{B}/\mathscr{A}$ は脆弱層であり，$\boldsymbol{R}$ の開集合 Ω に対し $\mathscr{B}/\mathscr{A}(\Omega) = \mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)$ が成り立つ．また $f \in \mathscr{B}(\Omega)$ に対し sing supp f は $f \bmod \mathscr{A}(\Omega)$ を $\mathscr{B}/\mathscr{A}(\Omega)$ の元とみたときの台に等しい.

証明　自然な写像 $\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega) \to \mathscr{B}/\mathscr{A}(\Omega)$ が全射となることをまずいおう．$\mathscr{B}/\mathscr{A}(\Omega)$ の元$[f]$は各点 $x \in \Omega$ の近傍では $\mathscr{B}$ の切断で代表される．故に Ω の開被覆 $\{\Omega_\lambda\}$ が存在し $f_\lambda \in \mathscr{B}(\Omega_\lambda)$ があって

$$[f]|_{\Omega_\lambda} = f_\lambda \bmod \mathscr{A}$$

となっているとしてよい．$g_{\lambda\mu} = f_\mu|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu} - f_\lambda|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu}$ とおけば $g_{\lambda\mu} \in \mathscr{A}(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu)$ であり余輪体の条件

a)　$g_{\lambda\mu} = -g_{\mu\lambda}$

b)　$g_{\lambda\mu} + g_{\mu\nu} + g_{\nu\lambda} = 0$,　　$\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \cap \Omega_\nu$ 上

を満たす．$\{\Omega_\lambda\}$ が局所有限なら各 Ω_λ の複素近傍 U_λ を適当に選べば $g_{\lambda\mu}$ は $U_\lambda \cap U_\mu$ に正則に延長でき，条件 a), b) はそこでももちろん成立しているので，補題 1.5.2 を経由して結局 $g_\lambda \in \mathscr{A}(\Omega_\lambda)$ で

$$g_{\lambda\mu} = g_\mu - g_\lambda, \qquad \Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \text{ 上}$$

となるものを見つけることができる．すると $f_\lambda - g_\lambda$ は Ω 上の一つの超函数につながるが，これを $\mathscr{B}/\mathscr{A}(\Omega)$ に写したものが$[f]$に等しいことは各点の茎での芽を比べれば明らかであろう．以上で $\mathscr{B}/\mathscr{A}(\Omega) = \mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)$ が示された．これ

により $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ が脆弱なことは $\mathscr{B}$ が脆弱なことから直ちに得られる．最後の主張は定義の言い換えにすぎない．証了．

さて，我々は前節において超函数の特異性を更にスペクトルまで分解して調べたが，これを表現するには $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ では不完全である．そこでまた別の概念を用意する．

定義 1.7.9 $f:X\to Y$ を位相空間の連続写像とし $\mathscr{G}$ を Y 上の層とする．対応

$$X\supset U\longmapsto \varinjlim_{V\supset f(U)} \mathscr{G}(V)$$

は X 上の前層となるが，これに同伴した層を $\mathscr{G}$ の f による**逆像**と呼び $f^{-1}\mathscr{G}$ で表わす．

極限は $f(U)$ を含むすべての開集合についてとる．従って特に f が**開写像**(すなわち開集合を開集合に写す)ならば，極限をとる必要はない．この場合には，開集合 $U\subset X$ で f の各繊維 $U\cap f^{-1}(y)$ が連結であるようなものをとれば

$$f^{-1}\mathscr{G}(U)=\mathscr{G}(f(U))$$

が成り立つ．一般の写像の場合にも極限をとれば

$$(f^{-1}\mathscr{G})_x=\mathscr{G}_{f(x)}$$

が得られる．標語的にいえば"逆像 $f^{-1}\mathscr{G}$ は写像 f の繊維 $f^{-1}(y)$ に沿って定数である"．

我々はこれを，特異スペクトルを考えた集合 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ から $\boldsymbol{R}$ への自然な射影 π に応用する：$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ の開集合 $\Omega_1\times\{idx\infty\}\bigcup\Omega_2\times\{-idx\infty\}\approx\Omega_1\bigsqcup\Omega_2$ をとれば（$\bigsqcup$ はいわゆる非連結和を表す）

$$\pi^{-1}\mathscr{B}(\Omega_1\times\{idx\infty\}\bigcup\Omega_2\times\{-idx\infty\})=\mathscr{B}(\Omega_1)\oplus\mathscr{B}(\Omega_2)$$

定義 1.7.10 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ 上に次の二つの層を定義する．

a) $\pi^{-1}\mathscr{B}$ の部分層 $\mathscr{A}^*$ で次の式で定義されるもの：

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}^*(\Omega_1\times\{idx\infty\}\bigcup\Omega_2\times\{-idx\infty\})\\&\quad=\{f\in\mathscr{B}(\Omega_1);\ \mathrm{S.S.}\,f\cap\Omega_1\times\{idx\infty\}=\phi\}\\&\qquad\oplus\{f\in\mathscr{B}(\Omega_2);\ \mathrm{S.S.}\,f\cap\Omega_2\times\{-idx\infty\}=\phi\}\end{aligned}$$

(直観的には $\mathscr{A}^*=\{F_-(x-i0)\}\oplus\{F_+(x+i0)\}$)

b)　**ミクロ函数**(微函数あるいは極超函数)の層 $\mathscr{C}=\pi^{-1}\mathscr{B}/\mathscr{A}^*$

直観的にいえば，切断の芽 $f\in\mathscr{A}^*{}_{(x,+idx\infty)}$ は点 $(x,+idx\infty)$ においてミクロ解析的な超函数の芽のことであり，$[f]\in\mathscr{C}_{(x,+idx\infty)}$ は点 x における超函数の芽 f を点 $(x,+idx\infty)$ でミクロ解析的なものの差を無視した剰余類 $[f]=f \bmod \mathscr{A}^*{}_{(x,+idx\infty)}$ である．

方向概念を導入したため，これらの層がいずれも $\boldsymbol{R}$ 上のものでなく $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ のものとなっていることに注意せよ．

定義より明らかに

系 1.7.11　次の完全列が存在する．

$$0\to\mathscr{A}^*\to\pi^{-1}\mathscr{B}\to\mathscr{C}\to 0.$$

これらの層から $\boldsymbol{R}$ 上の対象に戻るため次の概念を用意する．

定義 1.7.12　$f:X\to Y$ を位相空間の連続写像，$\mathscr{F}$ を X 上の層とする．対応

(1.7.5)
$$Y\supset V\longmapsto\mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

により Y 上に定義される層を $\mathscr{F}$ の f による**順像**と呼び $f_*\mathscr{F}$ で表わす．

上の定義は(1.7.5)が層の公理を満たすという補題を含んでいるが，その検証は易しい．さて，定義により $f_*\mathscr{F}(V)=\mathscr{F}(f^{-1}(V))$ であるが，区別のため $\varphi\in\mathscr{F}(f^{-1}(V))$ を $f_*\mathscr{F}(V)$ の元とみたときには $f_*\varphi$ と記すことにする．(後にはわずらわしくないようにこの区別を放棄することもある．) すると明らかに

(1.7.6)
$$\operatorname{supp} f_*\varphi=\overline{f(\operatorname{supp}\varphi)}.$$

f が $f^{-1}(V)$ の上で**閉写像**(即ち，閉集合を閉集合に写すもの)となっていれば，もちろん右辺で閉包は不要である．

問 1.7.1　$\pi_*\pi^{-1}\mathscr{B}$ は何か？

次が本節の基本定理である．

定理 1.7.13　$\mathscr{C}$ は脆弱層であり，$U\subset\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ に対し $\mathscr{C}(U)=\pi^{-1}\mathscr{B}(U)/\mathscr{A}^*(U)$ が成り立つ．すなわち，

(1.7.7)
$$0\to\mathscr{A}^*(U)\to\pi^{-1}\mathscr{B}(U)\to\mathscr{C}(U)\to 0$$

は完全列となる．更に $\Omega\subset\boldsymbol{R}$ に対し $\mathrm{sp}:\mathscr{B}(\Omega)\to\mathscr{C}(\pi^{-1}(\Omega))$ を写像の自然な結合

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}(\Omega) & \longrightarrow \pi^{-1}\mathcal{B}(\pi^{-1}(\Omega)) & \longrightarrow \mathcal{C}(\pi^{-1}(\Omega)) = \mathcal{B}(\Omega) \bmod \mathcal{A}^*(\Omega\times\{idx\infty\}) \\ & = \mathcal{B}(\Omega)\oplus\mathcal{B}(\Omega) & \oplus\mathcal{B}(\Omega) \bmod \mathcal{A}^*(\Omega\times\{-idx\infty\}) \\ \Psi & \Psi & \Psi \\ f & \longmapsto f\oplus f & \longmapsto f \bmod \mathcal{A}^*(\Omega\times\{idx\infty\}) \oplus f \bmod \mathcal{A}^*(\Omega\times\{-idx\infty\}) \end{array}$$

により定義すれば,

$$(1.7.8) \qquad 0\to\mathcal{A}(\Omega)\to\mathcal{B}(\Omega)\xrightarrow{\mathrm{sp}}\mathcal{C}(\pi^{-1}(\Omega))\to 0$$

という完全列が得られ, 従って次のような層の完全列が得られる:

$$(1.7.9) \qquad 0\to\mathcal{A}\to\mathcal{B}\to\pi_*\mathcal{C}\to 0$$

$f\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対し $\mathrm{sp}(f)\in\mathcal{C}(\pi^{-1}(\Omega))$ を対応する元とすれば

$$\mathrm{S.S.}\, f = \mathrm{supp}\,\mathrm{sp}(f)$$

ここに右辺の supp は層 $\mathcal{C}$ の切断としての台を表わす.

つまり, 超函数を"スペクトル分解写像" sp によりミクロ函数とみなしたときの台がもとの超函数の特異スペクトルとなっているわけで, これにより超函数の特異部分が方向成分も込めて精密に取り出せたわけである.

証明 まず(1.7.7)の完全性を示そう. これには最後の項のところで全射になっていることを調べれば十分である. $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0=\boldsymbol{R}\sqcup\boldsymbol{R}$ なので, U として例えば $\Omega\times\{idx\infty\}$ の形の開集合を考察すれば足りる. そこで $\{\Omega_\lambda\}$ を Ω の局所有限な開被覆とし, 与えられた $\mathcal{C}(U)$ の元 f は $f_\lambda\in\mathcal{B}(\Omega_\lambda)$ により $f_\lambda \bmod \mathcal{A}^*(\Omega_\lambda\times\{idx\infty\})$ として定義されているとしてよい. これから両立条件 $f_{\lambda\mu}=f_\mu|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}-f_\lambda|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}\in\mathcal{A}^*(\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu\times\{idx\infty\})$ を用いて mod $\mathcal{A}^*$ の部分を取り替えることにより大域的な切断 $f\in\mathcal{B}(\Omega)$ を作ればよいわけである.

さて, $\mathcal{A}^*$ の定義から明らかに $f_\lambda(x)\equiv F_\lambda(x+i0) \bmod \mathcal{A}^*(\Omega_\lambda\times\{idx\infty\})$ となる. 両立条件 $f_{\lambda\mu}=F_\mu(x+i0)-F_\lambda(x+i0)\in\mathcal{A}^*(\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu\times\{idx\infty\})$ は $f_{\lambda\mu}$ が下方にも解析接続できること, 従って実解析函数であることを意味する. 故に $\{f_{\lambda\mu}\}$ は $\mathcal{A}$-係数の1次余輪体となり, 定理1.7.8の証明と同様にして $\mathcal{A}$-係数0次余鎖 $g_\lambda(x)\in\mathcal{A}(\Omega_\lambda)$ で $f_{\lambda\mu}=g_\mu-g_\lambda$ となるものがとれる. $f_\lambda\equiv F_\lambda(x+i0)-g_\lambda \bmod \mathcal{A}^*(\Omega_\lambda\times\{idx\infty\})$ であり, $F_\lambda(x+i0)-g_\lambda$ は Ω 上の超函数 f につながる. これが求める元である. 証明の仕方からこの f は Ω 上大域的に $F(x+i0)$ の形に書けることにも注意しておこう.

(1.7.8)の完全性および定理の残りの主張はこれから容易に得られる. 証了.

最後に蛇足ながら次のことを注意しておこう．これは系1.3.5及び系1.6.4の言い換えにすぎない．

系 1.7.14 実解析係数の線型微分作用素(1.1.6)は，自然に層の自己準同型 $\mathcal{B}/\mathcal{A}\to\mathcal{B}/\mathcal{A}$ および $\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ を導く．それらは通常同じ記号 $P(x, D)$ で表わされる．

§8 局所作用素と超局所作用素

前節をとばされた読者のためにその要点を復習しておくと，超函数を解析函数またはミクロ解析的な超函数を法として(すなわち，そのような差を無視して)考えることにより，超函数の特異性のみを取り出して議論することができるのであった．特に後者の意味の特異部分はミクロ函数と呼ばれ，特異スペクトルを考えるのと同じ空間 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ 上の層 $\mathcal{C}$ と見なせるのであった．すなわち，点 $(x, i\xi dx\infty)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{S}^0$ におけるミクロ函数の芽とは，点 x における超函数の芽 $f(x)$ を，点 $(x, i\xi dx\infty)$ でミクロ解析的な超函数芽の全体を法として考えた剰余類のことであった．実解析係数の線型微分作用素はミクロ解析性を保つ(すなわち，剰余類で無視されるような超函数の芽を再びそのようなものに写す)ことから，超函数の層 $\mathcal{B}$ の自己準同型のみならず，ミクロ函数の層 $\mathcal{C}$ の自己準同型とも見なせた．本節では逆に層 $\mathcal{B}$ あるいは層 $\mathcal{C}$ の自己準同型にどのようなものがあるかを調べよう．これらは一般にそれぞれ局所作用素および超局所作用素(ミクロ局所作用素)と呼ばれるが，厳密にはこれらの呼称は解析的に意味のある層準同型，すなわち，ある意味で“連続な”準同型に限って用いられる．ここでは連続性の厳密な定義をまだ与える準備ができていないし，一般の作用素は核超函数と呼ばれる多変数の超函数を用いて表わすほうが便利なので，一般論は後にまわして例を通しての概念習得をまず心掛けることにする．

さて，通常の函数の範囲には収まらない超函数は，滑らかでない連続函数を超函数の意味でどんどん微分してゆけばいくらでも例を得ることができる．それでは一般の超函数はすべてこのようにして得られるであろうか？ それを調べるためまず原点を台とする超函数の空間 $\mathcal{B}[\{0\}]$ を調べてみよう．補題1.3.7で注意したように $\mathcal{B}[\{0\}]\simeq\mathcal{O}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})/\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ であったから，そのような超函

数 $f(x)$ は $F(z)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})$ で表現される．$F(z)$ の原点における Laurent 展開を $\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k z^k$ とすれば，冪指数 $k\geq 0$ の部分は分母 $\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ に繰り込めるから，結局記号を変えて

$$f(x)\longleftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^{k+1}} \tag{1.8.1}$$

という一対一対応が得られる．（実はこれは $f(x)$ の標準定義函数に他ならない．）いま $D_z=d/dz$ という記号を用いれば，

$$\frac{1}{z^{k+1}}=\frac{(-1)^k}{k!}D_z{}^k\left(\frac{1}{z}\right)$$

であるから，$b_k=2\pi i(-1)^{k-1}a_k/k!$ とおけば，(1.8.1)の右辺の正則函数は

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k D_z{}^k\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right)$$

と書ける．故に超函数 $f(x)$ は形式的に

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k D^k\delta(x)$$

と δ 函数の無限階導函数として表わされた．ここに現われた無限階の微分作用素は勝手なものではなく，係数が一定の評価式を満たしている．すなわち，Laurent 展開(1.8.1)の収束半径が無限大なることから，Cauchy-Hadamard の定理により，$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=0$，従って $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|b_k|k!}=0$ となる．

補題 1.8.1 複素領域 U で正則な係数を持つ無限階微分作用素 $J(z,D_z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z)D_z{}^k$ が，項別微分の広義一様収束により U 上の正則函数芽の層 $\mathcal{O}$ に層の準同型として作用するためには，U 内の任意のコンパクト集合 K に対し

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\sup_{z\in K}|b_k(z)|\,k!}=0 \tag{1.8.2}$$

となっていることが必要かつ十分である．

証明 まず十分性を示そう．正則函数芽 $F(z)$ を任意にとる．$F(z)$ は U 内の微小円板 $|z-z_0|\leq 2\delta$ で正則かつ $|F(z)|\leq M$ とすれば，Cauchy の不等式より

$$|D_z{}^kF(z)|\leq\frac{k!}{\delta^k}M\qquad(|z-z_0|\leq\delta\text{ において})$$

となる．一方，条件(1.8.2)は，任意の $\varepsilon>0$ に対し z が U 内のコンパクト集合を動くとき（従って特に $|z-z_0|\leq\delta$ のとき），k が十分大きければ $\sqrt[k]{|b_k(z)|k!}\leq\varepsilon$ となること，従って $C_\varepsilon>0$ を適当に選べば，任意の k について

(1.8.3) $$|b_k(z)|k! \le C_\varepsilon \cdot \varepsilon^k$$

となることを意味する．故に $\varepsilon=\delta/2$ と選べば $|z-z_0|\le\delta$ において

$$|b_k(z)D_z{}^kF(z)| \le C_\varepsilon \cdot M \cdot \frac{1}{2^k}$$

となり，級数 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z)D_z{}^kF(z)$ は一様収束して正則函数を定める．z_0 および δ は任意であるから，実はこの級数はもとの $F(z)$ が正則なところでは広義一様収束し，$J(z, D_z)F(z)$ はそこで正則となる．

次に必要性を示そう．(1.8.2)を否定すれば，ある $\varepsilon>0$ に対して

$$\sqrt[k_j]{|b_{k_j}(z_j)|k_j!} \ge 2\varepsilon, \qquad j=1,2,\cdots, \quad k_j \to \infty$$

となる K 内の点列 $\{z_j\}$ が得られるが，必要なら部分列をとることにより $z_j \to z_0$ と仮定しても一般性を失わない．そこで

$$J(z, D_z)\left(\frac{1}{z-z_0-\varepsilon}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(z)(-1)^k k!}{(z-z_0-\varepsilon)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z)$$

を考える．ここに最後の辺は $F_k(z)$ の定義のつもりである．$|z_j-z_0|\le\varepsilon$ において

$$|F_{k_j}(z_j)| \ge \frac{(2\varepsilon)^{k_j}}{|z_j-z_0-\varepsilon|^{k_j+1}} \ge \frac{1}{2\varepsilon}$$

となるから，$1/(z-z_0-\varepsilon)$ が $|z-z_0|<\varepsilon$ において正則にも拘らず上の級数はそこで広義一様収束していない．証了．

定義 1.8.2 上の補題の条件を満たす無限階微分作用素 $J(z, D_z)$ を**局所作用素**と呼ぶ．

局所作用素の作用の仕方は上のように自然であるから，その取扱いは有限階の微分作用素と同様にできる．特に

系 1.8.3 $J(z, D_z)$ を実開集合 Ω のある複素近傍で定義された局所作用素とするとき，超函数 $f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ に対して

$$J(x, D)f(x) = (J(z, D_z)F_+)(x+i0)-(J(z, D_z)F_-)(x-i0)$$

と定めることにより超函数の層 $\mathcal{B}$ の Ω 上の自己準同型が得られる．特に，原点を台とする超函数はすべて δ 函数に定数係数局所作用素を施すことにより得られる．

例 1.8.4 $$[e^{-1/z}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi i}{k!(k+1)!} D^k \cdot \delta(x).$$

この他 $\cos\sqrt{D}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}D^k$, $\frac{\sin\sqrt{D}}{\sqrt{D}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k D^k}{(2k+1)!}$ も局所作用素となる．これらは通常の作用素演算に従うから

$$\cos\sqrt{D}\circ\cos\sqrt{D}+\sqrt{D}\sin\sqrt{D}\circ\frac{\sin\sqrt{D}}{\sqrt{D}}=1$$

等が成り立つ．もちろん定数係数の作用素同士は可換である．

Schwartz の分布を御存知の読者は，任意の分布が局所的には連続函数の有限階導函数として得られること，特に原点を台とする分布は δ 函数の有限階導函数の一次結合の形をしていること等を思い起こされよ．我々の超函数は原点を台とするものだけで既に Schwartz の分布よりはかなり豊富である．しかし一般の超函数といえども，局所作用素という無限階の微分作用素の意味では連続函数の導函数として表わされることが知られており，この意味で局所作用素を用いた微積分は超函数に対しては極めて自然なものである．

参考 1.9　層 $\mathcal{O}$ の(従って $\mathcal{B}$ の)代数的自己準同型は上に述べた局所作用素の他にもたくさん存在する．解析学で用いるためにはある種の連続性(上のように項別微分が広義一様収束するか，あるいは Cauchy 積分に施したとき積分と順序交換できるか)を満たしている必要がある．なお，層 $\mathcal{E}$ の代数的自己準同型は通常の微分作用素以外に存在しないことが知られている (Peetre の定理)[注5]．さて，いわゆる無限階微分作用素には雑多なものが含まれている．例えば，$e^{aD}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kD^k}{k!}$ は変位 a の平行移動である：

$$e^{aD}F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kD^k}{k!}F(z)=F(z+a)$$

a が実数ならこの移動は実軸に平行で，従って“微分作用素” e^{aD} は平行移動として超函数にも働くことができる．しかし作用はもちろん局所的ではない．局所作用素の条件(1.8.2)はここでの係数 $|a|=0$ という評価に対応していることに注意されたい．

以上のように D の正冪が無限まで拡張できたので，今度は D の負冪を導入することを考えよう．直観的にいえば D^{-1} は D の逆だから，原始函数(不定積分)を求めることである：正則函数 $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ に対しては U 内に適当な起点 a を取れば，

$$D^{-1}F(z)=\int_a^z F(z)dz$$

超函数 $f=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ については，それがもし点 $x=a$ の近傍で実解析的なら

$$D^{-1}f=\int_a^x f(x)dx=\left[\int_{\gamma_+(z)}F_+(z)dz\right]-\left[\int_{\gamma_-(z)}F_-(z)dz\right]$$

ここに，積分路 $\gamma_\pm(z)$ は図のように上および下半近傍で a と z とをつなぐ道である．一般の f に対しては台を $x\leq a$ と $x\geq a$ の二つに分けて各々を上の方法

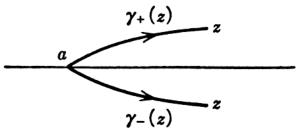


図 1.10

で不定積分すればよい．このような不定積分は，積分の起点 a の選び方や台の分解の仕方により異なるが，その差はたかだか定数にすぎない．故に点 x の近傍で与えられた超函数の芽 $f(x)\in\mathcal{B}_x$ に対し，f の台をこの点の適当な近傍に切り落として上の方法で $D^{-1}f$ を計算すれば，これは少なくとも mod $\mathcal{A}_x$ で(即ち，高々 $\mathcal{A}_x$ の元の不定性を除いて)確定する．(層の茎および切断の芽については定義 1.7.1 を参照せよ．) 更に，実解析函数芽 $g(x)\in\mathcal{A}_x$ に対しては不定積分 $D^{-1}g$ も実解析函数芽の中に存在することに注意すれば，

$$D^{-1}:\mathcal{B}/\mathcal{A}\to\mathcal{B}/\mathcal{A}$$

という層の自己準同型が得られる．全く同様にしてミクロ函数の芽 $[f]\in\mathcal{C}_{(x,i\xi dx\infty)}$ に対し，それを超函数 f で代表しておいて上の方法で $D^{-1}f$ を計算した後に剰余類 $[D^{-1}f]$ に戻ることにより

$$D^{-1}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$$

という層の自己準同型も得られる．

これを基本として今度は

$$Q(z,D_z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z)D_z^{-k} \tag{1.8.4}$$

という作用素の無限級数を考えよう．

補題 1.8.5　(1.8.4)の係数 $b_k(z)$ は複素領域 $U\subset \boldsymbol{C}$ で正則とする．U の任意の点 z_0 において $\delta>0$ が存在し，$|z-z_0|\leq\delta$ に含まれる z_0 の任意の凸近傍 V で正則な函数 $F(z)$ に対し，級数

$$(1.8.5) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z) D_z^{-k} F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z) \underbrace{\int_{z_0}^{z} dz \cdots \int_{z_0}^{z}}_{k} F(z) dz$$

が V で広義一様収束し再び $\mathcal{O}(V)$ の元を定めるためには，U 内の任意のコンパクト集合 K に対し

$$(1.8.6) \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\sup_{z \in K} |b_k(z)|/k!} < \infty$$

となっていることが必要かつ十分である．

証明 まず(1.8.6)が成り立つとしよう．z がコンパクト集合 $|z-z_0| \leq \delta$ を動くとき，定数 $B>0, C>0$ を適当にとれば

$$(1.8.7) \qquad \frac{|b_k(z)|}{k!} \leq CB^k$$

が成り立つ．一方，部分積分により

$$(1.8.8) \qquad \underbrace{\int_{z_0}^{z} dz \cdots \int_{z_0}^{z}}_{k} F(z) dz = \int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^{k-1}}{(k-1)!} F(\zeta) d\zeta$$

が導かれることに注意しよう．ここに積分路は z_0 と z を結ぶ線分とする．故に考えている領域 V において $|F(z)| \leq M$ とすれば

$$(1.8.9) \qquad \left| \int_{z_0}^{z} dz \cdots \int_{z_0}^{z} F(z) dz \right| \leq \frac{M\delta^k}{k!}$$

従って(1.8.5)の一般項は

$$|b_k(z) D_z^{-k} F(z)| \leq CM(B\delta)^k$$

と評価される．故に $\delta < 1/B$ に選べば(1.8.5)は V 上一様収束する．

逆の証明は補題 1.8.1 と同様なので省略する．証了．

問 1.8.1 それを遂行せよ．

定義 1.8.6 係数が上の補題の条件を満たす形式的作用素(1.8.4)を階数 ≤ 0 の**擬微分作用素**あるいはミクロ微分作用素と名付ける．不等式(1.8.7)を満たす B に対し $1/B(\leq \mathrm{dis}(z_0, \partial U))$ の上限をこの擬微分作用素の点 z_0 を中心とする収束半径と呼ぶ.

擬微分作用素の $\mathcal{O}(U)$ への作用は局所作用素のようには確定しないことに注意せよ．それは，たとえ $F(z)$ が U 全体で大域的に定義されていても級数(1.

8. 5)は一般には $|z-z_0|>1/B$ では収束しないからである．従って，そこでは z_0 の代わりに別の積分起点を採用せねばならない．しかしながら，この不定性はミクロ函数の定義函数に対する作用として見るとき無視できるのである：

系 1.8.7 実開集合 Ω の複素近傍で定義された階数 ≤ 0 の擬微分作用素 $Q(z, D_z)$ は次の仕方で Ω 上の層 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$，あるいは $\Omega\times \boldsymbol{S}^0$ 上の層 $\mathscr{C}$ の自己準同型 $Q(x, D)$ を定める：$f(x)$ を $(\mathscr{B}/\mathscr{A})_x$，または $\mathscr{C}_{(x, i\xi dx\infty)}$ の元$[f]$を代表する超函数の芽とし，$f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ とするとき，$F_\pm(z)$ の正則域内に起点 $z_0{}^\pm$ を点 x の十分近くに選び，これを用いて $G_\pm(z)=Q(z, D_z)F_\pm(z)$ をそれぞれ補題 1.8.5 に示した方法で計算し

$$Q(x, D)[f] = [G_+(x+i0)-G_-(x-i0)]$$

と定める．

実際，x が点 $z_0{}^\pm$ を中心とする $Q(z, D_z)$ の収束円内に入るように $z_0{}^\pm$ を選んでおけば，x の十分近くでは $F_\pm(z)$ が正則なところで $G_\pm(z)=Q(z, D_z)F_\pm(z)$ も正則となる．故に超函数 $G_+(x+i0)-G_-(x-i0)$ は確定する．もっとも，こうして計算した $G_\pm(z)$ は実軸に沿って x から遠ざかれば，たとえ $F_\pm(z)$ が相変わらず定義されていようとも一般には意味を持たなくなる．故に起点 $z_0{}^\pm$ は実軸

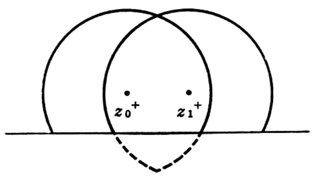


図 1.11

に沿って新しい起点 $z_1{}^\pm$ へと次第に取り替えてゆかなければならない．このとき生じる差は，(1. 8. 8)により

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z)\int_{z_0{}^\pm}^{z_1{}^\pm}\frac{(z-\zeta)^{k-1}}{(k-1)!}F_\pm(\zeta)d\zeta$$

に等しく，これは $\{|z-z_0{}^\pm|\leq\delta\}\cap\{|z-z_1{}^\pm|\leq\delta\}$ において一様に収束する．すなわち，実軸上に定まる超函数としては実解析的な差しか生じないのである．

定義 1.8.8 一般に作用素の形式的級数

(1. 8. 10) $$P(z, D_z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z)D_z{}^k$$

は$k\geq 0$の部分が定義1.8.2の条件を満たし，$k<0$の部分が定義1.8.6の条件を満たすとき，**擬微分作用素**またはミクロ微分作用素と呼ばれる．これは系1.8.3–1.8.7に示した仕方で$\mathscr{B}/\mathscr{A}$あるいは$\mathscr{C}$の層の自己準同型$P(x, D)$を定める．特に$b_k(z)\not\equiv 0$なるkの最大値mが存在するとき，Pの階級はmであるといい，そうでないときはPの階数は無限大であるという．

形式的級数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z)\zeta^k \tag{1.8.11}$$

をこの擬微分作用素の表象と呼ぶこともある．この級数は$k\geq 0$の部分は普通の意味で収束するが，$k<0$の部分は収束円内でも普通の意味では収束すると限らないことに注意せよ．不定積分から得られる因子$1/k!$のお蔭で初めて収束するのである．

擬微分作用素は作用素の結合等に関しLeibnizの公式に似た公式を満たし，それらは表象の形式的級数(1.8.11)を用いて機械的に計算することができる．こうして演算子法のミクロ局所化ともいうべきものができ，微分方程式論が大変見通しのよいものとなる．このような実際の運用の仕方については別の機会にゆずる．

問1.8.2 線型常微分作用素$D-\lambda$の逆作用素を擬微分作用素として求め，演算子法の公式$\dfrac{1}{D-\lambda}\delta(x)=e^{\lambda x}Y(x)$をミクロ函数の意味で確認せよ．

付記 この章で用いた函数論の知識はほぼ標準的なものと思われるが，念のために参考書を二つだけ挙げておこう．吉田洋一[1]は本著者が函数論を学んだ書物である．新しいものとしては笠原[1]がある．

一変数の超函数については文献はかなり多い．体裁もそう差はない．思い付くままに挙げれば，佐藤の原論文[1]，[2]を始め小松[1]，[2]，森本[1]の第一章など．また今井[1]は数学を応用する立場から書かれたユニークな解説書である．本書の大まかな構成は主にCerezo-Piriou-Chazarain[1]を参考にした．多変数の場合を意識した書き方である．一変数の理論としては更にSchwartzの分布との関係，常微分方程式の話題等を補うべきかもしれない．これらについては例えば小松[2]等を参照されたい．

この章の内容はおおむね佐藤による．発見者の精神を学ぶ上からも機会があれば佐藤の原論文を読むことをお勧めする．

第1章の問題

問題1 $a<0<b$ とし，$\varphi(x)$ を区間$[a,b]$の近傍で定義された実解析函数とするとき，

$$\int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{p.\,v.}\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_a^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_\varepsilon^b\frac{\varphi(x)}{x}dx\right).$$

超函数 $\mathrm{p.\,v.}\dfrac{1}{x}$ は $\mathrm{f.\,p.}\dfrac{1}{x}$ と同じもので，右辺は積分 $\displaystyle\int_a^b\frac{\varphi(x)}{x}dx$ の **Cauchy の主値**と呼ばれる．

問題2 $\varphi(x)$ を実解析函数とし，その原点における Taylor 展開を $\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ とする．このとき $\lambda\leq -1$ に対して $|\lambda|-1$ を超えない最大の整数を m とすれば

$$\int_{-a}^{a}\varphi(x)x_\pm{}^\lambda dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\varphi(x)x_\pm{}^\lambda dx\pm\left(\frac{a_0(\pm\varepsilon)^{\lambda+1}}{\lambda+1}+\cdots+\frac{a_m(\pm\varepsilon)^{\lambda+1+m}}{\lambda+1+m}\right)\right\}$$

ただし $\lambda+1+m=0$ のとき(すなわち λ が整数のとき)は最後の項を $a_m\log\varepsilon$ でおき換えるものとする．右辺の極限を有限にするために調節された項はちょうど $\varepsilon\downarrow 0$ のとき発散する部分であり，右辺の表現は **Hadamard の有限部分**として知られている．前問および本問は，超函数の一般論ができ上る前に数学者によって導入された重要な擬函数の例である．

問題3 例 1.4.3 の超函数 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta(x-a_k)$ が $x\leq 0$ に Schwartz の分布の元として延長できるための必要かつ十分な条件は，k に依らない定数 N が存在し $\sum_{k=1}^{\infty}a_k{}^N<\infty$ となることである．

問題4 Cauchy の存在定理によれば，単連結領域 $U\subset \boldsymbol{C}$ において正則な係数を持つ線型常微分方程式 $P(z,D_z)F(z)=G(z)\in\mathcal{O}(U)$ は最高階の係数 $a_0(z)$ が U 内に零点を持たないとき大域解 $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ を持つ．このことから方程式 $P(x,D)u(x)=f(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ は(Ω 内に $a_0(x)$ の零点の存在如何に拘ず)大域的超函数解 $u(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ を持ち，かつそれは

$$\mathrm{S.\,S.}\,u\subset\mathrm{S.\,S.}\,f\ \cup\ \{a_0(x)=0\}\times\boldsymbol{S}^0$$

を満たすことを示せ．

問題5 $\lambda\in\boldsymbol{C}$ を定数とする．

a) $\lambda\neq 0$ のとき，$F(z)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ が常微分作用素 $z^2\dfrac{d}{dz}+\lambda:\mathcal{O}(\boldsymbol{C})\to\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ の像に入るための必要かつ十分な条件は

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^{-\lambda/z}}{z^2}F(z)dz=0$$

であることを示せ．

b) 任意の λ に対し，$\boldsymbol{C}$-線型作用素 $x^3\dfrac{d}{dx}+\lambda x:\mathcal{B}(\boldsymbol{R})\to\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ の核の次元は 4 であることを示し，一組の基底を求めよ．

第2章　多変数の正則函数

本章では多変数の超函数を直観的に理解するために最小限必要となる多変数解析函数論からの知識を用意する．従って，この重要な分野への独立した入門としては欠けるところが多いであろう．なお，多変数函数論のより高級な話題のいくつかは本書の後半において再び論じられる．

§1　初等的性質

$\boldsymbol{C}^n$ を複素 n 次元ユークリッド空間とする．この空間の点の座標は n 個の複素数の組 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ で与えられる．$\mathrm{Re}\, z_j=x_j$，$\mathrm{Im}\, z_j=y_j$，$j=1, \cdots, n$ とおけば各複素数 z_j は普通のように x_j+iy_j の形に書かれる．これを一般化して $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$ という実 n 座標を2組用意し，$z=x+iy$ という書き方をする．このことでわかるように，$\boldsymbol{C}^n$ は位相的には $\boldsymbol{R}^{2n}$ と同一視される．後者の座標系としては例えば $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ が用いられる．U を $\boldsymbol{C}^n$ の開集合とするとき，この上で定義された複素数値函数 $F(z)$ とは，各点 $z\in U$ に複素数値 $F(z)$ を対応させるものである．これは実座標を使えば $F(x, y)$ のようにも表わせる．故にこのような函数 $F(z)$ が U で連続とは，後者の意味の函数が普通の意味で連続ということに他ならない．

定義 2.1.1　$U\subset\boldsymbol{C}^n$ を開集合とする．U 上の複素数値連続函数 $F(z)$ が**正則**（あるいは整型）とは，それが各変数 z_j について分離的に正則なこと，すなわち他の変数 z_k たちを任意の値 a_k に固定したとき，$\boldsymbol{C}$ の開集合とみなした切り口 $U\cap\{z_k=a_k, k\neq j\}$ において複素一変数 z_j の函数として正則なことをいう．

この定義は局所的であるから，$\boldsymbol{C}^n$ 上の正則函数の概念は $\boldsymbol{C}^n$ 上の層をなすことが直ちにわかる．この層を一変数のときと同じ記号 $\mathcal{O}$ で表わす．故に $F(z)$ が U 上の正則函数であるという代わりに $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ と書くことができる．

以下，この節では，定義から簡単に導かれる正則函数の性質を列挙してゆこう．

定理 2.1.2(**Cauchy の積分公式**)　$\gamma_j\subset\boldsymbol{C}$ を区分的に滑らかな単純閉曲線，$D_j\subset\boldsymbol{C}$ を γ_j で囲まれた領域とする $(j=1,\cdots,n)$．$F(z)$ が**柱状領域** $D_1\times\cdots\times D_n$ で正則，かつこの領域の閉包まで込めて連続ならば，領域内の点 z に対し次の公式が成り立つ：

$$(2.1.1)\qquad F(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

これは一変数の場合の公式を反復適用すれば得られる．この定理から，一変数のときと同様にいくつかの重要な性質が次々に導かれる．

系 2.1.3　$F(z)\in\mathcal{O}(U)$ は U において実座標に関する C^∞ 級函数となる．さらに，z の近傍として上の定理のような柱状領域 $D_1\times\cdots\times D_n\Subset U$ をとれば，$F(z)$ の複素偏導函数に対して次の表現公式が成り立つ：

$$(2.1.2)\qquad F^{(\alpha)}(z)=\frac{\partial^{|\alpha|}F(z)}{\partial {z_1}^{\alpha_1}\cdots\partial {z_n}^{\alpha_n}}$$

$$=\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\zeta_n-z_n)^{\alpha_n+1}}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

ここに $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ という多重添字に対し

$$(2.1.3)\qquad |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\qquad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$$

という記号を用いた．

実際，(2.1.1)の表現より，$F(z)$ は実変数 (x,y) の函数として積分記号下で何回でも微分できる(Weierstrass の定理)．特に複素微分については，一変数函数論の知識からその形が(2.1.2)のようになることがわかる．

系 2.1.4　$\{F_k(z)\}$ を $\mathcal{O}(U)$ の元より成る函数列とする．U において広義一様に $F_k(z)\to F(z)$ ならば，$F(z)\in\mathcal{O}(U)$ となる．このとき更に各 α について U 上広義一様に ${F_k}^{(\alpha)}(z)\to F^{(\alpha)}(z)$ となる．

証明　まず連続函数の広義一様収束極限として $F(z)$ は U で連続となることに注意しよう．さて，固定した $F_k(z)$ について任意の点 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in U$ に対

し，その適当な柱状近傍 $D_1\times\cdots\times D_n\Subset U$ をとって Cauchy の積分公式を適用すれば

$$F_k(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F_k(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

ここで $k\to\infty$ とすれば，仮定により $z\in D_1\times\cdots\times D_n$ のとき被積分函数は積分路 $\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n$ の上で積分変数 ζ につき一様に $F(\zeta)/(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)$ に収束する．故に極限と積分の順序交換ができ，極限函数 $F(z)$ も (2.1.1)型の表現公式を持つ．しかるに，このような表現を持つ函数が $D_1\times\cdots\times D_n$ 内で正則なことは明らかである．最後の主張は公式(2.1.2)から出る．証了．

この系はしばしば次の形で用いられる．

系 2.1.5 $F(z,t)$ は $z\in U, t\in T$ の函数でパラメータ t の値を固定したとき z について正則とする．t に関する Riemann 式(広義)積分

$$\int_T F(z,t)dt \tag{2.1.4}$$

が z につき U 上広義一様に収束すれば，積分の結果は z の正則函数となる．従って，特に $F(z,t)$ が z, t の連続函数で積分領域 T がコンパクトならば，(2.1.4)は z の正則函数となる．

実際，このとき(2.1.4)は Riemann 式近似和

$$\sum_j F(z,t_j)\Delta t_j\in\mathcal{O}(U)$$

の適当な列の広義一様収束極限となるからである．(広義積分の場合はもう一度広義一様収束極限をとればよい．)

Lebesgue 積分に対しては次が成り立つ：

系 2.1.5′ 後半の仮定に替えて，$\int_T|F(z,t)|dt$ が $z\in U$ について局所的に有界ならば，積分(2.1.4)は $z\in U$ の正則函数となる．

今度は Fubini の定理により

$$\int_T F(z,t)dt=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{\int_T F(\zeta,t)dt}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

が導かれ(2.1.4)も Cauchy の積分公式を満たすことが示される．

系 2.1.6 $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ となるためには $F(z)$ が U の各点 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ の近

傍で一様収束する Taylor 級数に展開されることが必要かつ十分である:

$$F(z)=\sum_{\alpha}\frac{F^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(z-a)^{\alpha} \tag{2.1.5}$$

ここに

$$(z-a)^{\alpha}=(z_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-a_n)^{\alpha_n} \tag{2.1.6}$$

という略記法を用いた.

証明 多項式は明らかに正則だから, Taylor 級数で表わされるような函数は多項式の広義一様収束極限として系 2.1.4 によりそれ自身正則となる. 逆に $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ とし, これが点 $a\in U$ の近傍で Taylor 級数に展開されることを見よう. a の近傍として**多重円板** $\{|z_j-a_j|<r_j,\ j=1,\cdots,n\}$ をとり, Cauchy の積分公式を適用する. 積分記号下の因子を

$$\frac{1}{\zeta_j-z_j}=\frac{1}{(\zeta_j-a_j)-(z_j-a_j)}=\frac{1}{(\zeta_j-a_j)\left(1-\dfrac{z_j-a_j}{\zeta_j-a_j}\right)}=\frac{1}{\zeta_j-a_j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_j-a_j}{\zeta_j-a_j}\right)^k$$

と変形しよう. ζ_j が積分路 $|\zeta_j-a_j|=r_j$ の上を動くとき, z を $|z_j-a_j|\leq\rho_j$ (ただし $\rho_j<r_j$) なる範囲に止めれば, 最後の級数は z_j と ζ_j について一様に絶対収束する. 故にこの級数を j について掛け合わせたものは展開や項別積分を自由に行なうことができ, 結局閉多重円板 $\{|z_j-a_j|\leq\rho_j,\ j=1,\cdots,n\}$ 上で一様に絶対収束する級数

$$F(z)=\sum_{\alpha}(z-a)^{\alpha}\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{|\zeta_1-a_1|=r_1}\cdots\oint_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{F(\zeta)d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-a_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\zeta_n-a_n)^{\alpha_n+1}}$$

が得られる. この係数は系 2.1.3 により $F^{(\alpha)}(a)/\alpha!$ に等しい. 証了.

ここで級数の収束範囲について反省しておこう.

定義 2.1.7 実数の組 $(r_1,\cdots,r_n)$ が冪級数 $\sum_{\alpha}c_{\alpha}(z-a)^{\alpha}$ の一組の**関連収束半径**であるとは, この級数が多重円板 $\{|z_j-a_j|<r_j,\ j=1,\cdots,n\}$ 内では収束し, $\{|z_j-a_j|>r_j,\ j=1,\cdots,n\}$ では発散するときをいう.

関連収束半径は次の **Lemaire の公式**を満たす.

$$\overline{\lim_{|\alpha|\to\infty}}\sqrt[|\alpha|]{|c_{\alpha}|r^{\alpha}}=1 \tag{2.1.7}$$

これは, 一変数の場合の Cauchy–Hadamard の公式に対応するものであり, 証明も全く同様である. 特に冪級数は収束多重円板内で広義一様に絶対収束していることがわかる. ただ一変数の場合と異なり, 上の定義において言及されて

いる二つの領域は $\boldsymbol{C}^n$ の分割とはほど遠いことに注意せよ．言及されていない領域での，この冪級数の収束発散は，この関連収束半径では表わせない．実際，多変数の場合には関連収束半径が沢山あり，一般にはそれらの中に最大のものは存在しない．これらすべての関連収束半径に対応する多重円板を合併したものが冪級数の広義一様収束する領域となる．系 2.1.6 の証明を見直せば次のことが知られる．

系 2.1.8 $F(z)$ は多重円板 $\{|z_j-a_j|<r_j,\ j=1,\cdots,n\}$ の内部で正則，かつこの円板の周上には $F(z)$ が解析接続できない点が存在するとせよ．このとき $(r_1,\cdots,r_n)$ は $F(z)$ の Taylor 級数(2.1.5)の一組の関連収束半径となる．

問 2.1.1　最大値原理，一致の定理，解析接続の原理等を多変数の場合に論ぜよ．

問 2.1.2　冪級数 $\sum_{\alpha} z_1 z^{\alpha}$ のすべての関連収束半径を求めよ．この級数で表わされる正則函数はどこまで解析接続されるか？　さらにこの冪級数が収束する点の全体はどのような集合となるか？　冪級数 $\sum_{\alpha}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}z^{\alpha}$ についてはどうか？

さて，先に $\boldsymbol{C}^n\cong\boldsymbol{R}^{2n}$ であることを注意した際には実座標として x, y を用いたが，ここでもう一つの形式的な実座標を導入しよう．それは $z, \bar{z}$ を用いるものである．ここに

$$z=(z_1,\cdots,z_n)=(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)$$
$$\bar{z}=(\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)=(x_1-iy_1,\cdots,x_n-iy_n)$$

これは x, y について逆に解ける：

$$x_j=\frac{z_j+\bar{z}_j}{2},\qquad y_j=\frac{z_j-\bar{z}_j}{2i},\qquad j=1,\cdots,n$$

故に，実座標 (x, y) を与えるのは形式的には $(z, \bar{z})$ を与えるのと同値である．合成函数の微分の公式を形式的に適用することにより

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_j}F(z)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)F(z)\\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}F(z)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)F(z)\end{aligned}\right.\tag{2.1.8}$$

$$dz_j=dx_j+idy_j,\quad d\bar{z}_j=dx_j-idy_j\tag{2.1.9}$$

等が得られる．特に $F(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ を函数値の実部・虚部への分解と

すれば

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j}=0 \iff \frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\partial v}{\partial y_j},\ \frac{\partial v}{\partial x_j}=-\frac{\partial u}{\partial y_j}$$

最後の関係式は (z_j 座標に関する) 有名な Cauchy-Riemann の関係式であるから，次が得られた.

定理 2.1.9　U 上の C^1 級函数 $F(z)$ が正則なためには，それが **Cauchy-Riemann の方程式系**:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}F(z)=0, \qquad j=1,\cdots,n \tag{2.1.10}$$

を満たすことが必要かつ十分である.

これは形式的にいえば，函数 $F(x,y)$ が正則とは F を実座標 $(z,\bar{z})$ の方で書き直したとき $\bar{z}$ を含まず z のみで書けるということを意味しており，正則函数という概念の意味を直観的によく表現している.

参考 2.1　i は実定数では無いので $(z,\bar{z})$ はもちろん普通の意味での実座標ではあり得ない. しかし，定理 2.1.9 を見るとこの形式的座標に実在性が伴っているように見えるから不思議である. なお，(2.1.8)-(2.1.9) のような計算は開集合 $U\subset \boldsymbol{R}^{2n}$ における $\boldsymbol{C}$-係数の反変あるいは共変ベクトルの，$\boldsymbol{C}$ 上の基底変換として

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n}\right)\longleftrightarrow\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_n},\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)$$
$$(dx_1,\cdots,dx_n,dy_1,\cdots,dy_n)\longleftrightarrow(dz_1,\cdots,dz_n,d\bar{z}_1,\cdots,d\bar{z}_n)$$

という対応を考えていると解釈すれば，数学的には何も珍奇なものではない.

次に正則函数の概念の座標変換との関係を見よう.

定義 2.1.10　$\boldsymbol{C}^n$ の開集合 U から他の複素ユークリッド空間 $\boldsymbol{C}^m$ の中への連続な写像 $F(z)=(F_1(z),\cdots,F_m(z))$ は，各成分 $F_j(z)$ が正則のとき正則な写像と呼ばれる. 特に $F(z)$ が $U\subset \boldsymbol{C}^n$ から $V\subset \boldsymbol{C}^n$ の上への一対一写像で，それ自身もその逆写像 $F^{-1}(z)$ も共に正則のときは，$F(z)$ は座標変換とも呼ばれる.

補題 2.1.11　$F(z)$ が $U\subset \boldsymbol{C}^n$ から $V\subset \boldsymbol{C}^m$ への正則写像で，$G(w)$ が $V\subset \boldsymbol{C}^m$ から $W\subset \boldsymbol{C}^l$ への正則写像ならば，合成写像 $G(F(z))$ は U から W への正則写像となる. 特に，正則函数の概念は座標に依存しない.

これは絶対収束する冪級数の変形を用いても，あるいは合成函数の微分の公

式により $\partial G(F(z))/\partial \bar{z}_j=0$ を確かめても容易に証明することができる．定義 2.1.1 で与えた正則函数の定義が座標系 $z_1, \cdots, z_n$ に完全に依存していたことを考えると，最後の主張は一応驚くべきである．

補題 2.1.12 $F(z)$ は $U\subset \boldsymbol{C}^n$ から $\boldsymbol{C}^n$ の中への正則写像とする．一点 $a\in U$ において**複素函数行列式** $\det(\partial F_k/\partial z_j)$ が 0 でなければ，$w=F(z)$ は点 $w=F(a)$ の近傍で正則な逆写像 $z=F^{-1}(w)$ を持つ．

証明 $F(z)$ を $U\subset \boldsymbol{R}^{2n}$ から $\boldsymbol{R}^{2n}$ への写像と考えて普通の意味の函数行列式を計算してみよう．$F(z)=(F_1(z), \cdots, F_n(z))$ とし，$F_k(z)=G_k(x, y)+iH_k(x, y)$ を実部・虚部への分解とすれば，函数行列式は

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial G_k(x,y)}{\partial x_j}\right) & \left(\dfrac{\partial G_k(x,y)}{\partial y_j}\right) \\ \left(\dfrac{\partial H_k(x,y)}{\partial x_j}\right) & \left(\dfrac{\partial H_k(x,y)}{\partial y_j}\right) \end{vmatrix}$$

という，n 次正方行列の 4 区劃より成る $2n$ 次実正方行列式となる．これを $\boldsymbol{C}$-係数の行列式と考え，関係式 (2.1.8) を用いて基本変形を行なえば

$$= \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial F_k}{\partial z_j}\right) & \left(\dfrac{\partial F_k}{\partial \bar{z}_j}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \bar{F}_k}{\partial z_j}\right) & \left(\dfrac{\partial \bar{F}_k}{\partial \bar{z}_j}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial F_k}{\partial z_j}\right) & 0 \\ 0 & \overline{\left(\dfrac{\partial F_k}{\partial z_j}\right)} \end{vmatrix} = \left|\det\left(\frac{\partial F_k}{\partial z_j}\right)\right|^2$$

となることが容易に確かめられる．ここで $\partial \bar{F}_k/\partial \bar{z}_j=\overline{\partial F_k/\partial z_j}$ 等を用い，また F_k が正則なことから Cauchy-Riemann の関係式を適用した．最後の量は仮定により 0 と異なるから，実解析学の知識により点 $F(a)$ の近傍で C^1 級の逆写像 $z=F^{-1}(w)$ が存在することがわかる．一方

$$0=\frac{\partial z_k}{\partial \bar{z}_j}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F_k^{-1}(w)}{\partial w_l}\frac{\partial w_l}{\partial \bar{z}_j}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F_k^{-1}(w)}{\partial \bar{w}_l}\frac{\partial \bar{w}_l}{\partial \bar{z}_j}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F_k^{-1}}{\partial \bar{w}_l}\overline{\left(\frac{\partial w_l}{\partial z_j}\right)}$$

において行列 $(\partial w_l/\partial z_j)=(\partial F_l/\partial z_j)$ は可逆であるから，これより $\partial F_k^{-1}/\partial \bar{w}_l=0$, $k, l=1, \cdots, n$. 故にこの逆写像 $F^{-1}(w)$ は正則である．証了．

本節の最後に Cauchy の積分定理の拡張について述べよう．定理 2.1.2 に相当する拡張は直ちに得られる：$F(z)$ は $\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n$ の近傍で正則，かつある γ_j の内部 D_j においては対応する変数 z_j について正則とすれば

$$\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n} F(z)dz_1\cdots dz_n = 0$$

実際，z_j に関する積分を先に行なえば一変数の知識から明らかである．この公式は座標との関連からかなり特殊なものなので，座標変換に関してもう少し一般化した公式を求めよう．一変数の場合の Cauchy の積分定理とは，$F(z)$ が正則であるような実2次元閉領域 $\bar{D}$ の境界 γ の上で $F(z)$ の一周積分を行なうと0になるということであった．(このときの境界は向きの付いた概念であったことを思い起こせ．) 一方，上に述べた多変数の例は，実 $n+1$ 次元の曲面片 $\gamma_1\times$

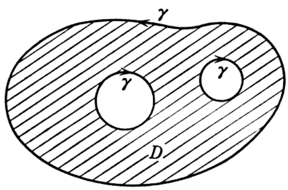


図 2.1

$\cdots\times\gamma_{j-1}\times\bar{D}_j\times\gamma_{j+1}\times\cdots\times\gamma_n$ の近傍で $F(z)$ が正則なとき，その境界 $\gamma_1\times\cdots\times\gamma_{j-1}\times\gamma_j\times\gamma_{j+1}\times\cdots\times\gamma_n$ の上で $F(z)$ を積分したら0になることを主張している．故に一般に次が予想される：

定理 2.1.13 (Poincaré)　$K\subset \boldsymbol{C}^n$ を実 $n+1$ 次元の区分的に滑らかで向きの付けられた曲面片とする．∂K を向きの付けられた K の境界とする．$F(z)$ が K の近傍で正則ならば

$$\int_{\partial K} F(z)dz_1\cdots dz_n = 0 \tag{2.1.11}$$

が成り立つ．ここで積分は $dz_k=dx_k+idy_k$ を用いて変形した後，実領域上の複素数値函数に対する普通の意味のものとして行なう．例えば ∂K のうち $z_k=\Psi_k(x)$，$k=1,\cdots,n$ $(x\in D)$ という滑らかな表示を持つ部分 $\Psi(D)$ においては，

$$\int_{\Psi(D)} F(z)dz_1\cdots dz_n = \int_D F(\Psi_1(x),\cdots,\Psi_n(x))\det\left(\frac{\Psi_k(x)}{\partial x_j}\right)dx_1\cdots dx_n \tag{2.1.12}$$

ここに現われた係数は形式的には写像 $x\mapsto\Psi(x)$ の函数行列式と同じものである．従って，$\Psi(D)$ における ∂K の向きが $D\subset\boldsymbol{R}^n$ の自然な向きと逆になっているときは上の右辺には負の符号を付ける必要がある．

公式 (2.1.11) の証明は本質的には部分積分と Cauchy–Riemann の関係式 $\partial F/\partial\bar{z}_j=0$ とから従う．一般に高次元の部分積分を代数的に定式化したものと

してStokesの定理があるが，ここではそれを用いて厳密な証明を与えておく．(これは一変数の場合Cauchyの積分定理の証明にGreenの公式を用いるやり方の拡張である．微分形式を未習の読者は二,三の簡単な領域に対して上の公式を部分積分で直接確かめて見られるとよい．) まず，Kが滑らかとすれば通常のStokesの定理より

$$\int_{\partial K} F(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n = \int_K d(F(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)$$

ここで

$$d(F(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial z_j}dz_j\wedge(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j\wedge(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n) = 0$$

となる．第一項は同じ因子の重複により，また第二項はCauchy–Riemannの関係式により消えるのである．故に(2.1.11)が得られた．Kが区分的に滑らかである場合は，滑らかな各部分毎にこの議論をあてはめればよい．内部に現われた継目の上のn次元積分は，向きの逆なものが必ず対となって現われるので全体としては打ち消し合い，後に残らない．

なお，この証明からわかるように$F(z)$はKの境界および内部の継ぎ目のところでは単に連続であればよい．それは，一変数のCauchyの定理のときと同様，境界を少し縮めて公式を作っておいて極限移行すればよいからである．同じ理由でKが有界でなくても必要な積分が絶対収束していれば公式が成り立つ．

§2 解析接続

前節では一変数函数論の類推から多変数正則函数の性質をいろいろ調べた．両者には微細な差は認められたけれども，今までのところは適当な解釈の下におおむね類推が信頼できた．この節ではその信頼を越えるような性質を含む解析接続の話に移ろう．まず，その主要な道具である**Cousin積分**から始める．

補題 2.2.1 $U_0, U_1\subset \boldsymbol{C}$，$T\subset \boldsymbol{C}^m$を領域とし，$F(z,\tau)\in\mathcal{O}((U_0\cap U_1)\times T)$を$z,\tau$の正則函数とする．もし$F(z,\tau)$が境界の一部$(\partial U_0\cap\partial U_1)\times T$の近傍に連続に延長できるならば，$F_0(z,\tau)\in\mathcal{O}(U_0\times T)$，$F_1(z,\tau)\in\mathcal{O}(U_1\times T)$で

$$F(z,\tau)=F_1(z,\tau)-F_0(z,\tau),\qquad (z,\tau)\in(U_0\cap U_1)\times T \text{ において},$$

を満たすものがとれる．

証明　パラメータ τ が入っているが本質的には一変数の場合(補題 1.5.1)と同様である．即ち，積分路 γ_0, γ_1 を図 2.2 のようにそれぞれ $\bar{U}_1, \bar{U}_0$ 内にとり，

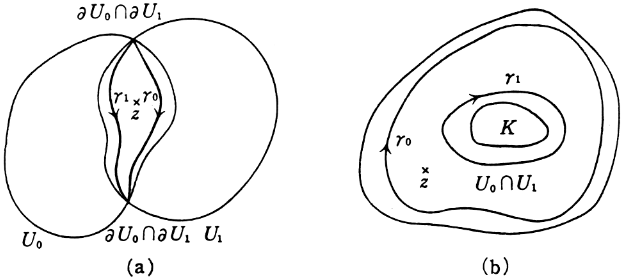


図 2.2

$U_0\cap U_1$ の境界のうち $\partial U_0\cap\partial U_1$ 以外ではそれぞれ U_1, U_0 の内部を通過するように選ぶ．$\gamma_1-\gamma_0$ が $U_0\cap U_1$ の考えている一点 z のまわりを正の向きにちょうど一周していれば，Cauchy の積分公式により

$$F(z,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{F(\zeta,\tau)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_0}\frac{F(\zeta,\tau)}{\zeta-z}d\zeta$$

が成り立つ．右辺の各積分により順に $F_j(z,\tau)$, $j=1,0$ を定めよう．γ_j を，$\partial U_0\cap\partial U_1$ の点は固定して ∂U_j の境界に近づけてゆけば，$F_j(z,\tau)\in\mathcal{O}(U_j\times T)$ がわかる．証了．

この補題の変種として領域 $U\subset\boldsymbol{C}$ とそのコンパクト部分集合 $K\subset U$ に対し $U_0=U$, $U_1=\boldsymbol{P}^1\setminus K$ という場合を考えよう．このとき $U_0\cap U_1=U\setminus K$ であり，しかも $\partial U_0\cap\partial U_1=\phi$ なので，次が得られる．

系 2.2.2　$F(z,\tau)\in\mathcal{O}((U\setminus K)\times T)$ は $F_0(z,\tau)\in\mathcal{O}(U\times T)$, $F_\infty(z,\tau)\in\mathcal{O}((\boldsymbol{P}^1\setminus K)\times T)$ を用いて $F(z,\tau)=F_\infty(z,\tau)-F_0(z,\tau)$ と分解される．この分解は $F_\infty(\infty,\tau)=0$ という条件の下に一意的である．特に $U=\{|z|<R\}$, $K=\{|z|\leq r\}$ のとき，$F(z,\tau)$ は z の **Laurent 級数**に展開される：

$$(2.2.1)\qquad F(z,\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(\tau)z^k,\qquad f_k(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\oint F(\zeta,\tau)\zeta^{-k-1}d\zeta$$

この級数の正冪の部分は $\{|z|<R\}\times T$ において，負冪の部分は $\{|z|>r\}\times T$ において，それぞれ広義一様に絶対収束する．

証明はパラメータの無い場合と同様である．この系を繰返し適用することにより多変数の Laurent 級数が得られる：

系 2.2.3 $\{r_1<|z_1|<R_1\}\times\cdots\times\{r_n<|z_n|<R_n\}\times T$ で定義された z, τ の正則函数 $F(z,\tau)$ は，この領域において広義一様に絶対収束する Laurent 展開

$$(2.2.2)\qquad F(z,\tau)=\sum_{\alpha} f_\alpha(\tau)z^\alpha,$$

$$f_\alpha(\tau)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint\cdots\oint F(\zeta,\tau)\zeta_1{}^{-\alpha_1-1}\cdots\zeta_n{}^{-\alpha_n-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

を持つ．ここに $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ は負の整数をも成分として許す多重添数である．

系 2.2.3 において Laurent 展開を許す領域が円環の直積であり，多重円板 $\{|z_1|<R_1\}\times\cdots\times\{|z_n|<R_n\}$ から同心多重円板 $\{|z_1|<r_1\}\times\cdots\times\{|z_n|<r_n\}$ をくり抜いた領域よりはかなり小さいことに注意せよ．後者のような領域で正則な函数を Laurent 展開しても負冪の項は現われず，実はもとの函数はくり抜いた小円板の上でも正則となってしまうのである．もう少し一般に次が成り立つ．

定理 2.2.4 (Hartogs) W を変数 (z,τ) の空間 $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}^m$ の領域とし，$\varDelta$ をその閉部分集合とする．次のことを仮定する．

a) $W\setminus\varDelta$ は連結．

b) $W', \varDelta'$ をそれぞれ $W, \varDelta$ の，変数 τ の空間 $\boldsymbol{C}^m$ への射影像とするとき，$W'\setminus\varDelta'\neq\phi$.

c) 射影 $\varDelta\to\varDelta'$ は**適正写像** (proper map) となる．すなわち，$K'\subset\varDelta'$ を任意のコンパクト集合とすれば，その逆像 $\varDelta\cap(\boldsymbol{C}\times K')$ は $\boldsymbol{C}^{1+m}$ のコンパクト集合である．

このとき，$W\setminus\varDelta$ で正則な函数 $F(z,\tau)$ は必ず W 上の一価な正則函数に延長さ

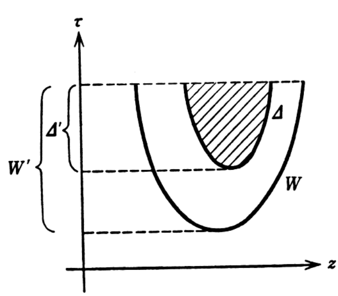


図 2.3

れる.

証明 $\tau_0\in W'\setminus\varDelta'$ をとれば，$F(z,\tau)$ は $W\cap\{\tau=\tau_0\}$ の近傍で正則である．τ_0 を連続的に $\varDelta'$ の方へ近づけてゆけば水準面 $\tau=\tau_0$ はやがて除外集合 $\varDelta$ と交わるであろうが，そこで局所的に解析接続が可能であることを示せば，結局すべての $\tau_0\in W'$ に対し $F(z,\tau)$ は $W\cap\{\tau=\tau_0\}$ の近傍に正則に延びることになる．すると $W\setminus\varDelta$ が連結であったことから，一致の定理によりこれらの局所的延長は全体として一つの函数 $F(z,\tau)$ の解析接続を定める．また $\varDelta\to\varDelta'$ が適正な写像だから射影 $W\setminus\varDelta\to W'$ は全射であり，もとの $F(z,\tau)$ が $W\setminus\varDelta$ で一価なことから，$F(z,\tau)$ のこの解析接続が多価にはならないことがわかる．

さて，局所的には，$\varDelta$ を少し大きくし W を少し小さくすることにより，W は $U\times T$ の形をしており，また $\varDelta$ は $K\times S$ の形をしているとしても一般性を失わない．ここに K は U のコンパクト部分集合，T は τ_0 の凸近傍で S は T の閉真部分集合である．系 2.2.2 により $F(z,\tau)=F_\infty(z,\tau)-F_0(z,\tau)$ と分解したとき，$\tau\in T\setminus S$ においては Cauchy の積分定理により $F_\infty(z,\tau)\equiv 0$ となる．故に一致の定理により $\tau\in T$ に対して $F_\infty(z,\tau)\equiv 0$ となり，$F(z,\tau)=-F_0(z,\tau)$ は $U\times T$ で正則となる．証了.

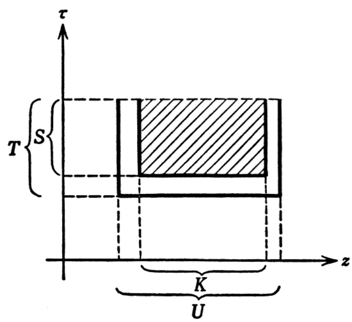


図 2.4

系 2.2.5 K を $\boldsymbol{C}^n (n\geq 2)$ の中のコンパクト集合，U を K の近傍とする．

a) $F(z)$ が $U\setminus K$ で正則で，$U\setminus K$ が連結ならば，$F(z)$ は U まで一価正則に延長できる.

b) $F(z)$ が U で正則かつ $F(z)$ の零点の集合 $\{z\in U; F(z)=0\}$ が K に含まれているならば，実は $F(z)$ は U 内で決して 0 にならない.

証明 a) は前定理の特別な場合である．b) は $1/F(z)$ が分母の零点以外で正

則なことに注意すれば a) から出る．証了．

一変数函数論においては零点が孤立していることが正則函数の大きな特徴であったが，多変数正則函数に対しては上の系により零点が孤立することは決してない．しかし，このことは両者の類似性を否定するものではなく，次のように考えればむしろ自然な拡張関係にあることがわかる．すなわち，n 変数正則函数の零点の集合 $F(z)=0$ は大雑把にいえば複素 $n-1$ 次元の（従って実 $2n-2$ 次元の）部分集合（一般に特異点を持つ多様体）をなす．この集合の余次元は複素数でいえば1だが実数でいえば2なので，その補集合は局所的に連結となり，零点集合に触れずにそのまわりを一周したりできる．$n=1$ の場合に孤立点が出てくるのはこの特別な場合にすぎない．

解析接続の基本的な定理 2.2.4 においては超平面 $\{\tau=一定\}$ による切り口を考えたが，座標変換すればこれは任意の超曲面の正則な族によりおき換えることができ，誠に応用の広い道具が得られる．以下の応用においては2次超曲面の族を考えれば十分である．実は多変数函数論の基本定理といわれるものは殆どすべて2次函数の考察から導けるのである．

定理 2.2.6 (Hörmander)　$0<\varepsilon<1/2$ を固定し，次のような集合たちを考えよう．

$$K = \{(y_1, 0); 0\leq y_1\leq 1\} \cup \{(0, y_2); 0\leq y_2\leq 1\} \subset \boldsymbol{R}^2$$

$$K_\varepsilon = \{(y_1, y_2); y_1\geq 0, y_2\geq 0, y_1+y_2\leq 1, y_1+y_2-\varepsilon({y_1}^2+{y_2}^2)\leq 1-\varepsilon\} \subset \boldsymbol{R}^2$$

このとき $(\{{x_1}^2+{x_2}^2\leq 1/\varepsilon\}+iK)\times\{0\}\subset\boldsymbol{C}^n$ の近傍で正則な函数 $F(z)$ は $(\{0\}+iK_\varepsilon)\times\{0\}$ の近傍まで解析接続される．（後の因子 $\{0\}$ は後半 $n-2$ 変数の空間

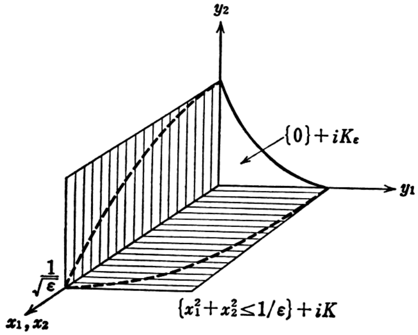


図 2.5

$\boldsymbol{C}^{n-2}$ の原点を表わす.)

証明　以下, 簡単のため後半の変数 $z_3, \cdots, z_n$ を省略し $n=2$ としよう. (一般にしても表記が面倒なだけで証明は変わらない.) 座標変換により定理2.2.4に帰着させることを考え

$$(2.2.3)\qquad \begin{cases} w_1 = z_1 \\ w_2 = z_1+z_2+i\varepsilon(z_1{}^2+z_2{}^2) \end{cases}$$

とおこう. 複素函数行列式は

$$\frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(z_1, z_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1+2i\varepsilon z_1 \\ 0 & 1+2i\varepsilon z_2 \end{vmatrix} = 1+2i\varepsilon z_2$$

であり, これは $\mathrm{Re}\,(1+2i\varepsilon z_2)=1-2\varepsilon y_2>0$ により $\{x_1{}^2+x_2{}^2\leq 1/\varepsilon\}+iK_\varepsilon$ の上で0にならない. 更に, この集合の上で(2.2.3)は大域的にも一対一である. 何となれば(2.2.3)から得られる z_2 の二次方程式は

$$z_2{}^2+\frac{1}{i\varepsilon}z_2+w_1{}^2+\frac{w_1-w_2}{i\varepsilon} = 0$$

となり, もしこの一根 $z_2{}^{(1)}$ がこの領域に含まれれば $\mathrm{Im}\,z_2{}^{(1)}\leq 1$ となるが, このとき他の根 $z_2{}^{(2)}$ は

$$\mathrm{Im}\,z_2{}^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon}-\mathrm{Im}\,z_2{}^{(1)} \geq \frac{1}{\varepsilon}-1 > 1$$

となるからである. 以上で(2.2.3)が座標変換となることがわかった.

この新しい座標の水準面

$$(2.2.4)\qquad w_2 = z_1+z_2+i\varepsilon(z_1{}^2+z_2{}^2) = i\lambda(1-\varepsilon) \qquad (\text{一定})$$

による考えている領域の切り口を見よう. まず $\lambda=0$ のとき(2.2.4)は集合 $\{x_1{}^2+x_2{}^2\leq 1/\varepsilon\}+iK_\varepsilon$ の内部には入り込まないことに注意しよう. これはそこで

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\{z_1+z_2+i\varepsilon(z_1{}^2+z_2{}^2)\} &= y_1+y_2+\varepsilon(x_1{}^2+x_2{}^2)-\varepsilon(y_1{}^2+y_2{}^2) \\ &\geq (1-\varepsilon)(y_1{}^2+y_2{}^2)+\varepsilon(x_1{}^2+x_2{}^2) > 0 \end{aligned}$$

が成り立っていることからわかる. さて, λ を $0\leq\mathrm{Re}\,\lambda\leq 1$ を満たしながら動かしてゆくと, 水準面(2.2.4)は次第に集合 $\{x_1{}^2+x_2{}^2\leq 1/\varepsilon\}+iK_\varepsilon$ の内部に入り込んでゆくが, この集合の境界とは常に屏風の背にあたる部分でしか交わらない. なぜなら, もし $y_1=1$ あるいは $y_2=1$, あるいは $x_1{}^2+x_2{}^2=1/\varepsilon$ となったとすると, 上の計算から

$$\operatorname{Re}\lambda(1-\varepsilon) = \operatorname{Im}\{z_1+z_2+i\varepsilon(z_1{}^2+z_2{}^2)\}$$
$$\geq (1-\varepsilon)(y_1{}^2+y_2{}^2)+\varepsilon(x_1{}^2+x_2{}^2) \geq 1-\varepsilon$$

となり，等号が成り立つのは $x_1=x_2=0$, $y_1=1$ または $y_2=1$, かつ $\operatorname{Re}\lambda=1$ のときだけである．故に我々の状況は新しい座標についてちょうど定理2.2.4の仮定を満たしており，従ってこのような λ の値について水準面(2.2.4)に沿って $F(z)$ は $\{x_1{}^2+x_2{}^2\leq 1/\varepsilon\}+iK_\varepsilon$ の内部に解析接続してゆける．特に λ を実数として $0\leq\lambda\leq 1$ の範囲に動かせば，$x_1=x_2=0$ のときこの水準面が集合 $\{0\}+iK_\varepsilon$ を掃過することは明らかである．証了．

上の定理の応用に際しては，y_1 軸と y_2 軸とのなす角，あるいは y_1 軸方向の屏風の幅1と y_2 軸方向の屏風の幅1は，実の線型座標変換によりそれぞれ独立に自由に変えられることに注意しよう．(これに伴い実領域においては円 $x_1{}^2+x_2{}^2\leq 1/\varepsilon$ が対応する楕円に変形される.) 本質的なことは次の二点である: 第

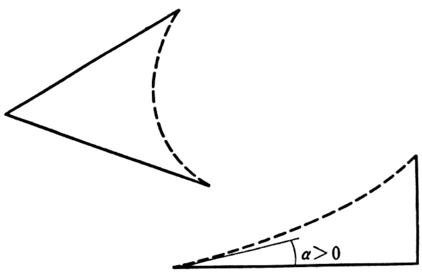


図2.6

一に斜辺をなしている円 $y_1+y_2-\varepsilon(y_1{}^2+y_2{}^2)=1-\varepsilon$ は点(1,0)または(0,1)においてそれぞれ y_1 軸または y_2 軸と正の角をもって交わっていること，第二に $\varepsilon\to 0$ とすればこの円弧は限りなく直線に近づくことである．(後者においては $\varepsilon\to 0$ とする代わりに屏風の幅1の方を0に近づけても同じ効果を持つことに注意.) これらの性質はそれぞれ重要な応用を持つ．以下にこれを述べよう．

系 **2.2.7**(柏原の補題)　$F(z)$ は $\{|x|<1\}+i\{(y_1,0,\cdots,0)\,;\,0<y_1<c\}$ の近傍で正則とする．このとき任意の $\delta<1$ に対し $K_\delta>0$ を適当にとれば，$F(z)$ は

$$\{|x|<\delta\}+i\{y;K_\delta|y'|<y_1<\delta c\}$$

まで解析接続できる．ここに $y'=(y_2,\cdots,y_n)$ とおいた．

証明　簡単のため $1-\delta\sim 0$ とする．$\rho=\rho(\delta)\leq 1-\delta$ を適当にとれば，$F(z)$ は

$$\{|x|\leq\delta\}+i\{y;y_1=1-\delta,|y'|\leq\rho\}$$

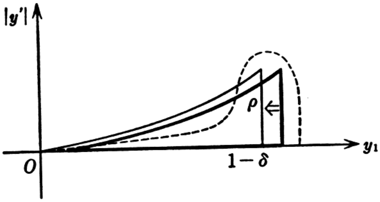


図 2.7

の近傍でも正則となるであろう．そこで y' 座標の空間の回転によって y_2 座標を勝手に選び，それについて幅がそれぞれ $1-\delta, \rho$ の屏風を図 2.7 のように用意して定理 2.2.6 を適用しつつ原点の方へ少しずつ挿入してゆけば，$x=0$ において上記の解析接続が得られる．(y_1 軸の $1-\delta \leq y_1 \leq \delta c$ の部分の近傍は，必要なら K_δ を変更することで合併する)[注6]．K_δ が局所的に一様にとれることに注意し，実座標の原点を $|x| \leq \delta$ の範囲に平行移動して同じ議論をし，こうして得られた接続領域を合併すれば，結局求める解析接続が得られる．証了．

系 2.2.8 (Bochner)　$\varDelta$ を $\boldsymbol{R}^n$ 内の連結開集合とし $\widehat{\varDelta}$ をその凸包とする．このとき**管状領域** $\boldsymbol{R}^n+i\varDelta$ で正則な函数 $F(z)$ はその凸包 $\boldsymbol{R}^n+i\widehat{\varDelta}$ まで解析接続できる．

証明　この場合，実部 $\boldsymbol{R}^n$ が無制限なので Hörmander の定理の適用に際し屏風の丈をいくらでも大きくして $\varepsilon=0$ の極限をとることができる．同時に x 座標の原点はどこに置いてもよくなる．すると y 座標の方で任意の三角形の二辺が $\varDelta$ に含まれていれば，この三角形全体の近傍に対応する管状領域まで解析接続できることがまずわかるから，これを繰返せば凸包 $\widehat{\varDelta}$ にまで到達できる．証了．

第三の応用を述べるため我々にとって後に大変重要となる幾何的概念を導入しよう．以下，我々はしばしば虚座標の空間 $\boldsymbol{R}^n_y$ 内の錐について語るが，特に

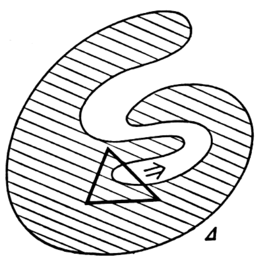


図 2.8

断わりのない限りその頂点は原点であるとする．また，そのような二つの錐 Γ, Γ' に対し記号 $\Gamma' \Subset \Gamma$ は $\bar{\Gamma}' \cap \{|y|=1\}$ が Γ の内部に含まれていることを意味する．すなわち，Γ' が Γ の中に(原点以外では)いくらかの余裕を持って含まれていることを意味する．このとき Γ' は Γ の**固有部分錐**であるという．さて，$\boldsymbol{R}^n+i\Gamma$ の形の管状領域は一般に**楔**(くさび)と呼ばれるが，これをその**刃** $\boldsymbol{R}^n$ の近傍に局所化しよう：

定義 2.2.9 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ を開集合とし，$\Gamma \subset \boldsymbol{R}_y^n$ を開錐とする．複素開集合 $U \subset \boldsymbol{C}^n$ は次の諸条件を満たしているとき $\Omega+i\Gamma 0$ 型の**無限小楔**であるという．

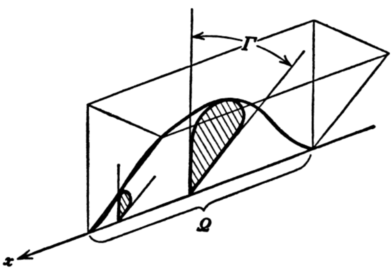


図 2.9

a) $U \subset \Omega+i\Gamma$

b) 任意の固有部分錐 $\Gamma' \Subset \Gamma$ と任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ を適当に選べば

$$U \supset \Omega_\varepsilon+i(\Gamma' \cap \{|y|<\delta\})$$

ここに $\Omega_\varepsilon=\{x \in \Omega\,;\, \mathrm{dis}\,(x, \partial\Omega)>\varepsilon\}$ は Ω を ε だけ縮めたものである．Ω はこの無限小楔の**刃**と呼ばれる．

直観的にいえば $\Omega+i\Gamma 0$ 型の無限小楔とは刃の近くで漸近的に開き Γ の楔となっているような開集合のことである．(条件 a)は少し強すぎるが話を簡単にするためこうした．) $\Omega+i\Gamma 0$ 型の無限小楔は無数に存在するが，混乱の恐れの無いときは同じ記号 $\Omega+i\Gamma 0$ でその一つを表わすことにする．また，$F(z)$ がそのような領域で正則ということを $F(z) \in \mathcal{O}(\Omega+i\Gamma 0)$ のようにも表わす．

系 2.2.10 (局所型 Bochner の定理) $F(z)$ が無限小楔 $\Omega+i\Gamma 0$ で正則なら，それは他の型の無限小楔 $\Omega+i\hat{\Gamma} 0$ まで正則に延長できる．ここに $\hat{\Gamma}$ は Γ の凸包である．

証明 今度は Hörmander の定理を適用するにあたり屏風の丈の方は Ω 内に

限られているのであるが，楔の刃に近づくとき屛風の幅の方が丈の長さに比して無限に小さくなるので，斜辺はやはり直線に近づき，従って刃に近づくにつれ $F(z)$ は $\Omega+i\widehat{\Gamma}$ にいくらでも近い領域まで解析接続されるのである．($\Omega+i\widehat{\Gamma}0$ 型の無限小楔自身は，たとえ Ω が凸であっても本当に凸な集合とは限らぬことに注意.）証了.

以上のような解析接続の諸現象は，一変数の場合と異なり $\boldsymbol{C}^n(n\geq 2)$ の領域の境界が必ずしもある正則函数の自然境界とはなり得ないことを示している．そこで，特に自然境界を持つ領域は**正則領域**と呼ばれ，$\boldsymbol{C}$ 内の領域が持ついろいろの重要な性質を共有しており，多変数函数論において(従って超函数論の理論的基礎付けにおいて）重要な役割を果たすことになる．これについては本書の後半で論じよう.

§3　正則函数の Radon 分解

前節の後半で述べた特殊な形の領域での解析接続は超函数の理論において重要な役割を果たす．そこで，本節では正則函数の Radon 分解というものを導入してこの解析接続を具体的に調べることを考えよう．まず平面 Radon 分解から始める.

$$W_0(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\frac{1}{(z\zeta)^n} \tag{2.3.1}$$

とおく．ここに $(z,\zeta)\in\boldsymbol{C}^n\times\boldsymbol{C}^n$ であり

$$z\zeta=z_1\zeta_1+\cdots+z_n\zeta_n \tag{2.3.2}$$

の略記である．また，以下しばしば使う記号として**多重符号** $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$, $\sigma_j=\pm 1$，およびその全符号 $\operatorname{sgn}\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_n$ を導入する．錐

$$\Gamma_\sigma=\{\eta\in\boldsymbol{R}^n;\ \sigma_j\eta_j>0,\ j=1,\cdots,n\} \tag{2.3.3}$$

を**第 σ 象限**と呼ぶ.

補題 2.3.1　$F(z)$ を $\boldsymbol{R}^n$ 内の直方体 $D=\{|x_j|\leq a_j,\ j=1,\cdots,n\}$ の近傍で正則な函数とするとき

$$F(z;\zeta)=\int_D F(w)W_0(z-w,\zeta)dw \tag{2.3.4}$$

は $\bigcap_{w\in D}\{\operatorname{Im}(z-w)\zeta>0\}$ なる領域で (z,ζ) の正則函数となる．したがって $\boldsymbol{S}^{n-1}$

$=\{|\xi|=1\}$ を単位球面とすれば，この上の面素に関する積分

$$F_\sigma(z)=\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}}F(z;\xi)d\xi \tag{2.3.5}$$

は楔 $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma$ の上で z の正則函数となるが，これは実は $\{x_j\neq\pm a_j,\ j=1,\cdots,n\}$ の近傍でも正則となり，そこにおいて

$$\sum_\sigma F_\sigma(z)=\begin{cases}F(z), & z\in \mathrm{Int}\,(D),\\ 0, & z\in \boldsymbol{R}^n\setminus D\end{cases} \tag{2.3.6}$$

が成り立つ．

参考 2.2 我々の直観的背景にあるのは次のような δ 函数の古典的平面波分解公式である：

$$\delta(x)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{S^{n-1}}\frac{d\omega}{(x\omega+i0)^n} \tag{2.3.7}$$

これは形式的に逆 Fourier 変換の公式

$$\delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{ix\xi}d\xi$$

において極座標 $\xi=r\omega$ を導入し，動径 r について先に積分すれば得られる：

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{ix\xi}d\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{S^{n-1}}d\omega\int_0^\infty e^{ix\omega r}r^{n-1}dr=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{S^{n-1}}\frac{d\omega}{(x\omega+i0)^n}$$

ここで，r に関する積分は部分積分を用いて形式的に計算したが，実際に意味を持つのは次の公式である．

$$\int_0^\infty e^{ipr}r^{n-1}dr=\frac{(n-1)!(-1)^n}{i^np^n},\qquad \mathrm{Im}\,p>0\ のとき. \tag{2.3.8}$$

公式(2.3.7)の確立はもちろん多変数の超函数を導入してからのことであるが，以下の話はこの背景を承知していれば，より自然に読むことができるであろう．

補題 2.3.1 の証明 $W_0(z,\zeta)$ の形からこの函数あるいは積分(2.3.4)が上記の領域で正則となることは明らかである．さらに $z\in\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma$ のとき $\xi\in\overline{\Gamma_\sigma}$ に対し $\mathrm{Im}\,z\xi>0$(のみならず各 j について $\mathrm{Im}\,z_j\xi_j>0$) が成り立つから，w に関する積分(2.3.4)は z,ξ につきこの領域で広義一様収束している．故に積分の順序変更が許され

$$F_\sigma(z)=\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}}d\omega\int_D F(w)W_0(z-w,\omega)dw$$

$$=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_D F(w)dw\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}}\frac{d\omega}{((z-w)\omega)^n}$$

となる．ここで ω に関する積分に公式(2.3.8)を逆用して変形しよう．一般に $z\in \boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma$ とすれば

$$(2.3.9)\qquad \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}}\frac{d\omega}{(z\omega)^n}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}}d\omega\int_0^\infty e^{izr\omega}r^{n-1}dr$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\overline{\Gamma_\sigma}}e^{iz\xi}d\xi$$
$$=\frac{\operatorname{sgn}\sigma}{(2\pi)^n}\int_0^{\sigma_1\infty}e^{iz_1\xi_1}d\xi_1\cdots\int_0^{\sigma_n\infty}e^{iz_n\xi_n}d\xi_n$$
$$=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\frac{\operatorname{sgn}\sigma}{z_1\cdots z_n}$$

従って

$$F_\sigma(z)=\frac{\operatorname{sgn}\sigma}{(2\pi i)^n}\int_{-a_1}^{a_1}\cdots\int_{-a_n}^{a_n}\frac{F(w)}{(w_1-z_1)\cdots(w_n-z_n)}dw_1\cdots dw_n$$

が得られた．最後の表現は $\sigma_j\operatorname{Im}z_j>0$ において有効であったが，$F(w)$ の正則性により積分路を各変数についてこれと反対側の半平面に少しずらすことができ，これにより z は $x_j\neq\pm a_j$, $j=1,\cdots,n$ なる実領域の近傍まで動くことができる．これで $F_\sigma(z)$ の正則性の主張が示された．

さて，こうして解析接続された $F_\sigma(z)$ を σ につき総和すれば，ちょうど

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(w)dw}{(w_1-z_1)\cdots(w_n-z_n)}$$

において $\gamma_j=\gamma_j^--\gamma_j^+$ に対応する展開を行なったものが得られる．ここに $\gamma_j^\pm$ は $-a_j$ から a_j に到る，それぞれ上及び下半平面を通る道である．故に Cauchy の積分公式により(2.3.6)が成り立つ．

系 2.3.2　$f(x)$ を台が有界な C^n 級函数とするとき

$$(2.3.10)\qquad F_0(z;\zeta)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(w)W_0(z-w,\zeta)dw$$

は $\bigcap_{w\in\operatorname{supp}f}\{\operatorname{Im}(z-w)\zeta>0\}$ で (z,ζ) の正則函数となり，さらに $\boldsymbol{R}^n\times(\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\})$ まで連続に延びる．この延長された函数 $F_0(x;\xi)$ に対し

$$(2.3.11)\qquad \int_{S^{n-1}}F_0(x;\xi)d\xi=f(x)$$

が成り立つ．

証明 正則域の主張は上の補題と同様に示される．公式

$$(\zeta\cdot D_z)^n \log(z\zeta) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(z\zeta)^n}\zeta^{2n}$$

に注意し$\left(ここに\zeta\cdot D_z=\zeta_1\dfrac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+\zeta_n\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)$，部分積分を用いれば

$$F_0(z;\zeta) = -\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{R^n}\frac{1}{\zeta^{2n}}(\zeta\cdot D_w)^n f(w)\cdot\log\{(z-w)\zeta\}\,dw \tag{2.3.12}$$

が得られる．仮定により $f(x)$ は C^n 級，また log は可積分函数なので，この式は z,ζ を実軸 $\boldsymbol{R}^n\times(\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\})$ に近づけるとき x,ξ の連続函数として広義一様に収束する．(Lebesgue の収束定理を未習の読者は定理 1.3.13 の証明に倣って細部を補われよ．) 最後にこうして得られた連続函数 $F_0(x;\xi)$ に対し (2.3.11) を示そう．

$$f_\varepsilon(z) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,\varepsilon)^n}e^{-(z/\varepsilon)^2} * f(x) \tag{2.3.13}$$

とおく．ここに

$$z^2 = z_1{}^2+\cdots+z_n{}^2 \tag{2.3.14}$$

等の略記号を用いている．$\varepsilon\downarrow 0$ のとき n 階以下の導函数も込めて一様に $f_\varepsilon(x)\to f(x)$ となることが知られている．(第一章の参考 1.3 を見よ．) 故に $f_\varepsilon(x)$ から公式 (2.3.12) により定まる連続函数を $F_0{}^\varepsilon(x;\xi)$ と書けば，$\varepsilon\to 0$ のとき一様に $F_0{}^\varepsilon(x;\xi)\to F_0(x;\xi)$．従って

$$\int_{S^{n-1}}F_0(x;\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{S^{n-1}}F_0{}^\varepsilon(x;\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_\sigma\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}}F_0{}^\varepsilon(x;\xi)d\xi$$

さて，$f_\varepsilon(x)$ は台が有界ではないが遠方で非常に早く減少しているので，やはり部分積分が意味を持ち，$F_0{}^\varepsilon(x;\xi)$ は (2.3.10) により $f_\varepsilon(x)$ から定まる正則函数 $F_0{}^\varepsilon(z;\zeta)$ を実軸に延長したものとなっている．故に $\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}}F_0{}^\varepsilon(x;\xi)d\xi$ も $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma$ 上の正則函数 $\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}}F_0{}^\varepsilon(z;\xi)d\xi$ の実軸への延長である．しかるに $f_\varepsilon(z)$ の正則性と遠方での減少性を用いて補題 2.3.1 の計算を追えば，後者の σ に関する総和が $f_\varepsilon(x)$ に戻ることが全く同様にして示される．(ここでは $D=\boldsymbol{R}^n$ となっている．) 故に

$$\int_{S^{n-1}}F_0(x;\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}f_\varepsilon(x) = f(x)$$ 証了．

平面 Radon 分解は大変美しくまた便利なものであるが超函数論の基礎付け

をする段階では分解成分 $W_0(z,\zeta)$ が $x\xi=0$ という実超平面に沿って特異性を持つことが邪魔になる．そこで，この分解を少し ねじ曲げて実の特異性が原点にしか現われないようなものを作ろう．やや天下り的だが次の函数を考える．

(2.3.15)

$$W_\alpha(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\frac{(1-i\alpha z\zeta/\sqrt{\zeta^2})^{n-1}-\alpha^2(1-i\alpha z\zeta/\sqrt{\zeta^2})^{n-2}(z^2-(z\zeta)^2/\zeta^2)}{\{z\zeta+i\alpha(z^2\sqrt{\zeta^2}-(z\zeta)^2/\sqrt{\zeta^2})\}^n}$$

ここで $(z,\zeta)\in\boldsymbol{C}^n\times\boldsymbol{C}^n$ であり，簡単のために(2.3.2), (2.3.14)等の略記法を用いている．$W_\alpha(z,\zeta)$ は ζ の正 $-n$ 次同次函数である．(すなわち ζ を $t>0$ 倍すると t^{-n} が外へ出る.) ζ が長さ1の実ベクトルのときは $\sqrt{\zeta^2}$ が省略でき，表記が少し簡単になる．

補題 2.3.3　$\Phi_\alpha(z,\zeta)=z\zeta+i\alpha(z^2\sqrt{\zeta^2}-(z\zeta)^2/\sqrt{\zeta^2})$,

$$\Psi_{\alpha,j}(z,\zeta)=\zeta_j+i\alpha(z_j\sqrt{\zeta^2}-\zeta_j(z\zeta)/\sqrt{\zeta^2}),\qquad j=1,\cdots,n$$

とおき，最後の成分を持つベクトルを $\Psi_\alpha(z,\zeta)$ とすれば，$\Phi_\alpha(z,\zeta)=\langle z,\Psi_\alpha(z,\zeta)\rangle$ であり

$$W_\alpha(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\frac{\det(\partial\Psi_{\alpha,j}/\partial\zeta_k)}{\Phi_\alpha(z,\zeta)^n} \tag{2.3.16}$$

これは要するに線型代数の計算にすぎないので読者の演習問題としておこう．以下において $W_\alpha(z,\zeta)$ の分子の具体的な形が必要となることはなく，(2.3.16)を定義と考えておけば十分である．

補題 2.3.4　$\alpha>0$ とし $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$ と書こう．Γ を任意の開凸錐とし，Γ° をその双対錐とする(定義3.1.6参照)．ξ が Γ° の内部 $\mathrm{Int}(\Gamma^\circ)$ を動くとき $2n$ 次元の開凸錐 $\varDelta\subset\boldsymbol{R}^n_y\times\boldsymbol{R}^n_\eta$ で $\varDelta\cap\{\eta=0\}\supset\Gamma$ なるものが存在し，$W_\alpha(z,\zeta)$ は無限小楔 $\boldsymbol{R}^n\times\mathrm{Int}(\Gamma^\circ)+i\varDelta 0$ で (z,ζ) について正則となる．$W_\alpha(z,\zeta)$ はさらに実開集合 $(\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\})\times\mathrm{Int}(\Gamma^\circ)$ の近傍まで解析接続できる．特に $\zeta=\xi\in\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ を固定したとき，$W_\alpha(z,\xi)$ は z の函数として半空間 $\{y\xi>0\}$ の開きを持つ無限小楔

$$\boldsymbol{R}^n+i\{y\xi>\alpha(y^2|\xi|-(y\xi)^2/|\xi|)\} \tag{2.3.17}$$

で正則であり，さらに $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ の複素近傍

$$|y\xi|+\alpha(y^2|\xi|-(y\xi)^2/|\xi|)<\frac{1}{4}\{|x\xi|+2\alpha(x^2|\xi|-(x\xi)^2/|\xi|)\} \tag{2.3.18}$$

まで解析接続できる.

証明　多価函数 $\sqrt{\zeta^2}$ は $\boldsymbol{R}^n_\xi\setminus\{0\}$ の複素近傍 $\eta^2<\xi^2$ では一価正則である. 故に $W_\alpha(z,\zeta)$ はそこで更に分母が 0 とならなければ正則である. まず, $\zeta=\xi\in\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ を固定した場合の主張を示そう. $W_\alpha(z,\xi)$ の ξ に関する同次性と球対称性により $\xi=(1,0,\cdots,0)$ のときに (2.3.17) および (2.3.18) が分母の零点を含ま

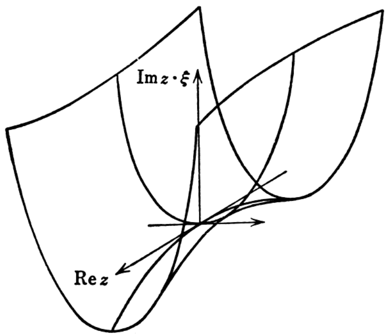


図 2.10

ないことを示せばよい. さてこのときの分母の因子は $z_1+i\alpha z'^2$ と書かれる. ここに $z'=(z_2,\cdots,z_n)$ とおいた. 従って $z'^2=z_2{}^2+\cdots+z_n{}^2$ の意である. まず虚部を見よう.

$$\operatorname{Im}\{z_1+i\alpha z'^2\} = y_1+\alpha(x'^2-y'^2) \geq y_1-\alpha y'^2$$

故に (2.3.17) においてこれは正となり, $W_\alpha(z,\xi)$ はそこで正則である. 一方, 実部は $\operatorname{Re}\{z_1+i\alpha z'^2\}=x_1-2\alpha x'y'$. 故に

$$|\operatorname{Re}\{z_1+i\alpha z'^2\}| \geq |x_1|-2\alpha|x'|\,|y'| \geq |x_1|-\alpha|x'|^2-\alpha|y'|^2$$

となる. 従って, $|x_1|\geq 2\alpha|x'|^2$ なら

$$|\operatorname{Re}\{z_1+i\alpha z'^2\}| \geq \frac{|x_1|+2\alpha|x'|^2}{4}-\alpha|y'|^2$$

だから, この最後の量が正なら実部が 0 と異なる. また, $|x_1|<2\alpha|x'|^2$ なら虚部の評価に戻って

$$\operatorname{Im}\{z_1+i\alpha z'^2\} = y_1+\alpha|x'|^2-\alpha|y'|^2 \geq \frac{|x_1|+2\alpha|x'|^2}{4}-\alpha|y'|^2-|y_1|$$

だからこの最後の量が正なら良い. 故にいずれにしても (2.3.18) は分母の零点を含まないことがわかる.

最後に前半の (z,ζ) に関する正則性の主張は以上に示したことと柏原の補題（系 2.2.7）とを組み合わせれば得られる．さらに上と同様にして

$$\mathrm{Im}\{z\zeta+i\alpha(z^2\sqrt{\zeta^2}-(z\zeta)^2/\sqrt{\zeta^2})\}$$

を調べれば錐 Δ の大きさをやや具体的に与えることもできるが，面倒なのと以下不要なので省略する．証了．

補題 2.3.5　$f(x)$ を台がコンパクト集合 K に含まれる C^n 級函数とし

$$F_\alpha(z;\zeta)=\int_{R^n}f(w)W_\alpha(z-w,\zeta)dw \tag{2.3.19}$$

とおく．$F_\alpha(z;\zeta)$ は補題 2.3.4 に述べられた無限小楔で (z,ζ) の正則函数となり，さらに $(\boldsymbol{R}^n\setminus K)\times(\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\})$ の近傍に解析接続される．また $F_\alpha(z;\zeta)$ は $\boldsymbol{R}^n\times(\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\})$ まで連続に延び，この延長された函数 $F_\alpha(x;\xi)$ について

$$\int_{S^{n-1}}F_\alpha(x;\xi)d\xi=f(x) \tag{2.3.20}$$

が成り立つ．

証明　まず $F_\alpha(z;\zeta)$ の正則性の主張を示そう．表示(2.3.19)において補題 2.3.4 に述べられた $W_\alpha(z,\zeta)$ の正則域を考慮すれば，$F_\alpha(z;\zeta)$ が $W_\alpha(z,\zeta)$ の正則域を実軸方向に K だけずらして共通部分をとったようなところで正則となることがわかり，主張が示された．

次にこれを実軸に延長するため系 2.3.2 と同様の部分積分を用いる．まず

$$(\zeta\cdot D_z)^n\log(\Phi_\alpha(z,\zeta))=\frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{\Phi_\alpha(z,\zeta)^n}\zeta^{2n}$$

に注意しよう．ここに Φ_α は補題 2.3.3 で与えられたものである．これより

$$F_\alpha(z;\zeta)=-\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{R^n}\frac{1}{\zeta^{2n}}(\zeta\cdot D_w)^n f(w)\cdot\log\Phi_\alpha(z-w,\zeta)dw$$

となり，$F_\alpha(z;\zeta)$ が実軸まで連続に延長できることがわかる．

最後に(2.3.20)を示そう．系 2.3.2 と同様の極限論法により $f(x)$ の代わりに(2.3.13)の $f_\varepsilon(x)$ に対して等号を示しておけば十分である．これを改めて $f(x)$ と書こう．このとき $z\in\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma 0$ とすれば

$$\begin{aligned}F_{\alpha,\sigma}(z)&=\int_{\Gamma_\sigma\cap S^{n-1}}F_\alpha(z;\omega)d\omega \\ &=\int_{R^n}f(w)dw\int_{\Gamma_\sigma\cap S^{n-1}}W_\alpha(z-w,\omega)d\omega\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

ここで公式(2.3.8)と補題2.3.3により

$$\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}} W_\alpha(z,\omega)d\omega = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}} \frac{\det(\partial\Psi_{\alpha,j}/\partial\xi_k)}{\Phi_\alpha(z,\omega)^n}d\omega$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\overline{\Gamma_\sigma}} e^{i\Phi_\alpha(z,\xi)}\det\left(\frac{\partial\Psi_{\alpha,j}}{\partial\xi_k}\right)d\xi$$

この積分は境界を無視すれば(2.3.9)の積分路をずらしたものになっている．そこで

$$\overline{\Gamma_\sigma}^z:\quad \zeta = \Psi_\alpha(z,\xi),\qquad \xi\in\overline{\Gamma_\sigma}$$

$$\partial_j\overline{\Gamma_\sigma}^z:\quad \zeta = \Psi_t(z,\xi),\qquad 0\le t\le\alpha,\ \xi\in\overline{\Gamma_\sigma}\cap\{\xi_j=0\},\ j=1,\cdots,n$$

という積分路を導入し $\check{\zeta}_j=(\zeta_1,\cdots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\cdots,\zeta_n)$ 等と書けば，Poincaré の定理により上の積分は

(2.3.22)

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\overline{\Gamma}_{\sigma^z}} e^{iz\zeta}d\zeta = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\overline{\Gamma}_\sigma} e^{iz\xi}d\xi + \sum_{j=1}^n(-1)^j\sigma_j\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\partial_j\overline{\Gamma}_{\sigma^z}} e^{i\check{z}_j\check{\zeta}_j - tz_j{}^2|\xi|}d\zeta$$

と書き直される注7)．(各項の符号は境界の向き付けを考慮して決められている．また，無限遠における積分路変更は一様収束により許されている.) ここで右辺の第一項は(2.3.9)で計算したように Cauchy 核を与える．また，第二項中の $\partial_j\overline{\Gamma_\sigma}^z$ 上の積分は函数行列式を計算することにより結局 t と ξ_j による $\{0\le t\le\alpha\}\times(\overline{\Gamma_\sigma}\cap\{\xi_j=0\})$ 上の積分に書き直される．故に，この項はやはり $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma 0$ において正則となる．のみならず指数函数の位相の部分に，もはや $iz_j\xi_j$ という項が存在しないため，この積分は z_j については $|\mathrm{Im}\, z_j|\le|\mathrm{Re}\, z_j|$ という，符号に無関係な実軸の近傍で正則となる．さらに，隣の象限 $\bar{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{j-1},-\sigma_j,\sigma_{j+1},\cdots,\sigma_n)$ に対する成分の同様の分解から得られる対応項と符号が逆になっている．

以上の計算結果を(2.3.21)に代入し σ について総和をとろう．(2.3.22)の第一項からは明らかに $f(z)$ が得られる．また(2.3.22)の第二項から得られる項は w に関する積分を適当に複素領域にずらせば，いずれも実軸の近傍に解析接続されることがわかる．こうして解析接続されたものの σ に関する総和は隣同士の象限の境界上の積分が二つずつ互いに打ち消し合っていることから0に等しい．以上で(2.3.20)が示された．証了.

上の補題，あるいは系2.3.2において，正則函数 $F_\alpha(z;\zeta)$ を定義するだけな

ら $f(x)$ は L_1 級函数というだけで（あるいは Schwartz の分布でも）構わないことに注意せよ．（この函数は実際に後でそのような場合に用いられる．）

系 2.3.6　$\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ の近傍において普通の意味で

$$\int_{S^{n-1}} W_\alpha(z, \xi) d\xi = 0$$

が成り立つ．この積分は z につき広義一様収束する．

証明　積分が広義一様収束し，従って z のある正則函数 $F(z)$ を定めることは $W_\alpha(z, \zeta)$ の正則性より明らかだから，値のみを調べればよい．それも実軸の上で調べておけば十分である．さて，$\varphi(x)$ を台が有界な C^n 級函数で $\int \varphi(x) dx = 1$ を満たすものとしよう．補題 2.3.5 により

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} F(x-w) \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) dw = \int_{S^{n-1}} d\xi \int_{\boldsymbol{R}^n} W_\alpha(x-w, \xi) \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) dw = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

が成り立っている．ここで厳密には z から x に移るとき解析接続の手続きが入っているわけであるが，$x \neq 0$ を固定すれば ε が十分小さいとき実際に積分にかかわる変数 w の値に対して $x-w \neq 0$ となり，解析接続の結果は上の表示に帰着する．さて，$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば右辺は $x \neq 0$ において 0 に収束し，一方，左辺は $x \neq 0$ において広義一様に $F(x)$ に収束する．($F(x)$ の遠方を切り落としてしまえば第一章の参考 1.3 に帰着する．）これで主張が証明された．

定理 2.3.7　$D \subset \boldsymbol{R}^n$ を区分的に滑らかな境界を持つ有界閉領域とし，$B \subset \boldsymbol{R}^n_y$ を点 $a \in \boldsymbol{R}^n_y$ の近傍とする．管状集合 $D+iB$ の近傍で正則な函数 $F(z)$ に対し次の曲面 Radon 分解の公式が成り立つ．

$$F_\alpha(z; \zeta) = \int_{D+i\{a\}} F(w) W_\alpha(z-w, \zeta) dw \tag{2.3.23}$$

$$\int_{S^{n-1}} F_\alpha(z; \xi) d\xi = \begin{cases} F(z), & z \in \operatorname{Int}(D) + i\{a\} \text{ に対し}, \\ 0, & z \in (\boldsymbol{R}^n \setminus D) + i\{a\} \text{ に対し}. \end{cases} \tag{2.3.24}$$

分解成分 $F_\alpha(z; \zeta)$ は $\operatorname{Im} \zeta = 0$, $\xi \neq 0$, $z \in \boldsymbol{R}^n + i\{y\xi > \alpha(y^2|\xi| - (y\xi)^2/|\xi|)\} + i\{a\}$ の近傍で $z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ の正則函数となる．さらに $\boldsymbol{R}^n \setminus \partial D$ の α のみに依存する一定の複素近傍 D_α が存在し，$F_\alpha(z; \zeta)$ は $\operatorname{Im} \zeta = 0$, $\xi \neq 0$, かつ $z \in (D_\alpha + i\{a\}) \cap ((\boldsymbol{R}^n \setminus D) + i\boldsymbol{R}^n)$ あるいは $z \in (D_\alpha + i\{a\}) \cap (D+iB)$ の近傍でも z, ζ の正則函数となる．積分 (2.3.24) は z につきこの領域で広義一様収束する．

証明　簡単のため平行移動により $a=0$ とする．まず分解成分 $F_\alpha(z; \zeta)$ の正

則性を見よう．第一の主張および第二の主張の D の外での正則性は補題 2.3.5 と同様である．D_α としては，集合(2.3.18)における原点を ∂D の各点に平行移動したもの全部の共通部分をとったものを採用する．これが $\boldsymbol{R}^n\setminus\partial D$ の複素近傍となることは(2.3.18)の方程式を用いて初等的に示せるので省略する．次に $F_\alpha(z;\zeta)$ の $\mathrm{Int}\,(D)$ における正則性を示すため，$b\in B$ を任意に選んで(2.3.23)における積分路を複素領域に変形し，

$$\begin{cases} w\mapsto w+itb, & 0\le t\le 1,\ w\in\partial D, \\ w\mapsto w+ib, & w\in \mathrm{Int}\,(D) \end{cases}$$

という二つの曲面片から成るものにとり替えてみる(Poincaré の定理)．$(y-b)\cdot\xi>\alpha((y-b)^2|\xi|-((y-b)\cdot\xi)^2/|\xi|)$，かつ ζ が ξ に十分近ければ，この積分路は $F(w)W_\alpha(z-w,\zeta)$ の正則域に収まる．この変形により w が実軸から離れた分だけ z は実軸を越えて動くことができる．積分変数 w が特に ∂D 上にあるときの $W_\alpha(z-w,\zeta)$ の正則域をも考慮すれば，結局 z の動ける範囲は $D_\alpha\cap(D+iB)$ に等しく，従って $F_\alpha(z;\zeta)$ はここで正則となることがわかる．

次に(2.3.24)を示そう．D の外で 0 になることは系 2.3.6 から積分順序変更で直ちに得られる．次に D の内点 x に対しては，この点の近傍で 1 に等しく，また台が $\mathrm{Int}\,(D)$ に含まれているような C^n 級函数 $\varphi(x)$ を選んで

$$F_\alpha(z;\zeta)=F_{\alpha,1}(z;\zeta)+F_{\alpha,2}(z;\zeta),$$

$$F_{\alpha,1}(z;\zeta)=\int_D\varphi(w)F(w)W_\alpha(z-w,\zeta)dw,$$

$$F_{\alpha,2}(z;\zeta)=\int_D(1-\varphi(w))F(w)W_\alpha(z-w,\zeta)dw$$

と分解してみる．すると $\int_{S^{n-1}}F_{\alpha,1}(x;\xi)d\xi$ は補題 2.3.5 により $\varphi(x)F(x)$ に等しく，また $\int_{S^{n-1}}F_{\alpha,2}(x;\xi)d\xi$ は再び系 2.3.6 により点 x の近傍で 0 に等しい．故に等式(2.3.24)が成り立つ．証了．

以下の応用においては大概の場合パラメータ α の値を 1 にとれば話が済む．故に簡単のためこのときの $W_\alpha(z,\zeta)$ を $W(z,\zeta)$ と記して用いることにする．念のため $\zeta=\omega$ が長さ 1 の実ベクトルのとき簡単化された $W(z,\omega)$ の表示を再記しておこう．

$$W(z,\omega)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\frac{(1-iz\omega)^{n-1}-(1-iz\omega)^{n-2}(z^2-(z\omega)^2)}{\{z\omega+i(z^2-(z\omega)^2)\}^n} \tag{2.3.25}$$

付記　多変数函数論の準備として当座はここに述べたことで十分だが，更に知識を補われたい方には一松[1]，Hörmander(笠原訳)[1]，Gunning-Rossi[1]等が良い参考書である．本書後半でももう少し進んだ議論をする．それまではこれらの参考書は高級すぎるかも知れない．多変数の積分路変更に際して§1でStokesの定理を引用したが，本巻を読む分には定理2.1.13を認めれば足りる．勉強したい読者のためには松島[1]を参考書として挙げておく．

§2に述べた柏原の補題は簡単だが超函数論にとって極めて重要なものである．ここで述べたようにHörmanderの定理(Hörmander[1])に拠り，Bochnerの定理と統一して理解するやり方は小松の創意である．(注34)

§3は特論であり，上記文献は参考にはならない．平面波分解の方はF. John[1]，Gelfand-Shilov[1]を始め，二,三の古典的文献があるが，曲面波分解の方は柏原による発見自身がかなり最近のことである．(曲面波といっても実の座標変換ではないので散乱理論にも対応する例はないであろう．) Schwartzの分布を既習の読者には，あるいは金子[1]の証明の方が簡明かもしれない．

第2章の問題

問題1　Γ_0, Γ_1を開凸錐とし$\Gamma_0 \cup \Gamma_1$も再び凸錐になるとする．このとき，$F(z) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_0 \cap \Gamma_1)$に対し$F_j(z) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_j)$，$j=0,1$を選んで$F(z)=F_1(z)-F_0(z)$と分解できる．[曲面波分解を用い，核を多項式で近似する．]

問題2　$\boldsymbol{C}^2$の領域$\{\mathrm{Im}\, z_1 > 0\} \cap \{\mathrm{Im}\, z_2 > 0\}$で正則な函数$F(z)$は$\{\mathrm{Im}\, z_1 > 0\}$で正則な函数と$\{\mathrm{Im}\, z_2 > 0\}$で正則な函数の差の形に分解できるか？[なお，例3.1.10 c)を参照]

問題3　Hörmanderの定理2.2.6において，延長された函数が$(\{0\}+iK_\varepsilon)\times\{0\}$でとる値は，与えられた函数のもとの領域における最大値$\sup\{|F(z)|; z \in (\{x_1^2+x_2^2 \le 1/\varepsilon\}+iK)\times\{0\}\}$で抑えられる．このことに注意して柏原の補題を次のように精密化せよ：$F(z)$は$\{|x|<1\}+i\{(y_1, 0, \cdots, 0); 0<y_1<c\}$の近傍で正則，かつ各線分$\{x\}+i\{(y_1, 0, \cdots, 0); 0<y_1<c\}$の上で

$$|F(z)| \le \frac{C_x}{|y_1|^m}$$

という評価を満たしているとする．ただし，C_xはxに対し局所的に有界に依存する定数である．このとき，任意の$\delta<1$に対しK_δを適当にとれば，$F(z)$は$\{|x|<\delta\}+i\{y; K_\delta|y'|<y_1<\delta c\}$まで解析接続され，かつそこで

$$|F(z)| \le \frac{K_\delta}{|y_1|^m}$$

を満たす．[最大値原理]

問題4　注8参照．

第3章　多変数の超函数

この章では多変数超函数の概念に直観的に習熟することを目標とする．多変数超函数はもともと相対コホモロジーとして定義されたものであり，それに続く理論も高度に抽象的な代数学を用いて記述されて来たが，ここでは正則函数の境界値という直観的立場でできる限り押し通してみることにする．このようなやり方は以前は多変数超函数の直観に訴えた説明としての補助的意味しか無かったが，前章末に述べたRadon 変換の理論の最近の発展により，超函数論の基礎付けの本質的な部分に対して厳密な数学としての意味を持ち得るようになったものである．

§1　直観的定義

さて，多変数の函数とは何であるか？　これは非常に難しい問題を含んでおり，しかも我々は未だに自明でない多変数函数の例をそう多くは知らないのであるが，自明な例ならば一変数函数の組み合わせでいくらでも作ることができる．例えば，変数 x_1 の一変数函数, …, 変数 x_n の一変数函数をそれぞれ用意して掛け合わせれば，ここに一つの n 変数函数が得られる．これを超函数の場合にやってみれば，例えば

$$\frac{1}{x_1+i0}\cdots\frac{1}{x_n+i0}$$

を得る．これは，第一象限 $\boldsymbol{R}^n+i\{y_1>0, \cdots, y_n>0\}$ という楔で正則な函数 $1/z_1\cdots z_n$ の実軸への境界値と思うことができる．さらに，形式的な展開により

$$(3.1.1) \qquad \delta(x) \underset{\text{定義}}{=} \delta(x_1)\cdots\delta(x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{-2\pi i}\left(\frac{1}{x_j+i0} - \frac{1}{x_j-i0}\right)$$

$$= \frac{1}{(-2\pi i)^n}\sum_{\sigma}\frac{\operatorname{sgn}\sigma}{(x_1+i\sigma_1 0)\cdots(x_n+i\sigma_n 0)}$$

を得る．ここに $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$，$\sigma_j=\pm 1$ は多重符号であり $\operatorname{sgn}\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_n$．第 σ 象限を(2.3.3)のように Γ_σ で表わすことにすれば，(3.1.1)の各項はそれぞれ正則函数 $\dfrac{1}{(-2\pi i)^n}\dfrac{\operatorname{sgn}\sigma}{z_1\cdots z_n}$ の楔 $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma$ からの境界値となっている．

これから類推して次の定義を得る．

定義 3.1.1 $F_j(z)$ を無限小楔 $\Omega+i\Gamma_j 0$ で定義された正則函数とする $(j=1, \cdots, N)$．可換な形式和(**境界値表示**)

$$(3.1.2) \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0)$$

は Ω 上の一つの超函数と呼ばれる．$\{F_j(z)\}_{j=1}^N$ は超函数 $f(x)$ の一組の定義函数と呼ばれる．もし $\Gamma_j\cap\Gamma_k \neq \phi$ なら次のような項の縮約が許される：

$$(3.1.3) \qquad F_j(x+i\Gamma_j 0)+F_k(x+i\Gamma_k 0) = (F_j+F_k)(x+i\Gamma_j\cap\Gamma_k 0)$$

ここに F_j+F_k は共通の定義域における正則函数の通常の和である．逆に，もしある F_j が(より広い楔の上の)二つの正則函数の和に分解されるときは(3.1.3)式の逆の変形が許される．このような変形の結果，項が一つも無くなったときは，もとの超函数は 0 と同一視される．

注意 Bochner の定理の局所形(系 2.2.10)により，$F(z)$ が無限小楔 $\Omega+i\Gamma 0$ で正則なら実は $\Omega+i\widehat{\Gamma}0$ でも正則となる．ここに $\widehat{\Gamma}$ は Γ の凸包である．故にわれわれは一般性を失うことなく上の表示(3.1.2)において各 Γ_j は凸と仮定できる．

こうして定義された Ω 上の超函数の全体を $\mathcal{B}(\Omega)$ で表わそう．正則函数に対する $\boldsymbol{C}$-線型演算から $\mathcal{B}(\Omega)$ の $\boldsymbol{C}$-線型空間としての構造が自然に定まる．また，$\Omega'\subset\Omega$ に対し $\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma 0)\ni F(z)\mapsto F(z)|_{\Omega'+i\Gamma 0}\in\mathcal{O}(\Omega'+i\Gamma 0)$ という制限写像から自然に $\mathcal{B}(\Omega)\to\mathcal{B}(\Omega')$ という制限写像が定義される．このとき $\Omega\mapsto\mathcal{B}(\Omega)$ が $\boldsymbol{C}$-線型空間の準層となることは明らかであるが，さらに次の定理が成り立つ．

定理 3.1.2 $\Omega\mapsto\mathcal{B}(\Omega)$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上の脆弱層 $\mathcal{B}$ をなす．(すなわち，超函数は局所的構成が可能な函数に類似の概念であり，しかも局所的に与えられた超函数はいつでも全体まで延長できる．) 実解析函数の層 $\Omega\mapsto\mathcal{A}(\Omega)$ は次の対応によ

り $\mathcal{B}$ の部分層となる.

$$\mathcal{A}(\Omega) \ni \varphi(x) \longmapsto \varphi(x+i\Gamma 0) \in \mathcal{B}(\Omega).$$

ここで Γ は任意の開凸錐でよく $\boldsymbol{R}^n$ でも構わない.

実開集合 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ に対しその複素近傍とかその上の実解析函数とかの概念は一変数の場合と全く同様に定義するのである(定義1.1.1及び例1.2.3b)を見よ).

この定理の証明は本書後半において与えることとし，ここでは公理として認めよう（ただし本章では $\mathcal{B}$ の脆弱性は用いていない). 実解析函数 $\varphi(x)$ に対し形式的記号 $\varphi(x+i\Gamma 0)$ が超函数として0なら $\varphi(x)\equiv 0$ というのは当り前のようだが今すぐ証明できないのは，上で与えた“超函数が0に等しい”ことの定義が数学的定式化として不十分なためである.

参考3.1　上に与えた $\mathcal{B}(\Omega)$ の定義では(3.1.2)という表現を用いた. 応用上はこれが一番便利でわかり易いと思われるが理論的には次の二つの相反する理由により不完全である: まず第一に上の表現は座標変換で不変でない. 座標変換により一般には $\Omega+i\Gamma 0$ という直積状構造はねじ曲げられ，錐 Γ は $x\in\Omega$ とともに大きさや向きを変える. そのように“ゆがんだ無限小楔”による表示が超函数の境界値表示として最も一般的なものである. 一方，第二点として $\mathcal{B}(\Omega)$ を表現するには実は有限個の楔を用いれば足りることが知られている. (例えば $\Omega+i\Gamma_\sigma$, σ は多重符号，という 2^n 個の楔でよい. これを Ω の適当な複素近傍(Stein 近傍)との交わりに制限すれば，0と同一視すべき元の形を決定することもできる). 理論的にいえば，これらは要するにコホモロジーという唯一の実在を表現する様式の差異にすぎない.

超函数の台，特異台等は一変数の場合と同様に定義する. しかし，上の定義のままでは実際に与えられた超函数がある点の近傍で0になるかどうか等を判定するのは容易ではない. そこで次の補題を用意する.

補題3.1.3　超函数 $f(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ は唯一つの項 $F(x+i\Gamma 0)$ で表示されているとする. このとき Ω において $f(x)$ が0(あるいは実解析的)となるのは，$F(z)$ が0(あるいは Ω まで解析接続可能)のとき，且つこのときに限る.

もちろん補題の重要性は“このときに限る”方である. この証明は，上の定理を仮定したうえで§3において与えられる.

例 3.1.4 $\operatorname{supp}\left(\dfrac{1}{x_1+i0}\cdots\dfrac{1}{x_n+i0}\right)=\boldsymbol{R}^n$

$$\operatorname{sing\,supp}\left(\frac{1}{x_1+i0}\cdots\frac{1}{x_n+i0}\right)=\{x_1=0\}\cup\cdots\cup\{x_n=0\}$$

$$\operatorname{supp}\delta(x)=\operatorname{sing\,supp}\delta(x)=\{0\}.$$

最後の例においては $\subset$ の向きの包含関係は直接定義から従うが，その逆向きは未だ明らかではない．もう少し議論を進めてゆくうちに自然とわかるであろう．

次に超函数の解析性の方向的分析をしよう．一変数の場合と異なり方向は沢山あるので，$n-1$ 次元の球 $\boldsymbol{S}^{n-1}$ という連結した集合をなす．そこで $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ という直積集合を考えよう．これに一変数の場合と同じような趣旨でアクセサリーを付して $\boldsymbol{R}^n\times\dfrac{1}{i}\boldsymbol{S}_\infty^{*n-1}$ とも記す．

定義 3.1.5 $f(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ とする．$f(x)$ が点 $\left(x,\dfrac{1}{i}\xi dx\infty\right)\in\Omega\times\dfrac{1}{i}\boldsymbol{S}_\infty^{*n-1}$ においてミクロ解析的(微局所あるいは超局所解析的)であるとは，点 x の近傍における $f(x)$ の適当な境界値表示(3.1.2)をとればすべての j について $\Gamma_j\cap\{y\in\boldsymbol{R}^n;\langle\xi,y\rangle>0\}\neq\phi$ とできることをいう．(すなわち，直観的にいえば $f(x)$ は点 x の近傍で半空間 $\left\{z\in\boldsymbol{C}^n;\langle\xi,y\rangle=\operatorname{Re}\left\langle\dfrac{1}{i}\xi dx\infty,\ z\dfrac{\partial}{\partial x}0\right\rangle>0\right\}$ に少しは解析接続できることをいう.) f がミクロ解析的でない点の集合を f の**特異スペクトル**といい S.S. f で表わす．これは $\Omega\times\dfrac{1}{i}\boldsymbol{S}_\infty^{*n-1}$ の閉部分集合となる．

一変数のときと同様，普通は $\dfrac{1}{i}\xi dx\infty$ の代わりに $-i\xi dx\infty$ と記す．そうして，こう書き直したときの符号をもとに特異スペクトルを考える空間を $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ と同一視する．アクセサリー dx の効用は計算を進めるにつれて追い追いわかってくるであろう．アクセサリー ∞ はベクトル ξ の長さを正規化する手間の代用に用いる．(長さを ∞ に正規化すると考えればよい.) これらのことを忘れない限り $i\xi dx\infty$ を単に ξ と書いても構わない．

さて，単項で表現された超函数 $F(x+i\Gamma 0)\in\mathcal{B}(\Omega)$ の特異スペクトルを調べてみよう．直観的にいえば錐 Γ の開きが大きくなればなるほど，この超函数は解析性が増すはずである．このことを表現するため次の概念を導入する．

定義 3.1.6 錐 Γ に対しその**双対錐** Γ° を次の式で定める:

(3.1.4) $\qquad \Gamma^\circ=\{\xi\in\boldsymbol{R}^n;\ 任意の\ y\in\Gamma\ に対し\ \langle\xi,y\rangle\geq 0\}.$

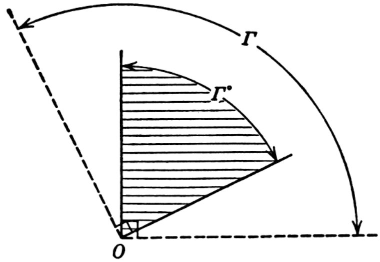


図 3.1

Γ° は閉凸錐となる．本書ではこれと単位球面との交わり $\Gamma^\circ \cap S^{n-1}$ のこともしばしば単に Γ° と記す．例として第 σ 象限 Γ_σ をとれば $(\Gamma_\sigma)^\circ = \overline{\Gamma_\sigma}$. また半空間 $\Gamma = \{\langle y, \xi \rangle > 0\}$ に対しては $\Gamma^\circ = \{t\xi ; t \geq 0\}$ という半直線になる．(一般に $\Gamma^\circ = (\widehat{\Gamma})^\circ$ であることに注意せよ．さらに $(\Gamma^\circ)^\circ = \overline{\widehat{\Gamma}}$ となる．)

さて，固定した ξ に対し半空間 $\langle \xi, y \rangle > 0$ が $F(z)$ の正則域 $\Omega + i\Gamma 0$ と交わるのは $\xi \notin -\Gamma^\circ$ のときである．従って，このような方向には超函数 $F(x+i\Gamma 0)$ はミクロ解析的だから，定義により

$$\mathrm{S.S.}\, F(x+i\Gamma 0) \subset \left\{\left(x, \frac{1}{i}\xi dx\infty\right); x \in \Omega, \xi \in -\Gamma^\circ\right\}$$

$\dfrac{1}{i}\xi$ を $-i\xi$ と書き直せば，この式は

$$\mathrm{S.S.}\, F(x+i\Gamma 0) \subset \Omega \times i\Gamma^\circ dx\infty \tag{3.1.5}$$

と略記できる．$\Gamma^\circ\infty$ はもちろん $\Gamma^\circ \cap S_\infty^{n-1}$ のつもりである．以下これを基本にして特異スペクトルを測ろう．さて，重要なのはこの評価関係の逆が成立することである．

定理 3.1.7　Γ を開凸錐とする．もし $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ が $\mathrm{S.S.}\, f \subset \Omega \times i\Gamma^\circ dx\infty$ を満たせば，無限小楔 $\Omega + i\Gamma 0$ とその上の正則函数 $F(z)$ で $f(x) = F(x+i\Gamma 0)$ となるものが存在する．特別な場合として，$\mathrm{S.S.}\, f = \phi$ ならば f は実解析函数となる．

この証明は§3で与える．これから特異スペクトルと特異台の関係が導かれる：

系 3.1.8　$\pi : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{S}^{n-1} \to \boldsymbol{R}^n$ を自然な射影とするとき，

$$\pi(\mathrm{S.S.}\, f) = \mathrm{sing\ supp}\, f \tag{3.1.6}$$

が成り立つ.

実際，sing supp f の外では f は実解析的，従ってもちろんあらゆる方向にミクロ解析的であるが，前定理により逆も成り立つ.

しかしながら，特異スペクトルの決定は一般に容易ではない．例えば評価式(3.1.5)の逆向きの包含関係は一般には成り立たない．これについて次の主張を証明しておこう.

系 3.1.9 $f(x)=F(x+i\Gamma 0)$ とし，$F(z)$ は無限小楔の切り口 $\{x\}+i\Gamma 0$ の境界を越えてより広い楔に解析接続することはできないとする．このとき

$$\widehat{\mathrm{S.S.}\, f|_{\{x\}\times S^{n-1}}} = \{x\}\times i\Gamma^\circ dx\infty \tag{3.1.7}$$

ここで一般に球面 S^{n-1} の部分集合 A に対しその凸包 $\hat{A}$ とは，大円弧による凸包を意味するものとする．すなわち，一度 A から錐を作り，普通の意味でその凸包をとってから球面との共通部分に戻ったものである.

証明 集合 $\{x\}\times i\Gamma^\circ dx\infty$ の凸集合の意味の端点(すなわち，境界点のうちでこの集合がここで狭義の凸集合となっているようなもの)が S.S. f に含まれる

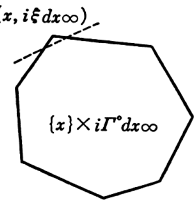


図 3.2

ことを示せばよい．背理法により，例えばある端点 $(x, i\xi dx\infty)\notin$ S.S. f とせよ．仮定により，少し大きな開凸錐 $\varDelta\supset\Gamma$ で，$\xi\in\Gamma^\circ\setminus\varDelta^\circ$ となるものが存在する．しかも ξ は Γ° の端点なので，$\varDelta$ を十分 Γ に近く選べば $\Gamma^\circ\setminus\varDelta^\circ$ が ξ の任意に与えられた近傍に含まれるようにできる．故に点 x のある近傍 Ω について

$$\mathrm{S.S.}\, f|_{\Omega\times S^{n-1}}\subset\Omega\times i\varDelta^\circ dx\infty$$

となっていると仮定してよい．定理 3.1.7 によれば，このとき $G(z)\in\mathcal{O}(\Omega+i\varDelta 0)$ で $f|_\Omega=G(x+i\varDelta 0)$ となるものが存在する．故に Ω の上で $(F-G)(x+i\Gamma 0)=0$ となり，補題 3.1.3 により $F(z)=G(z)$ となる．これは $F(z)$ が $\{x\}+i\Gamma 0$ を越えて少し広いところまで延びることを示し，不合理である．証了.

問 3.1.1 下の諸例を参考にして評価(3.1.7)が一般にはこれ以上改良できないことを示せ.

例 3.1.10 a) $\mathrm{S.S.}\dfrac{1}{x_1+i0}=\{x_1=0\}\times\{idx_1\infty\}$

ここに $idx_1\infty$ は $\xi=(1,0,\cdots,0)$ というベクトルに相当する $i\xi dx\infty$ のことである.

b) $\mathrm{S.S.}\left(\dfrac{1}{x_1+i0}+\dfrac{1}{x_2+i0}\right)=\{x_1=0\}\times\{idx_1\infty\}\cup\{x_2=0\}\times\{idx_2\infty\}$

c) $\mathrm{S.S.}\dfrac{1}{x_1+i0}\dfrac{1}{x_2+i0}=\{x_1=0\}\times\{idx_1\infty\}\cup\{x_2=0\}\times\{idx_2\infty\}$
$\cup\{x_1=x_2=0\}\times\{i(\lambda dx_1+(1-\lambda)dx_2)\infty\,;\,0\leq\lambda\leq 1\}$

d) $\mathrm{S.S.}\,\delta(x)=\{0\}\times\boldsymbol{S}^{n-1}$

e) $\omega\in\boldsymbol{S}^{n-1}$ を固定したとき，平面および曲面 Radon 分解の成分 $W_0(z,\omega)=\dfrac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\dfrac{1}{(z\omega)^n}$, $W(z,\omega)$((2.3.25)式)によりそれぞれ無限小半空間$\{y\omega>0\}$からの境界値として定まる x の超函数を，記号を濫用して再び $W_0(x,\omega)$, $W(x,\omega)$ と書けば

$$\mathrm{S.S.}\,W_0(x,\omega)=\{(x,i\omega dx\infty)\,;\,x\omega=0\},$$
$$\mathrm{S.S.}\,W(x,\omega)=\{(0,i\omega dx\infty)\}\qquad(\text{一点})$$

いずれも $\subset$ の向きの包含関係は明らかである．逆向きの包含関係は，例 a) においては，これ以上特異スペクトルの方向が減れば定理 3.1.7 により $1/x_1$ がそこで実解析函数とならねばならないことからわかる．次の例においても同様である．(重なった部分 $x_1=x_2=0$ では系 3.1.9 が使える.) 例 c) の $x_1=x_2=0$ における逆評価は今は証明できない．しかし定義式(3.1.1)で与えられる δ 函数が球対称性を持つ通常の δ 函数に等しいことがわかれば例 d) が理解でき，従って $\dfrac{1}{x_1+i0}\dfrac{1}{x_2+i0}$ が S.S. δ の $\dfrac{1}{4}$ を引受けているということから c) が想像できよう．例 e) は Radon 変換の重要性を物語るものである.

特異スペクトルの概念は超函数が 0 かどうかの判定にも役立つ．例として補題 3.1.3 の拡張である次の主張を証明してみよう.

系 3.1.11(局所的楔の刃定理) $\mathcal{B}(\Omega)$ の元として $F_1(x+i\Gamma_1 0)=F_2(x+i\Gamma_2 0)$ ならば，$F_1(z), F_2(z)$ は $\Omega+i(\Gamma_1+\Gamma_2)0$ の上で正則な共通の元 $F(z)$ につながる．($\Gamma_1+\Gamma_2$ は 2 つの集合のベクトル和を表す．この場合は $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ の凸包と一致

し再び錐になる.）特に $\Gamma_1{}^\circ\cap\Gamma_2{}^\circ=\phi$ ならば，$F_1(z)$ と $F_2(z)$ は実軸上で正則函数としてつながる.

証明　$f(x)=F_1(x+i\Gamma_1 0)=F_2(x+i\Gamma_2 0)$ に対し，この二通りの表現から

$$\mathrm{S.S.}\,f\subset\Omega\times i\Gamma_1{}^\circ dx\infty\,\cap\,\Omega\times i\Gamma_2{}^\circ dx\infty=\Omega\times i(\Gamma_1{}^\circ\cap\Gamma_2{}^\circ)dx\infty$$

が得られる．ここで

$$\Gamma_1{}^\circ\cap\Gamma_2{}^\circ=(\Gamma_1+\Gamma_2)^\circ \tag{3.1.8}$$

が容易にわかるから，定理3.1.7により $F(z)\in\mathcal{O}(\Omega+i(\Gamma_1+\Gamma_2)0)$ が存在して $f(x)=F(x+i(\Gamma_1+\Gamma_2)0)$ と書ける．無限小楔 $\Omega+i\Gamma_j 0$, $j=1,2$ の各々において補題3.1.3により $F_j(z)=F(z)$ が成り立つから主張が証明された.

上の系は **Epstein** 型の楔の刃定理と呼ばれ，特に $\Gamma_2=-\Gamma_1$ のときは **Bogolyubov** 型の楔の刃定理と呼ばれる．後者は $\Gamma_1{}^\circ\cap\Gamma_2{}^\circ=\phi$ の特別な場合であるが何となく一変数超函数の定義を思わせるものがある．なお，古典的な楔の刃定理については§5で再論する.

各演算に付随した特異スペクトルの評価は節を改めて述べよう.

§2　超函数の演算 I

この節では超函数の基本的演算を定義しよう.

1°　*C*-線型演算　$\mathcal{B}(\Omega)$ の $\boldsymbol{C}$-線型構造は既に述べた通りであるが，念のために書けば次のようになる：$f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$, $g(x)=\sum G_k(x+i\Delta_k 0)$ を $\mathcal{B}(\Omega)$ の二つの元とし $\lambda,\mu\in\boldsymbol{C}$ とすれば

$$\lambda f(x)+\mu g(x)=\sum\lambda F_j(x+i\Gamma_j 0)+\sum\mu G_k(x+i\Delta_k 0)$$

ここでもし $\Gamma_j\cap\Delta_k\neq\phi$ なる対があれば先に述べたような項の縮約をしてもよい.

命題3.2.1　次の評価式が成り立つ.

$$\overline{(\mathrm{S.S.}\,f\cup\mathrm{S.S.}\,g)\setminus(\mathrm{S.S.}\,f\cap\mathrm{S.S.}\,g)}\subset\mathrm{S.S.}(f\pm g)\subset\mathrm{S.S.}\,f\cup\mathrm{S.S.}\,g$$

証明　右側の包含関係は定義から明らかである．これを $f=(f\pm g)\mp g$ に適用すれば，$\mathrm{S.S.}\,(f\pm g)$ が $\overline{\mathrm{S.S.}\,f\setminus\mathrm{S.S.}\,g}$ を含まなければならないことがわかる．同様に f と g を取り替えて上の評価に達する．証了.

2°　実解析函数による掛け算　$\varphi(x)\in\mathcal{A}(\Omega)$, $f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対し

$$\varphi(x)f(x)=\sum(\varphi F_j)(x+i\Gamma_j 0)$$

と定める．φF_j は正則函数の普通の積であり，定義域は少し減るかもしれないが再び $\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_j 0)$ の元となることは間違いない．

3°　導函数　$f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対し

$$D^\alpha f(x)=\sum(D_z{}^\alpha F_j)(x+i\Gamma_j 0)$$

と定める．ここに，多重指数 α に対し

$$D^\alpha=D_1{}^{\alpha_1}\cdots D_n{}^{\alpha_n},\qquad D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}\tag{3.2.1}$$

と記している．$D_z{}^\alpha$ も同様の意味である．従って多変数の超函数も自由に微分できる．

問 3.2.1　$x^\alpha\delta^{(\beta)}(x)$ を計算せよ．

以上をまとめれば

系 3.2.2　実解析係数の線型偏微分作用素

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha\tag{3.2.2}$$

は超函数の層 $\mathcal{B}$ に層の準同型として作用する．特にこの作用は超函数の台や特異台，特異スペクトルを増やさない．

更に高級な演算を定義するため，我々は次の定理を仮定しよう．証明は§3で与えられる．

定理 3.2.3　f をコンパクト集合 K の近傍で定義された超函数とし

$$\mathrm{S.S.}\,f\subset \boldsymbol{R}^n\times i\,\mathrm{Int}\,(\Gamma_1{}^\circ\cup\cdots\cup\Gamma_N{}^\circ)dx\infty$$

とする．このとき $F_j(z)\in\mathcal{O}(K+i\Gamma_j 0)$ を適当に選べば，K の近傍における $f(x)$ の境界値表示

$$f(x)=\sum_{j=1}^N F_j(x+i\Gamma_j 0)$$

で，$\mathrm{S.S.}\,f\cap\{x\}\times i\Gamma_j{}^\circ dx\infty=\phi$ なる点 x の近くでは(従って特に $f(x)$ が実解析的なところでは) $F_j(z)$ が実軸まで解析接続できるようなものが存在する．

ここで $F_j(z)\in\mathcal{O}(K+i\Gamma_j 0)$ とは K のある開近傍 Ω について $F_j(z)\in\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_j 0)$ となっていることを意味する．コンパクト集合を基礎に用いたのは領域

を縮める手続きを明言するのを省略するためである．実際にはさらに強い形の分解定理が成り立つ(系 4.6.12 を見よ)が，差し当ってはこれで十分である．

4°　超函数の積　$f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$, $g(x)=\sum G_k(x+i\varDelta_k 0)$ を二つの超函数とする．これらの積を定義するとすれば次のようにする他ないであろう．

$$f(x)g(x)=\sum_{j,k}F_j(x+i\Gamma_j 0)G_k(x+i\varDelta_k 0)=\sum_{j,k}(F_jG_k)(x+i\Gamma_j\cap\varDelta_k 0) \tag{3.2.3}$$

これが意味を持つためには任意の組 j, k について $\Gamma_j\cap\varDelta_k\neq\phi$ を満たすような両者の表示が存在する必要がある．この条件を特異スペクトルの言葉で表わすために次の記号を導入しよう．

定義 3.2.4　$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ の**対蹠写像**(antipodal mapping) a を次の式により定める：

$$a:(x, i\xi dx\infty)\longmapsto(x, -i\xi dx\infty)$$

$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ の部分集合 A のこの写像による像を A^a で表わす．

定理 3.2.5　二つの超函数の積 $f(x)g(x)$ は

$$\mathrm{S.S.}\,f\cap(\mathrm{S.S.}\,g)^a=\phi \tag{3.2.4}$$

のとき意味を持つ．積は両因子につき双線型かつ可換であり，導函数に関して Leibniz の公式を満たす．また，

$$\mathrm{supp}\,fg\subset\mathrm{supp}\,f\cap\mathrm{supp}\,g \tag{3.2.5}$$

$$\mathrm{S.S.}\,fg\subset\mathrm{S.S.}\,f\vee\mathrm{S.S.}\,g\underset{\text{定義}}{=}\{(x, i(\lambda\xi+(1-\lambda)\eta)dx\infty);\ (x, i\xi dx\infty)\in\mathrm{S.S.}\,f,\ (x, i\eta dx\infty)\in\mathrm{S.S.}\,g,\ 0\leq\lambda\leq 1\} \tag{3.2.6}$$

が成り立つ．ここに記号 $\vee$ は $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ の二つの部分集合の繊維に関する凸結合，すなわち各繊維 $\{x\}\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ において S.S. f の任意の点と S.S. g の任意の点とを結ぶ短い方の大円弧をすべて合併したものである．(条件(3.2.4)はこのとき対蹠的な対がなく，従って最短大円弧が常に一意に確定することを要求している．)[注9)]

証明　定理 3.1.2 により $\mathcal{B}$ は層をなすから，積は局所的に両立するように定義すればよい．故に考えている点の十分小さい近傍 Ω で考えることとし，定理 3.2.3 により S.S. f, S.S. g を十分細かく分解し，$f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$, $g(x)=\sum G_k(x+i\varDelta_k 0)$ と表示したとき，仮定(3.2.4)により各組 j, k について $\Gamma_j{}^\circ\cap-\varDelta_k{}^\circ=\phi$ が成り立っているとしてよい．ところで初等的な考察により二

つの開凸錐 Γ_j, Δ_k に対し

$$\Gamma_j{}^\circ \cap -\Delta_k{}^\circ = \phi \iff \xi \in \Gamma_j{}^\circ,\ -\xi \in \Delta_k{}^\circ \text{ なる } \xi \text{ が存在しない.}$$

$$\iff \Gamma_j \text{ と } \Delta_k \text{ を分離する超平面が存在しない.}$$

$$\iff \Gamma_j \cap \Delta_k \neq \phi$$

となるから，(3.2.3)が意味を持つ．この式の右辺から

$$\mathrm{S.S.}\, fg \subset \bigcup_{j,k} \Omega \times i(\Gamma_j \cap \Delta_k)^\circ dx\infty$$

がわかるが，

$$(\Gamma_j \cap \Delta_k)^\circ = \widehat{\Gamma_j{}^\circ \cup \Delta_k{}^\circ} = \Gamma_j{}^\circ + \Delta_k{}^\circ \tag{3.2.7}$$

という初等的な関係式が成り立つから，分解をどんどん細かくしてゆけば局所的に(3.2.6)という評価式を得る．また，積の定義の仕方(3.2.3)から可換性とか Leibniz の公式とかは明らかである．故に問題はもっぱらこの定義が表示の仕方によらずに超函数として定まっているかどうかである．これには次の補題が必要となる．

補題 3.2.6 $\Gamma_j,\ j=1,\cdots,N$ を開凸錐とし，$A \subset S^{n-1}$ を $\Gamma_j{}^\circ \cap A=\phi,\ j=1,\cdots,N$ なる閉部分集合とする．もし K の近傍で超函数として $\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)=0$ ならば，この表示を 0 に帰着させる計算手続きのうちで，各段階において $\Gamma^\circ \cap A=\phi$ なる開きを持つ無限小楔 $K+i\Gamma 0$ しか現われないようなものが存在する．

この補題の証明も§3で与える．この補題をたとえば $A=\bigcup(-\Delta_k{}^\circ)$ として $f(x)$ の二つの相異なる表示の差に適用すれば，$\sum_j F_j(x+i\Gamma_j 0)=0$ の上記の計算手続きがそのまま $\sum_{j,k}(F_jG_k)(x+i\Gamma_j \cap \Delta_k 0)=0$ を示すのに使えることになるので，積は局所的に一意に定まる．証了．

参考 3.2 例 3.1.10 で注意したように積 $\dfrac{1}{x_1+i0}\dfrac{1}{x_2+i0}$ においては原点上の繊維において公式(3.2.6)の“凸結合”が実際に現われる．しかし一般には(3.2.6)の逆向きの包含関係は必ずしも成立しない．次の例は佐藤幹夫による：

$$F(z_1)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{2\pi i(2k)!z_1}, \qquad G(z_2)=\sum_{l=0}^{\infty} e^{2\pi i(2l+1)!z_2}$$

とおこう．各々はそれぞれ上半平面 $\mathrm{Im}\, z_1>0$, $\mathrm{Im}\, z_2>0$ で正則となり，従って超函数 $F(x_1+i0)$, $G(x_2+i0)$ を定める．明らかに

$$\mathrm{S.S.}\,F(x_1+i0)\ni(0,idx_1\infty),\qquad \mathrm{S.S.}\,G(x_2+i0)\ni(0,idx_2\infty)$$

である．積 $F(x_1+i0)G(x_2+i0)$ は第一象限に対応する楔の上の正則函数 $F(z_1)G(z_2)$ の境界値であるが，これを

$$F(z_1)G(z_2)=\sum_{k>l}e^{2\pi i\{(2k)!z_1+(2l+1)!z_2\}}+\sum_{k\leq l}e^{2\pi i\{(2k)!z_1+(2l+1)!z_2\}}$$

と分けたとき，右辺の各項はそれぞれ半空間 $\boldsymbol{R}^2+i\{y_1>0\}$ および $\boldsymbol{R}^2+i\{y_2>0\}$ で正則となる．故に

$$\mathrm{S.S.}\,F(x_1+i0)G(x_2+i0)\subset\{x_1=0\}\times\{idx_1\infty\}\cup\{x_2=0\}\times\{idx_2\infty\}$$

となり弧の中間は埋まらない．両因子が非常にかけ離れた波長で振動しているために干渉が起こらなかったのである．

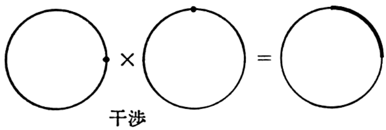


図 3.3

5°　定積分　$K\subset\Omega$ を区分的に滑らかな境界を持つコンパクト集合とする．$f(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ の K 上の定積分 $\int_K f(x)dx$ を定義しよう．ただし，こんなものが意味を持つためには $f(x)$ が ∂K の近くである程度滑らかでなければならない．ここでは最も簡単に $f(x)$ がそこで実解析的になっていると仮定しよう．定理 3.2.3 により f を K の近くで

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j0) \tag{3.2.8}$$

と表わしておく．この際，$f(x)$ が実解析的なところでは各項の $F_j(z)$ も実軸まで解析的に延びるように選べることが重要となる．各楔 $K+i\Gamma_j0$ に対し新しい積分路 $K+i\varepsilon_j$: $x+i\varepsilon_j(x)$, $x\in K$ を次のように定める：

$$\begin{cases}\varepsilon_j(x)=0, & x\in\partial K,\\ x+i\varepsilon_j(x)\in K+i\Gamma_j0, & x\in\mathrm{Int}\,(K).\end{cases}$$

$\varepsilon_j(x)$ は区分的に滑らかな K 上の連続函数である．これを用いて

$$\int_K f(x)dx=\sum_{j=1}^{N}\int_{K+i\varepsilon_j}F_j(z)dz \tag{3.2.9}$$

と定める．この積分を実際に計算するには上のように変形された道の上の積分要素 dz を変数 x で書き直せばよい．$\varepsilon_j(x)=(\varepsilon_{j1}(x),\cdots,\varepsilon_{jn}(x))$ を成分とすれば，

これらが滑らかなところでは

$$dz = d(x+i\varepsilon_j(x)) = \det\left(\frac{\partial(x_k+i\varepsilon_{jk}(x))}{\partial x_l}\right)dx_1\cdots dx_n$$

となる．この体積要素を用いて $F_j(x+i\varepsilon_j(x))$ を実積分領域 K の上で積分すれば(3.2.9)が得られる．Poincaré の定理により上の各積分の値は道の選び方によらない．一方，境界値表示の選び方によらぬことは次の補題からわかる．この補題は **Martineau 型の局所的楔の刃定理**のやや弱い形であるが，超函数が 0 になるかどうかの判定に十分な威力を発揮する．（なお系 4.6.13 参照.）

補題 3.2.7　コンパクト集合 K の近傍において超函数の意味で

$$\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0) = 0$$

とする．このとき $\Gamma_j+\Gamma_k$ の任意の固有部分錐 $\varDelta_{jk}$ に対し $H_{jk}(z)\in\mathcal{O}(K+i\varDelta_{jk}0)$, $j,k=1,\cdots,N$ で全体として $H_{kj}(z)=-H_{jk}(z)$（従って特に $H_{jj}(z)\equiv 0$）を満たすものを適当に選び

$$F_j(z) = \sum_{k=1}^{N} H_{jk}(z), \qquad j=1,\cdots,N \tag{3.2.10}$$

が共通の定義域の上で成り立つようにできる．しかもコンパクト部分集合 $L\subset K$ を固定したとき，$F_j(z)$ あるいは $F_k(z)$ のいずれかが L の近傍に実軸まで延長できるような番号については $H_{jk}(z)$ も L の近傍まで解析接続できるような選び方が存在する．

逆に(3.2.10)の形の $F_j(z)$ に対しては，超函数 $\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ は定義から明らかに 0 に等しいことに注意せよ．補題の証明は再び§3 に譲る．さて二つの勝手な境界値表示(3.2.8)および $f(x)=\sum G_k(x+i\varDelta_k 0)$ が与えられたとき，まず定理 3.2.3 による細分をとり Γ_j を共通にすることができる．そうして二つの表示の差に上の補題を適用し $H_{jk}(z)$ を求める．ここでは $L=\partial K$ とし各 $H_{jk}(z)$ は ∂K の近傍まで解析接続できるように選んでおく．積分路 $K+i\varepsilon_j$ は Poincaré の定理により共通に取れるから，結局，両表示に対する積分値の差は

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{K+i\varepsilon_j}\{F_j(z)-G_j(z)\}dz = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{K+i\varepsilon_j} H_{jk}(z)dz$$

ここで $H_{kj}(z)=-H_{jk}(z)$ であり，積分路変更により

$$\int_{K+i\varepsilon_j} H_{jk}(z)dz = -\int_{K+i\varepsilon_j} H_{kj}(z)dz = -\int_{K+i\varepsilon_k} H_{kj}(z)dz$$

が成り立つから，上の総和は0となる．

こうして積分の定義が確定してみれば，ここで定義した積分が被積分函数に対する線型性および積分領域に関する加法性を適当な意味で満たしていることは明らかであろう．

さて，コンパクトな台を持つ超函数 $f(x)$ はもちろんその台の外で実解析的である．故にこれの全空間での定積分を次のように定義することができる．$K \supseteq \mathrm{supp}\, f$ を区分的に滑らかな境界を持つ有界積分領域とし，K の近傍における $f(x)$ の表示(3.2.8)で各 $F_j(z)$ が ∂K の近傍に解析接続できるものを取り，(3.2.9)式により計算した値を $\int_{R^n} f(x)dx$ とする．この値は K の選び方によらない．何となれば，定理3.1.2により ∂K の近くでは実解析函数の普通の計算として $\sum_{j=1}^{N} F_j(x)=0$ となっているはずだから，積分路をそのあたりでは実軸上に設定すれば0の積分として積分値に影響していないからである．

6°　制限　超函数 $f(x)$ を $x_1=0$ へ制限するという演算を考えよう．このようなことが許されるためには $f(x)$ が何らかの意味で x_1 につき滑らかでなければならない．ここでは次のような概念を考える．

定義 3.2.8　$(x, \pm idx_1\infty) \notin \mathrm{S.S.}\, f$ のとき超函数 $f(x)$ は点 x の近傍において x_1 を**実解析パラメータ**として含むという．(誤解の恐れが無ければ x_1 につき実解析的ともいうことにする．)

このことは言い換えれば，点 x の近傍において

$$(3.2.11)\quad f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0), \qquad \Gamma_j \cap \{y_1=0\} \neq \phi, \qquad j=1, \cdots, N$$

という形の表示が存在するということである．実際，開凸錐 Γ_j に対して

$$\Gamma_j{}^\circ \not\ni (\pm 1, 0, \cdots, 0) \iff \Gamma_j \cap \{y_1=0\} \neq \phi$$

が明らかに成り立ち，また逆に $\mathrm{S.S.}\, f$ が両極 $\pm idx_1\infty$ を含まない閉集合ならば，このような $\Gamma_j{}^\circ$ の内部により $\mathrm{S.S.}\, f$ を覆って定理3.2.3を適用すれば，(3.2.11)の形の表示が得られる．

定理 3.2.9　超函数 $f(x)$ は原点の近傍で x_1 を実解析パラメータとして含むとせよ．このとき制限 $f|_{x_1=0}$ が原点の近傍で $n-1$ 変数 $x'=(x_2, \cdots, x_n)$ の超函

数として意味を持ち,

$$\text{(3.2.12)} \qquad \operatorname{supp}(f|_{x_1=0}) \subset \operatorname{supp} f \cap \{x_1=0\}$$

$$\text{(3.2.13)} \qquad \text{S.S.}(f|_{x_1=0}) \subset p_{dx'}(\text{S.S.} f \cap \{x_1=0\})$$

が成り立つ. ここに

$$\begin{array}{ccc} p_{dx'}: i\boldsymbol{S}_\infty^{*n-1} \setminus \{\pm i dx_1 \infty\} & \longrightarrow & i\boldsymbol{S}_\infty^{*n-2} \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)dx\infty & \longmapsto & i(\xi_2, \cdots, \xi_n)dx'\infty \end{array}$$

は両極から赤道への大円弧に沿う射影である.

誤解の恐れの無いときは $f|_{x_1=0}$ の代わりに $f(0,x')$ という記号も用いることにする.

証明 $f(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ とし $\Omega'=\Omega\cap\{x_1=0\}$ とおく. (3.2.11)のような $f(x)$ の表示をとり

$$f|_{x_1=0} = \sum_{j=1}^{N} F_j|_{z_1=0}(x'+i\Gamma_j{}'0)$$

とおけばよい. ここに

$$\Gamma_j{}' = \Gamma_j \cap \{y_1=0\}$$

である. 制限の結果が表示のとり方によらないことは補題 3.2.6 を用いて積の場合と同様に確かめられる. これから(3.2.12)もわかる. さて上の定義式から

$$\text{(3.2.14)} \qquad \text{S.S.}(f|_{x_1=0}) \subset \bigcup \Omega' \times i(\Gamma_j{}')^\circ dx'\infty$$

であるが, ここで一般に開凸錐 Γ に対し

$$\text{(3.2.15)} \qquad (\Gamma\cap\{y_1=0\})^\circ = p_{dx'}(\Gamma^\circ)$$

が成り立つ. ただし, ここでは $p_{dx'}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^{n-1}$ は後の $n-1$ 成分への通常の射影である. 実際,

$$\begin{aligned} \xi' \in (\Gamma\cap\{y_1=0\})^\circ &\iff \forall y'\in\Gamma\cap\{y_1=0\} \text{ について } \langle\xi',y'\rangle\ge 0 \\ &\iff \exists\lambda \text{ をとれば } \forall y\in\Gamma \text{ に対し } \lambda y_1+\langle\xi',y'\rangle\ge 0 \\ &\iff \exists\lambda \text{ をとれば } (\lambda,\xi')\in\Gamma^\circ \\ &\iff \xi'\in p_{dx'}(\Gamma^\circ) \end{aligned}$$

となる(図 3.4 参照). S.S. f の $\Gamma_j{}^\circ$ による分割をどんどん細かくしてゆけば, (3.2.14)と(3.2.15)から(3.2.13)が得られる. 証了.

さて, 微分は特異スペクトルを増やさないから実解析パラメータを保つ. 故に実解析パラメータに関して高次の制限データをも考えることができる:

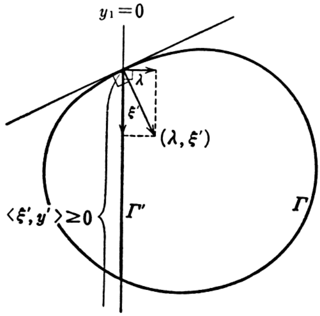


図 3.4

$$f_k(x')=\frac{\partial^k f}{\partial {x_1}^k}(0,x')=(D_1{}^kf)|_{x_1=0},\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{3.2.16}$$

故に

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k(x')}{k!}{x_1}^k \tag{3.2.17}$$

という級数を考えたくなるが，実解析パラメータという用語に反し，これは一般に f から第 N 項までの部分和を差し引いたものが，実解析パラメータ x_1 を持つ超函数として ${x_1}^{N+1}$ により割り切れるという意味での漸近級数でしか無い（補題 3.4.12 参照）注10)．

参考 3.3 実解析パラメータ x_1 を持つ超函数 $f(x)$ で，$x_1=0$ へのすべての制限データ (3.2.16) が 0 であるにも拘らず $0\in\mathrm{supp}\,f$ となるものが存在する．次の例は佐藤幹夫による：以下 $n=2$ とし，見易くするため $x_1=x$ と書き，$x_2=t$ を実解析パラメータとする．さて，負実軸を除いた複素平面において $1/z$ を広義一様近似する多項式 $p_k(z)$ を選ぶ．すなわち，コンパクト集合の増大列 $K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_k\subset\cdots$ を $\bigcup K_k=\boldsymbol{C}\setminus]-\infty,0]$ となるように選び，Runge の定理により微小正数 ε に対して

$$\left|\frac{1}{z}-p_k(z)\right|\leq\varepsilon,\qquad z\in K_k \text{ において}, \tag{3.2.18}$$

が成り立つような多項式 $p_k(z)$ を選ぶ．$\delta_k=\mathrm{dis}(\{0\},K_k)$ とおく．このとき

$$F(z,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k(z)}{k!}\tau^k \tag{3.2.19}$$

は $(\boldsymbol{C}\setminus]-\infty,0])\times\boldsymbol{C}$ において 2 変数の正則函数を定める．実際，k_0 を固定し $z\in K_{k_0}$ とすれば，$k\geq k_0$ に対し

$$|p_k(z)|\leq\left|\frac{1}{z}\right|+\varepsilon\leq\frac{1}{\delta_{k_0}}+\varepsilon$$

が成り立つから，級数は $K_{k_0}\times \boldsymbol{C}$ で広義一様収束している．故に

$$f(x,t)=F(x+i0,t)-F(x-i0,t)$$

により2変数の超函数が定まる．ここに第一項は半空間 $\{\mathrm{Im}\, z>0\}$ からの，また第二項は半空間 $\{\mathrm{Im}\, z<0\}$ からの境界値の意味である．この超函数は明らかに t を実解析パラメータとして含む．(実は t は後述(第4章§3)の，もっと正則度の強いパラメータにもなっている．) 制限の定義により

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k f\Big|_{t=0}=\left(\frac{\partial^k F}{\partial \tau^k}\right)(z,0)\Big|_{z\to x+i0}-\left(\frac{\partial^k F}{\partial \tau^k}\right)(z,0)\Big|_{z\to x-i0}$$

であるが，$\dfrac{\partial^k F}{\partial \tau^k}(z,0)=p_k(z)$ は多項式だからこの境界値の差は0となる．すなわちすべての制限データは0に等しい．

次に δ_k を適当に選べば $0\in\mathrm{supp}\, f(x,t)$ となることを見よう．超函数 $f(x,t)$ は互いに反対向きの二つの楔からの境界値の差なので，もしこれが0ならば系3.1.11により定義函数は原点の近傍で正則な函数 $F(z,\tau)$ につながる．すると Taylor 展開の一意性により級数(3.2.19)は $F(z,\tau)$ の Taylor 級数の項を τ についてまとめたものになっているはずであり，従って $r>0$ を十分小さくとれば

(3.2.20)
$$\sqrt[k]{\max_{|z|\le r}|p_k(z)|/k!}\le C<\infty$$

とならなければならない．(これは $\dfrac{p_k(z)}{k!}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|\tau|=\delta}\dfrac{F(z,\tau)}{\tau^{k+1}}d\tau$ を評価すればわかる．) しかるに(3.2.18)より $|z_k|=\delta_k$ なる $z_k\in K_k$ に対し

$$|p_k(z_k)|\ge\frac{1}{\delta_k}-\varepsilon$$

であったから，δ_k を $\sqrt[k]{\delta_k k!}\to 0$ となるように選んでおけば(例えば $\delta_k=1/k^k k!$ としておけば)，これは(3.2.20)と矛盾する．故に $0\in\mathrm{supp}\, f(x,t)$ でなければならない．

制限にかかわる独立変数の個数は容易に一般化することができる．証明は全く同様なので詳しいことは略し事実だけを定理として述べておこう．

定理 3.2.10　$f(x,t)$ を $n+m$ 変数 (x,t) の超函数とする．

$$\mathrm{S.S.}\, f\cap(\{(x^0,t^0)\}\times i(\{0\}\times S^{m-1}))=\phi$$

となっているとき，$f(x,t)$ は考えている点 (x^0,t^0) において t を**実解析パラメータ**として含む(あるいは t につき実解析的)という．このとき制限 $f|_{t=t^0}$ が $x=x^0$ の近傍で x の超函数として意味を持つ．また次の評価式が成り立つ．

(3.2.21)　$\mathrm{supp}\,(f|_{t=t^0})\subset\mathrm{supp}\, f\cap\{t=t^0\}$

(3.2.22)　$\mathrm{S.S.}\,(f|_{t=t^0})\subset p_{dx}(\mathrm{S.S.}\, f\cap\{t=t^0\})$

$$= \{(x, i\xi dx\infty); \exists\theta \in \boldsymbol{R}^m \text{ に対し } (x, t^0; i(\xi dx+\theta dt)\infty) \in \mathrm{S.S.}\, f\}$$

ここに，$p_{dx}:\boldsymbol{S}^{n+m-1}\setminus(\{0\}\times\boldsymbol{S}^{m-1})\to\boldsymbol{S}^{n-1}$ は自然な射影 $\boldsymbol{R}^{n+m}\to\boldsymbol{R}^n$ から誘導される写像である．また

(3.2.23) $$f|_{t=t^0} = ((f|_{t_1=t_1^0})|_{t_2=t_2^0}\cdots)|_{t_m=t_m^0}$$

が成り立つ．右辺における制限の順序は自由に変更できる．

実際，この場合には $f(x,t)=\sum F_j((x,t)+i\Delta_j0)$ という表示で，$\Gamma_j=\Delta_j\cap\{s=0\}\neq\phi$ なるものがとれる．ここに t の虚座標を s と書いた．このとき

$$f(x,t)|_{t=t^0} = \sum (F_j|_{\tau=t^0})(x+i\Gamma_j0)$$

となる．評価式(3.2.22)は(3.2.15)を一般化した式

(3.2.24) $$(\Delta\cap\{s=0\})^\circ = p_{dx}(\Delta^\circ)$$

からも得られるし，あるいは(3.2.23)に留意し1パラメータの場合の評価(3.2.13)を繰返し適用しても得られる．

参考 3.4　注11参照.

§3　基礎的部分の証明

この節では，前節で証明を省略した補題等の証明を与える．もちろん，定理3.1.2は仮定したうえでの話である．まず次の補題から始めよう．

補題 3.3.1(片岡)　$D\subset\boldsymbol{R}^n$ を区分的に滑らかな境界を持つ有界閉領域とし，$f(x)=F(x+i\Gamma0)$ を D の近傍で定義された単項表示を持つ超函数とする．任意のコンパクト集合 $K\subset\mathrm{Int}\,(D)$ に対し，$a\in\Gamma$ を原点に十分近く選べば，

(3.3.1) $$F(z;\zeta) = \int_{D+i\{a\}} F(w)W(z-w,\zeta)dw$$

は $\eta=0$, $\xi\neq0$, $z\in K+i\{y\xi>y^2|\xi|-(y\xi)^2/|\xi|\}$，の近傍において $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$ の正則函数となり，かつ $\xi\notin\Gamma^\circ$ なる ξ に対しては z につき K の近傍まで正則に延長される．従って $\Delta\Subset\Gamma$ を任意の固有部分錐とするとき

$$F(z;\Delta^\circ) = \int_{\Delta^\circ\cap S^{n-1}} F(z;\xi)d\xi \in \mathcal{O}(K+i\Delta0)$$

とおけば，$\mathcal{O}(K+i\Delta0)$ の元 $F(z)|_{K+i\Delta0}-F(z;\Delta^\circ)$ は K の近傍に実軸まで解析接続できる．

証明　$F(z;\zeta)$ の正則域に関する主張は最後の部分を除き定理2.3.7から得ら

れる．すなわち(3.3.1)で与えられる $F(z;\zeta)$ はまず $\mathrm{Im}\,\zeta=0$, $z\in \boldsymbol{R}^n+i\{a\}+i\{y\xi>y^2|\xi|-(y\xi)^2/|\xi|\}$ の近傍において z, ζ につき正則であるが，ここで積分路を $\partial D+i\{a\}$ は固定したまま内部を実軸に限りなく近づければ結局 $\mathrm{Im}\,\zeta=0$, $z\in K+i\{y\xi>y^2|\xi|-(y\xi)^2/|\xi|\}$ の近傍で正則となることがわかる．(a としては $K-i\{a\}$ が定理2.3.7の D_α に含まれる程度に小さく選んでおけばよい．) 一方，$\xi\notin\Gamma^\circ$ のときは $\Gamma\cap\{y\xi<0\}\neq\phi$ であるから，$b\in\Gamma$ を $b\xi<0$ なる如くに(より正確には $b\xi<-(b^2|\xi|-(b\xi)^2/|\xi|)$ なる如くに)選び，積分路を逆に実軸から"遠ざけ"て $\mathrm{Int}\,(D)+i\{b\}$ を通るように変形すれば，z は K の近傍において実軸まで動けるようになる(図3.5参照)．すなわちそこで正則となる．(実はここでも

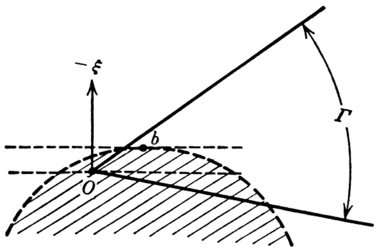


図 3.5

$K-i\{b\}\subset D_\alpha$ でなければならないから，実際には b も十分小さくとるわけである．) 最後に定理2.3.7より

$$F(z)=\int_{\Delta^\circ\cap S^{n-1}}F(z;\xi)d\xi+\int_{S^{n-1}\setminus\Delta^\circ}F(z;\xi)d\xi$$

であり，$\Delta^\circ\supseteq\Gamma^\circ$ より第二項は K の近傍で正則な函数を定めるから主張が示された．

上の補題は，超函数の境界値表示の成分が，実解析函数の不定性を除けば本質的には Radon 分解により与えられることを意味している．特に，積分(3.3.1)における水準 $a\in\Gamma$ の取り替えや ∂D の変更は，内部に実解析的な影響しか及ぼさないことに注意せよ．故に実解析函数を法としては

(3.3.2) $$\int_D F(w+i\Gamma 0)W(z-w,\xi)dw$$

という"実積分領域" D 上の積分が(3.3.1)により確定し，超函数の特異スペクトル成分を与えると見なすことができる．このことに注意すると，超函数論の種々の基本的命題をかなり初等的に証明することができる．

定理 3.3.2　$D\subset \boldsymbol{R}^n$ を区分的に滑らかな境界で囲まれた有界閉領域とし，$f(x)=\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0)$ を D の近傍で定義された超函数とする．D の内部の一点 x において $(x, i\xi dx\infty)\notin \mathrm{S.S.}\,f$ となるためには，$a_j\in\Gamma_j$ を適当に(原点に十分近く)選ぶとき

$$F(z;\zeta)=\sum_{j=1}^{N}\int_{D+i\{a_j\}} F_j(w)W(z-w,\zeta)dw \tag{3.3.3}$$

が点 (x,ξ) の近傍で z,ζ の正則函数となることが必要かつ十分である．

証明　まず十分であることを見よう．(3.3.3)の右辺の各積分を $F_j(z;\zeta)$ とおく．点 x のコンパクト近傍 K で $K\Subset D$ となるもの，および点 ξ の閉近傍で凸多角錐 $\varDelta$ の双対 $\varDelta^\circ$ の形のものを選び，(3.3.3)が $K\times(\varDelta^\circ\setminus\{0\})$ の近傍で z,ζ につき正則であるようにする．$\boldsymbol{R}^n\setminus\mathrm{Int}\,(\varDelta^\circ)$ をいくつかの閉多角錐 $\varDelta_k{}^\circ$，$k=1,\cdots,M$ で覆えば，補題 3.3.1 により

$$F_{jk}(z)\underset{\text{定義}}{=}\int_{\varDelta_k{}^\circ\cap S^{n-1}} F_j(z;\xi)d\xi\in\mathcal{O}(K+i\varDelta_k 0),\qquad k=0,\cdots,M$$

であり(ここに $\varDelta_0=\varDelta$ とした)，定理 2.3.7 により

$$F_j(z)=F_{j0}(z)+\sum_{k=1}^{M}F_{jk}(z)$$

が成り立つ．

仮定により $\sum_{j=1}^{N}F_{j0}(z)=\int_{\varDelta^\circ\cap S^{n-1}}F(z;\xi)d\xi$ は K の近傍で正則な函数 $H(z)$ に延長される．故に結局与えられた超函数は K の近傍で

$$f(x)=H(x)+\sum_{k=1}^{M}(\sum_j F_{j,k})(x+i\varDelta_k 0)$$

という表示を持つ．$\xi\notin\varDelta_k{}^\circ$ だからこれより $(x,i\xi dx\infty)\notin\mathrm{S.S.}\,f$ がわかる．

逆に必要性を示そう．$(x,i\xi dx\infty)\notin\mathrm{S.S.}\,f$ ということは，点 x のある近傍 K において $f(x)$ の別の境界値表示 $\sum_{k=1}^{M}G_k(x+i\varDelta_k 0)$ で，$\xi\notin\varDelta_k{}^\circ$，$k=1,\cdots,M$ なるものが存在するということである．このような表示に対しては

$$\sum_{k=1}^{M}\int_{K+i\{b_k\}}G_k(w)W(z-w,\zeta)dw \tag{3.3.4}$$

は補題 3.3.1 により点 (x,ξ) の近傍で正則となる．ところで，この新しい表示は定義により始めに与えられた表示から点 x の近傍における初等変形(3.1.3)の繰返しで得られるはずであり，また補題 3.3.1 の後で注意したように積分領

域や水準$\{b_k\}$の変更はxの近傍に実解析的な影響しか及ぼさない．故にb_kを十分小さくとれば，この初等変形を逆にたどる過程でx,ξにおける実解析性は保たれ，結局(3.3.3)自身がx,ξにおいて実解析的となる．証了．

補題 3.1.3 の証明　$F(x+i\Gamma 0)$が超函数として実解析函数$\varphi(x)$に等しいとせよ．このとき超函数$F(x+i\Gamma 0)$の特異スペクトルは空集合である．このことから$F(z)$が実軸まで解析接続できることを示そう．$D\Subset\Omega$とし，$a\in\Gamma$を十分小さく選べば，定理 3.3.2 により

$$\int_{D+i\{a\}} F(w)W_\alpha(z-w,\zeta)dw$$

は(z,ζ)につき$\mathrm{Int}\,(D)\times \boldsymbol{S}^{n-1}$の近傍で正則となる．故にこれを$\xi$につき$\boldsymbol{S}^{n-1}$の上で積分して得られる$F(z)$も$\mathrm{Int}\,(D)$の近傍で正則である．$D$は任意だからこれで$F(z)$は$\Omega$まで解析接続されることがわかり，補題の後半が示された．

さて，$F(x+i\Gamma 0)=0$の場合には，(0も実解析函数だから)$F(z)$はやはり実軸まで解析接続できる．故に実解析函数$F(x)$が超函数として0ということから実解析函数としても0であることがわかればよい．この証明は先に述べたように定理 3.1.2 の一部として本書の後半にまわすことにする．

定理 3.1.7 の証明　$f(x)=\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0)$としよう．点$x\in\Omega$を任意に選び，その近傍$D\Subset\Omega$で区分的に滑らかな境界を持つものをとる．仮定により S.S. $f\subset\Omega\times i\Gamma^\circ dx\infty$であるから，$a_j\in\Gamma_j$を原点に十分近くとれば，定理 3.3.2 により

$$\sum_j F_j(z;\zeta)=\sum_j\int_{D+i\{a_j\}} F_j(w)W(z-w,\zeta)dw$$

は$\{x\}\times(\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus\Gamma^\circ)$の近傍で$(z,\zeta)$の正則函数となる．故に任意の$\Delta\Subset\Gamma$に対し

$$F_j(z)=\int_{\Delta^\circ\cap \boldsymbol{S}^{n-1}} F_j(z;\xi)d\xi+\int_{\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus\Delta^\circ} F_j(z;\xi)d\xi$$

と分解すれば，第一項はxの近傍において開きΔの無限小楔で正則な函数$G_j(z)$を，また第二項のjに関する総和はxの近傍に実軸まで延長できる函数$H(z)$を与える．故に超函数として

$$f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)=\sum G_j(x+i\Delta 0)+H(x)$$

となり，右辺はxの近傍で$f(x)$の単項表示にまとめることができる．補題 3.

1.3によれば，このような単項表示は局所的にも一意であり，また $x\in\Omega$, $\varDelta\Subset\varGamma$ は任意だから，x をいろいろ動かし，また $\varDelta$ を $\varGamma$ に近づけたときこれらの表示は互いにつながり，結局 $\mathcal{O}(\Omega+i\varGamma 0)$ の一つの元による $f(x)$ の表示を与える．証了．

定理 3.2.3 の証明　S.S. f の被覆 $\bigcup\varGamma_j{}^\circ$ を再分割することにより $j\neq k$ に対し $\varGamma_j{}^\circ$ と $\varGamma_k{}^\circ$ は境界しか共有しないと仮定しても差支えない．さて，K の閉近傍 D における $f(x)$ の表示 $\sum_{k=1}^{M}G_k(x+i\varDelta_k 0)$ をとりあえず一つとろう．$a_k\in\varDelta_k$ を原点に十分近く選び

$$G_k(z;\zeta)=\int_{D+i\{a_k\}}G_k(w)W(z-w,\zeta)dw \tag{3.3.5}$$

$$F_j(z)=\sum_{k=1}^{M}\int_{\varGamma_j{}^\circ\cap S^{n-1}}G_k(z;\xi)d\xi\in\mathcal{O}(K+i\varGamma_j 0)$$

とおく．定理 3.3.2 により

$$H(z)=\sum_{k=1}^{M}\int_{S^{n-1}\setminus\bigcup\varGamma_j{}^\circ}G_k(z;\xi)d\xi$$

は K の近傍で正則となり，定理 2.3.7 により

$$f(x)=\sum_{k=1}^{M}G_k(x+i\varDelta_k 0)=H(x)+\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\varGamma_j 0)$$

が成り立つ．ここで $H(x)$ は F_j のうちの任意の一つに繰込めるから，ともかく表示が得られた．あとは $F_j(z)$ の正則性を見ればよい．S.S. $f\cap\{x\}\times i\varGamma_j{}^\circ dx\infty=\phi$ とせよ．このとき定理 3.3.2 により $\sum_{k=1}^{M}G_k(z;\zeta)$ は $\{x\}\times(\varGamma_j{}^\circ\cap S^{n-1})$ の近傍で (z,ζ) の正則函数となる．故にこれを ξ につき積分して得られる $F_j(z)$ は $\{x\}$ の近傍で正則となる．証了．

補題 3.2.6 の証明は補題 3.2.7 からも従うが念のため独立にやっておこう．等式

$$f(x)=F_N(x+i\varGamma_N 0)=-\sum_{j=1}^{N-1}F_j(x+i\varGamma_j 0) \tag{3.3.6}$$

を考察しよう．左辺の特異スペクトルは $K\times i\varGamma_N{}^\circ dx\infty$ に含まれ，右辺のそれは $\bigcup_{j=1}^{N-1}(K\times i\varGamma_j{}^\circ dx\infty)$ に含まれる．故にこの共通元として定義される超函数 $f(x)$ の特異スペクトルは二つの集合の共通部分 $\bigcup_{j=1}^{N-1}(K\times i(\varGamma_N{}^\circ\cap\varGamma_j{}^\circ)dx\infty)$ に含まれる．定理 3.2.3 によれば，このとき

$$F_N(x+i\Gamma_N 0) = f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} G_{Nj}(x+i(\Delta_N+\Delta_j)0) \tag{3.3.7}$$

という表示が存在する．ここに Δ_j° は Γ_j° の十分小さい凸閉近傍であり，特に $\Delta_j^\circ \cap A=\phi$ であるようなものとする．これより

$$\sum_{j=1}^{N-1} (F_j+G_{Nj})(x+i\Delta_j 0) = 0 \tag{3.3.8}$$

が得られた．すなわち，Γ_j を少し狭くすることさえ厭わなければ，許された変形を用いて項 $F_N(x+i\Gamma_N 0)$ を一つ減らすことができた．この操作を繰返せば遂にただ一つの項による表示 $H_1(x+iE_1 0)=0$ に到達する．ここに $E_1 \Subset \Gamma_1$. しかるに補題 3.1.3 によれば，このとき実は $H_1(z)$ 自身 0 でなければならない．すなわち，項の縮約が完成した．証了.

補題 3.2.7 の証明 表示の項数 N に関する帰納法を用いる．$N=2$ のときは系 3.1.11 により成り立つ．この場合は $\Gamma_1+\Gamma_2$ を減らす必要もない．さて $N-1$ 個の楔に対する補題は成り立つとしよう．(3.3.6)式を再吟味する．同じ論法により (3.3.7)式を得るが，ここで右辺の分解成分 $G_{Nj}(z)$ は定理 3.2.3 により与えられているので，$F_N(x+i\Gamma_N 0)$ すなわち $f(x)$ が L の近傍に実軸まで延長できればやはりこれらも同じところまで延長できるように選べる．のみならず我々はさらに $F_j(z)$ が L の近傍に延長できれば，対応する項 $G_{Nj}(z)$ もまた同様の延長が可能であるように選べるということを示すことができる．これは少少ややこしいのでこの証明の最後に述べよう．さて，これらを用いて(3.3.8)が得られたから，帰納法の仮定により

$$F_j(z)+G_{Nj}(z) = \sum_{k=1}^{N-1} G_{jk}(z), \qquad j=1,\cdots,N-1$$

を満たす $G_{jk}(z)$, $j, k=1, \cdots, N-1$ で，$G_{kj}(z)=-G_{jk}(z)$, かつ $F_j(z)$ または $F_k(z)$ が L まで延長できるような番号については $G_{jk}(z)$ も L まで延長できるようなものが存在する．$G_{jN}(z)=-G_{Nj}(z)$ とおき，これを右辺にもってゆけば N 個の場合の証明が完了する．

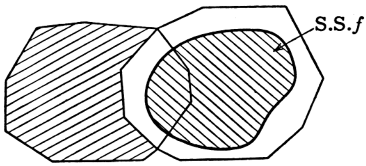
最後に上のような $G_{Nj}(z)$ の選び方を示しておこう．いま簡単のため(3.3.6)において $1\le j\le j_0$ に対する $F_j(z)$ が L の近傍まで解析接続できるものとする．このとき $G_{Nj}(z)$, $1\le j\le j_0$ も L の近傍まで解析接続できるように選ばねばならない．まずこのとき

$$\mathrm{S.S.}\,f|_L \subset \bigcup_{j=j_0+1}^{N-1} L\times i(\Gamma_N{}^\circ\cap\Gamma_j{}^\circ)dx\infty$$

に注意しよう．故に $\varDelta_j \Subset \Gamma_j$ を任意に選べば

$$\mathrm{S.S.}\,f\,\cap\,L\times i\left(\varDelta_N{}^\circ\cap\bigcup_{j=1}^{j_0}\varDelta_j{}^\circ\setminus\bigcup_{j=j_0+1}^{N-1}\varDelta_j{}^\circ\right)=\phi$$

が成り立つ．必要ならこの集合 $\varDelta_N{}^\circ\cap\bigcup_{j=1}^{j_0}\varDelta_j{}^\circ$ を細分して都合の悪い部分を



$\varDelta^\circ_N\cap\bigcup_{j=1}^{j_0}\varDelta^\circ_j$　　$\bigcup_{j=j_0+1}^{N-1}\varDelta^\circ_j$

図 3.6

$\bigcup_{j=j_0+1}^{N-1}\varDelta_j{}^\circ$ の方に繰込むことにより，始めから

$$\mathrm{S.S.}\,f\,\cap\,L\times i\left(\varDelta_N{}^\circ\cap\bigcup_{j=1}^{j_0}\varDelta_j{}^\circ\right)=\phi$$

と仮定しても一般性を失わないであろう．するとこの被覆に対し定理 3.2.3 を適用して得られる分解成分 $G_{Nj}(z)$ は，$1\le j\le j_0$ についてはLまで解析接続できることになる．証了．

問 3.3.1　微分方程式 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}u(x)=0$ の超函数解はちょうど変数 $x_2,\cdots,x_n$ のみの超函数であることを示せ．

§4　超函数の演算 II

この節ではさらに高級な演算を定義しよう．

1°　繊維に沿う積分　定積分といっても，変数の一部についてのみ積分し結果が残りの変数の超函数となるようなものの方がはるかに重要である．$f(x,t)$ を開集合 $\Omega\times T\subset \boldsymbol{R}^{n+m}$ 上の $n+m$ 変数 (x,t) の超函数とする．$K\subset T$ を区分的に滑らかな境界を持つ有界領域とし f は $\Omega\times\partial K$ の近傍で実解析的とする．

定理 3.4.1　このとき“繊維 K に沿う積分” $\displaystyle\int_K f(x,t)dt$ が定義され，$\mathcal{B}(\Omega)$ の元となる．また次の評価式が成り立つ．

$$\text{(3.4.1)}\qquad \operatorname{supp}\int_K f(x,t)dt \subset p_x(\operatorname{supp} f)$$

$$\text{(3.4.2)}\qquad \text{S.S.}\int_K f(x,t)dt \subset p_x(\text{S.S.} f \cap \{dt=0\})$$

$$\underset{\text{定義}}{=} \{(x, i\xi dx\infty);\ \exists t \text{ について } (x,t;i\xi dx\infty) \in \text{S.S.} f\}$$

ここに p_x は自然な射影 $\boldsymbol{R}^{n+m} \to \boldsymbol{R}^n$ (を $\Omega\times T \to \Omega$ に制限したもの)を表わし，$dt=0$ は $\boldsymbol{R}^{n+m}\times\boldsymbol{S}^{n+m-1}$ の部分集合 $\boldsymbol{R}^{n+m}\times(\boldsymbol{S}^{n-1}\times\{0\})$ を表わす．

証明　Ω を任意に固定した一点の微小近傍でおき換え，定理 3.2.3 を適用して

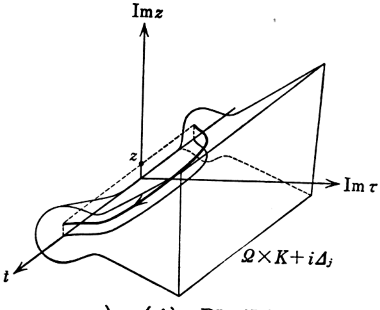
$$\text{(3.4.3)}\qquad f(x,t) = \sum_{j=1}^{N} F_j((x,t)+i\varDelta_j 0)$$

という境界値表示で各 $F_j(z,\tau)$ が $\Omega\times\partial K$ の近傍に解析接続できるものをとる．$\varGamma_j = p_x(\varDelta_j)$ とおこう．これは $\boldsymbol{R}^n$ の開凸錐となる．これに応じて無限小楔 $\Omega+i\varGamma_j 0$ をやはり $\Omega\times K+i\varDelta_j 0$ の射影像に入るように選べば，$z\in\Omega+i\varGamma_j 0$ を任意に固定するとき，区分的に滑らかな連続写像 $\varepsilon_j(t)$ で次のようなものが存在する：

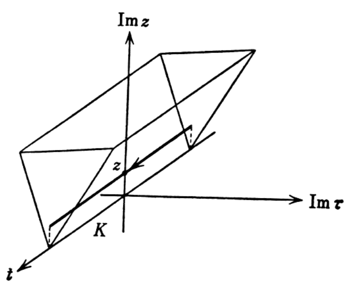
$$\begin{cases} \varepsilon_j(t)=0 & t\in\partial K \text{ のとき} \\ (z, t+i\varepsilon_j(t)) \in \Omega\times K+i\varDelta_j 0, & t\in \operatorname{Int}(K) \text{ のとき} \end{cases}$$

これを用いて積分路 $K+i\varepsilon_j$: $t+i\varepsilon_j(t)$, $t\in K$ を定める．(図 3.7 a), b) 参照．後者の場合には積分路は変形不要である．) そこで

$$\text{(3.4.4)}\qquad G_j(z) = \int_{K+i\varepsilon_j} F_j(z,\tau)d\tau$$



a) $p_x(\varDelta_j) = \boldsymbol{R}^n$ の場合



b) $p_x(\varDelta_j) = \{\operatorname{Im} z>0\}$ の場合

図 3.7

とおく．z をほんの少し動かしても積分路は同じものが使えるから，これは z の正則函数となる．さらに，積分路をとり替えつつ z を動かしてみれば $G_j(z)\in \mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_j 0)$ となることがわかる．そこで

$$\int_K f(x,t)\,dt=\sum_{j=1}^{N} G_j(x+i\Gamma_j 0) \tag{3.4.5}$$

と定義する．さて

$$\mathrm{S.S.}\int_K f(x,t)dt \subset \bigcup \Omega\times i\Gamma_j{}^\circ dx\infty$$

であるが，ここで $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の双対座標を (ξ,θ) と書けば

$$\Gamma_j{}^\circ=(p_x(\Delta_j))^\circ=\Delta_j{}^\circ\cap\{\theta=0\} \tag{3.4.6}$$

が成り立つ．実際

$$\begin{aligned}\xi\in(p_x(\Delta_j))^\circ &\iff \forall y\in p_x(\Delta_j) \text{ について } \langle\xi,y\rangle\ge 0\\ &\iff \forall(y,s)\in\Delta_j \text{ について } \langle(\xi,0),(y,s)\rangle\ge 0\\ &\iff (\xi,0)\in\Delta_j{}^\circ\end{aligned}$$

故に，考えている点の近傍を小さくし，そこで表示(3.4.3)の分割を細かくしてゆけば評価式(3.4.2)を得る．

最後に積分の結果が表示の選び方によらないことを見よう．$\mathcal{B}$ が層をなすことから，これにより Ω に沿って局所的に定められた積分(3.4.5)が $\mathcal{B}(\Omega)$ の元として貼り合せられることがわかり，また評価式(3.4.1)も得られる．補題3.2.7によれば，(3.4.3)が超函数0を表わすとき

$$F_j(z,\tau)=\sum_{k=1}^{N} H_{jk}(z,\tau), \qquad H_{kj}(z,\tau)=-H_{jk}(z,\tau)$$

を満たす $H_{jk}(z,\tau)\in\mathcal{O}(\Omega'\times T'+i(\Delta_j'+\Delta_k')0)$ がとれる．ここで $'$ を付けたのは対応する領域を少し縮めることを意味する．さらに同補題において $L=\bar{\Omega}'\times\partial K$ と選ぶことにより各 $H_{jk}(z,\tau)$ は $\Omega'\times\partial K$ の近傍に解析接続できると仮定できる．すると

$$H_{jk}(z)=\int_{K+i\varepsilon_j} H_{jk}(z,\tau)d\tau\in\mathcal{O}(\Omega'+i(\Gamma_j'+\Gamma_k')0)$$

が定義されるが，積分路を $K+i\varepsilon_j$ から $K+i\varepsilon_k$ に変更することにより $H_{kj}(z)=-H_{jk}(z)$ が確かめられる．故に(3.4.4)で定まる $G_j(z)$ について

$$G_j(z)=\sum_{k=1}^{N}H_{jk}(z),\quad j=1,\cdots,N,\quad H_{kj}(z)=-H_{jk}(z)$$

となり，従ってこの境界値として定まる超函数(3.4.5)は0に等しい．証了．

上の定理は特別な場合として supp f から $\boldsymbol{R}^n$ への射影が適正写像となっていれば適用できる．すなわち，$f(x,t)$ の台が t につき (x に関して局所一様に) コンパクトとなっていればよい．(正確な述語としてはこのとき f の台は，変数 t について**適正** (proper) であるといわれるが，本書では混乱のない限り，単に t につきコンパクトと言うことにする．もちろんこの言い方は，x に関する局所一様性を言わねば厳密には正しくない．) 実際，必要なら Ω を微小近傍でおき換え，$\Omega\times\mathrm{Int}(D)\supset\mathrm{supp}\,f(x,t)$ なる有界積分領域 D をとって $\int_D f(x,t)dt$ を計算すればよい．この積分を $\int_{\boldsymbol{R}^m}f(x,t)dt$ と書いて，コンパクトな繊維に沿う積分と呼ぶ．

積分 $\int_K f(x,t)dt$ を定義するための $f(x,t)$ の $\Omega\times\partial K$ における正則性は，もう少し弱めることができる．すなわち次の定理が成り立つ．

定理 3.4.2 $f(x,t)\in\mathcal{B}(\Omega\times T)$ は $\Omega\times\partial K$ の近傍で t を実解析パラメータとして含むとする(定理 3.2.10 参照)．このとき積分 $\int_K f(x,t)dt$ が定義でき，次の評価式が成り立つ．

(3.4.7)

$$\begin{aligned}\mathrm{S.S.}\int_K f(x,t)dt&\subset p_x(\mathrm{S.S.}\,f\cap\{dt=0\})\cup p_x(p_{dx}(\mathrm{S.S.}\,f\cap\Omega\times\partial K\times\boldsymbol{S}^{n+m-1}))\\&=\{(x,i\xi dx\infty);\ \exists t\ \text{について}\ (x,t,i\xi dx\infty)\in\mathrm{S.S.}\,f\ \text{または}\\&\qquad\exists t\in\partial K,\exists\theta\ \text{について}\ (x,t,i(\xi dx+\theta dt)\infty)\in\mathrm{S.S.}\,f\}\end{aligned}$$

証明 Ω を微小近傍でおき換え，再び定理 3.2.3 による $f(x,t)$ の分解を考える．

$$f(x,t)=\sum_{j=1}^{N}F_j((x,t)+i\Delta_j0)$$

において各成分は

i) $F_j(z,\tau)$ は $\Omega\times\partial K$ の近傍に解析接続できるか，あるいは

ii) $\Delta_j\cap\{s=0\}\neq\phi$ か (ここに $i\boldsymbol{R}^{n+m}$ の座標を $i(y,s)$ と記している)

のいずれかを満たしていると仮定してよい．実際，S. S. f を十分細かく分割すれば，後者が成り立たないような Δ_j については $\mathrm{S.S.}f\cap(\Omega\times\partial K\times i\Delta_j^\circ d(x,t)\infty)$

$=\phi$ とできるから，前者が成り立つと仮定できる．

さて，i) のような成分 $F_j((x,t)+i\Delta_j 0)$ に対しては積分 $\int_K F_j((x,t)+i\Delta_j 0)dt$ を定理 3.4.1 と同様の積分路により定義する(図 3.7 a) 参照)．この部分の特異スペクトルは先と同様 $\Omega\times i(\Delta_j{}^\circ\cap\{\theta=0\})dx\infty$ で評価され，これは(3.4.7)の右辺の第一因子を与える．また，ii) のような成分 $F_j((x,t)+i\Delta_j 0)$ に対しては直接

$$G_j(z)=\int_K F_j(z,t)dt, \qquad z\in\Omega+i(\Delta_j\cap\{s=0\})0 \text{ に対し，}$$

とおき，$G_j(x+i(\Delta_j\cap\{s=0\})0)$ を以て積分の結果とする．(図 3.7 b) を参照せよ．実はそこでも積分路を変更する必要は無かった．) 制限のところで注意したように，(3.2.24) が成り立つので，この超函数の特異スペクトルは $\Omega\times ip_{dx}(\Delta_j{}^\circ)dx\infty$ に含まれる．これは(3.4.7)の右辺の第二因子に対応する．これらの評価で近傍を小さくし分割を細かくしてゆけば(3.4.7)が証明される．

以上の定義の合法性は前定理と同様に示される．証了．

命題 3.4.3　以上の積分演算に関して次の諸公式が成り立つ．

a)　変数 x の実解析函数を係数とする線型偏微分作用素 $P(x,D)$ に対し

$$(3.4.8)\qquad P(x,D)\int_K f(x,t)dt=\int_K P(x,D)f(x,t)\,dt$$

b)　積分領域は $K=K_1\times K_2$ なる直積型とし，これに対応する変数の分割を $t=(t_1,t_2)$ とすれば

$$(3.4.9)\qquad \int_K f(x,t)dt=\int_{K_2}dt_2\int_{K_1}f(x,t)dt_1=\int_{K_1}dt_1\int_{K_2}f(x,t)dt_2$$

c)　t が一変数のとき

$$(3.4.10)\qquad \int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dt=f(x,b)-f(x,a)$$

一般に，$f(x,t)$ の台が t につき (x に関して局所一様に) コンパクトならば

$$(3.4.11)\qquad \int_{R^n}\frac{\partial}{\partial t_j}f(x,t)dt=0$$

証明　第一の公式は正則函数の微積分が同じ性質を持つことに注意すれば諸定義から直ちに従う．第二の公式を確かめよう．表示 $f(x,t)=\sum F_j((x,t)+i\Delta_j 0)$ を用いて，例えば第三辺の反復積分を計算することを考えよう．定理 3.

4.2 の証明中の分類で ii) に相当する項の場合は正則函数に対する通常の反復積分に帰着し，まったく問題なく重積分に戻る．i) に相当する項の場合は少し注意を要する．まず，積分路 K_2 を ∂K_2 は固定して $K_2+i\varepsilon_2$: $t_2+i\varepsilon_2(t_2)$, $t_2\in K_2$ と変形し

$$G_j(z, \tau_1) = \int_{K_2+i\varepsilon_2} F_j(z, \tau_1, \tau_2)d\tau_2$$

を計算する．次いで K_1 を ∂K_1 は固定して $K_1+i\varepsilon_1$ に変形し

$$H_j(z) = \int_{K_1+i\varepsilon_1} G_j(z, \tau_1)d\tau_1$$

を計算する．この反復積分は正則函数に対する通常のものであるから重積分にまとめられ

$$H_j(z) = \int_{(K_1+i\varepsilon_1)\times(K_2+i\varepsilon_2)} F_j(z, \tau)d\tau$$

となる．さて，このときの積分路は確かに $K_1\times K_2$ を $\Omega\times T+i\Delta_j0$ 内に変形するものではあるが，直積型のために定理 3.4.2 で用いたような $\partial(K_1\times K_2)$ を固定した変形とはなっていない．むしろ Cauchy の積分定理に現われるもののように "稜" $\partial K_1\times\partial K_2$ を固定しているだけである．この二つの性質の違う積分路は結局 Poincaré の定理を用いた変形により互いに移り得るはずであるが，変形を具体的に示すのは見にくいので次のように説明することにしよう．すなわち，もし $F_j(z, \tau)$ が実軸上 $K_1\times K_2$ の近傍まで正則ならば，積分路を一度実軸に戻して考えれば，二つの積分路による積分値が等しいことは明らかである．故に $(y^0, s^0)\in\Delta_j$ を適当にとれば $F_j(z+i\varepsilon y^0, \tau+i\varepsilon s^0)$, $\varepsilon>0$ に対しては二種の積分値は常に等しい．ここで $\varepsilon\downarrow 0$ とすれば $F_j(z, \tau)$ が $\Omega\times\partial(K_1\times K_2)$ では正則なことから，それぞれの積分は $F_j(z, \tau)$ に対する二種の積分にそれぞれ収束する．これで公式(3.4.9)が示された．

最後に部分積分の公式を示そう．$f(x, t)=\sum F_j((x, t)+i\Delta_j0)$ とすれば，$\dfrac{\partial}{\partial t}f(x, t)=\sum\dfrac{\partial F_j}{\partial\tau}((x, t)+i\Delta_j0)$ であるから

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(x, t)dt = \sum G_j(x+i\Gamma_j0),$$

$$G_j(z) = \int_{\gamma_j}\frac{\partial F_j}{\partial\tau}(z, \tau)d\tau$$

となる．ここにγ_jはaよりbに到る複素積分路であり，Γ_jは定理3.4.2の証明中の種別i), ii)に応じてそれぞれ$p_x(\Delta_j)$あるいは$\Delta_j\cap\{s=0\}$に等しい．しかるに第二の式から$G_j(z)=F_j(z,b)-F_j(z,a)$となり，結局(3.4.10)式が得られる．(その結果，i)の類の項の積分は実解析函数となってしまっていることに注意せよ．) 公式(3.4.11)の方は，積分領域を$f(x,t)$の台を含むような直方体にとり，いま証明したb)を用いて始めにt_jについて積分すれば，公式(3.4.10)から得られる．証了．

上の命題のb)の証明中に出てきた直積型の積分路変更は積分領域が直積型をしている場合に思わぬ有用性を発揮することがあるから覚えておくとよい．

最後にもう少し複雑な積分路を考えておこう．

補題 3.4.4 $f(x,t)=\sum_{j=1}^{N}F_j((x,t)+i\Delta_j0)$ なる表示において$\Gamma_j=p_x(\Delta_j)$とおく．∂Kのある近傍Lが存在し，もしも各$F_j(z,\tau)$が$\Omega\times L+i(\Gamma_j\times\{0\}+\Delta_j)\cup(\Gamma_j\times\{0\})$の近傍に解析接続できるならば，この表示を用いて$\int_K f(x,t)dt$を次のような積分路により計算することができる：$z\in\Omega+i\Gamma_j0$を固定し，区分的に滑らかな連続函数$\varepsilon_j(t)$を

$$\text{(3.4.12)}\qquad \begin{cases}\varepsilon_j(t)=0, & t\in\partial K\\ (z,t+i\varepsilon_j(t))\in\Omega\times K+i\Delta_j0, & t\in K\setminus L\end{cases}$$

かつ，$(z,t+i\varepsilon_j(t))$が常に$F_j(z,\tau)$の正則域に含まれるように選び，この函数によって定まる積分路を$K+i\varepsilon_j$: $t+i\varepsilon_j(t)$, $t\in K$とすれば，

$$\text{(3.4.13)}\qquad \int_K f(x,t)dt=\sum_{j=1}^{N}\left[\int_{K+i\varepsilon_j}F_j(z,\tau)d\tau\right]_{z\to x+i\Gamma_j0}.$$

証明 まず$\Omega\times L$における柏原の補題(系2.2.7)により，$F_j(z,\tau)$は実際には$\Gamma_j\times\{0\}$とΔ_jを含むある開凸錐Δ_j'を以て$\Omega\times L+i\Delta_j'0$の近傍で正則と仮定しても構わないことに注意せよ(図3.8参照)．そこで$F_j(z,\tau)$の正則域内に(3.4.12)のような積分路をとることが可能となる．さてこの積分路により計算された(3.4.13)が定理3.4.2の与える定義と一致することを見よう．$\Delta_j\cap\{s=0\}\neq\phi$なる項についてはそのままii)型に帰着され問題はない．$\Delta_j\cap\{s=0\}=\phi$なる項については，Δ_j°の被覆$\Delta_{j1}^\circ, \Delta_{j2}^\circ$で

a) $\mathrm{Int}(\Delta_{j1}^\circ\cup\Delta_{j2}^\circ)\supset\Delta_j^\circ$,

b) $\Delta_{j2}^\circ\supset\Delta_j'^\circ$, $\Delta_{j2}\cap\{s=0\}\neq\phi$,

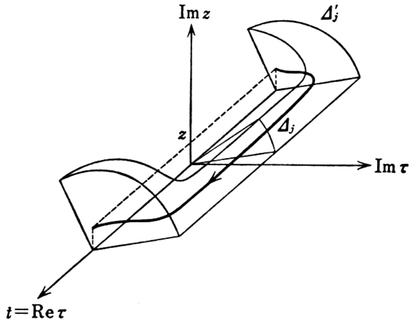


図 3.8

c)　$\Delta_{j1}{}^\circ \cap \Delta_j{}'^\circ = \phi$

を満たすものを選ぶ(図 3.9). これに応じて定理 3.2.3 により超函数 $F_j((x,t)+i\Delta_j 0)$ を $F_{j1}((x,t)+i\Delta_{j1}0)+F_{j2}((x,t)+i\Delta_{j2}0)$ と分解する. すると $F_{j2}(z,\tau)\in$

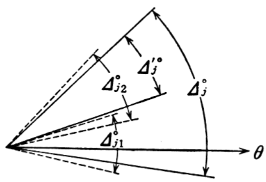


図 3.9

$\mathcal{O}(\Omega\times K+i\Delta_{j2}0)$ の方は ii) 型となり, また $F_{j1}(z,\tau)\in\mathcal{O}(\Omega\times K+i\Delta_{j1}0)$ の方は $\Delta_{j1}{}^\circ\cap\Delta_j{}'^\circ=\phi$ より $\Omega\times\partial K$ の近傍で実軸に延長でき, 従って i) 型となる. 故に

$$\int_{K+i\varepsilon_j} F_j(z,\tau)d\tau = \int_{K+i\varepsilon_j} F_{j1}(z,\tau)d\tau + \int_{K+i\varepsilon_j} F_{j2}(z,\tau)d\tau$$

と分けておいて, 右辺第二項の積分路を実軸に戻してやれば, それぞれ i) 型および ii) 型の積分として, この新しい分解に関して定理 3.4.2 の定義による計算と一致することがわかる. 証了.

上の補題で用いた超函数の境界値表示は, 大域的にはねじれた楔を用いており, 定義 3.1.1 に当てはまらない例になっている. このような表示は不自然なようだが, 実は次のようにかなり自然に現われる.

系 3.4.5　$f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)\in\mathcal{B}(\Omega)$, $g(t)=\sum G_k(t+i\Delta_k 0)\in\mathcal{B}(T)$ とし, 各 $G_k(\tau)$ はコンパクト積分領域 $K\subset T$ の境界 ∂K の近傍に解析接続できるとする. このとき $f(x)g(t)=\sum(F_jG_k)((x,t)+i\Gamma_j\times\Delta_k 0)$ なる表示は補題 3.4.4 の

仮定を満たす．これを用いて

$$\int_K f(x)g(t)dt = \sum_{j,k}\left[\int_{K+i\varepsilon_k} F_j(z)G_k(\tau)d\tau\right]_{z\to x+i\Gamma_{j0}} = f(x)\int_K g(t)dt \tag{3.4.14}$$

が得られる．

$F_j(z)G_k(\tau)$ の正則域は一般には定理 3.4.2 の証明中の i) 型にも ii) 型にもなっていないことに注意せよ．補題 3.4.4 が無いと上のような計算ができず，従って $f(x)$ が積分記号の外に出せることは自明ではなくなる．

例として，(3.1.1) で定義された δ 函数に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x_1,\cdots,x_n)dx_1 = \delta(x_2,\cdots,x_n)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x_1)dx_1 = \delta(x_2,\cdots,x_n)$$

が得られる．これを繰り返せば，命題 3.4.3 により

$$\int_{R^n}\delta(x)dx = 1 \tag{3.4.15}$$

従って，超函数として $\delta(x)\neq 0$ がわかり例 3.1.4 の評価が確立された．

問 3.4.1　n 変数実解析函数 $\varphi(x)$ に対し $\int_{R^n}\varphi(x)\delta(x)dx=\varphi(0)$ を示せ．

2°　座標変換　$\tilde{x}=\Phi(x):\Omega\to\tilde{\Omega}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合の間の実解析的座標変換とする．Ω 上で $\det(\partial\Phi_k/\partial x_j)\neq 0$ だから，この変換を複素近傍に拡張したもの $\tilde{z}=\Phi(z)$ は実軸に十分近いところでは $\det(\partial\Phi_k/\partial z_j)\neq 0$ を満たし，従って適当な複素近傍 $V\supset\Omega$ から $\tilde{V}\supset\tilde{\Omega}$ への正則な座標変換となる．この写像による超函数の引越しを考えよう．まず無限小楔がどう写るかを見る．写像に対する Taylor の定理(平たくいえば線型近似)により，$y\sim 0$ のとき

$$\tilde{z} = \Phi(z) \sim \Phi(x)+\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x(iy)$$

となる．ここに $(d\Phi/dx)_x=(\partial\Phi_k/\partial x_j)_x$ は，点 x における函数行列(即ち写像 $\tilde{x}=\Phi(x)$ の導函数)である．故に点 x における y 方向の無限小接ベクトル $x+iy0$ は，この写像により $\varphi(x)+i(d\Phi/dx)_x y0$ という，点 $\varphi(x)$ における $(d\Phi/dx)_x y$ 方向の無限小接ベクトルに写る．$x\in\Omega$ を固定したとき $(d\Phi/dx)_x$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上の可逆な一次変換だから，開凸錐 $\tilde{\Gamma}$ の引戻し $\Gamma_x=(d\Phi/dx)_x^{-1}\tilde{\Gamma}$ はやはり開凸錐となる．しかし，$(d\Phi/dx)_x^{-1}$ は x とともに変化するので，無限小楔 $\tilde{\Omega}+i\tilde{\Gamma}0$ は写像 Φ

により必ずしも Ω を刃とする本物の無限小楔には引戻されないで，少しねじれたものになる．それでも対応 $x\mapsto\Gamma_x=(d\Phi/dx)_x{}^{-1}\tilde{\Gamma}$ は連続だから，$F(\tilde{z})\in\mathcal{O}(\tilde{\Omega}+i\tilde{\Gamma}0)$ に対して $(\Phi^*F)(z)=F(\Phi(z))\in\mathcal{O}(\Phi^{-1}(\tilde{\Omega}+i\tilde{\Gamma}0))$ はやはり Ω 上の超函数を定めることができる．実際，各点 $x\in\Omega$ の十分小さい近傍において，Γ_x を少し縮めることにより領域 $\Phi^{-1}(\tilde{\Omega}+i\tilde{\Gamma}0)$ の中に本物の無限小楔をとり，そこへ $(\Phi^*F)(z)$ を制限したものの境界値をとればよい．$\mathcal{B}$ は層をなすから，このようにして定義された超函数の切断は Ω に沿って大域的につながる．このような訳であるから，こうして定まる超函数を $(\Phi^*F)(x+i(d\Phi/dx)_x{}^{-1}\tilde{\Gamma}0)$ と書いても問題は無いであろう．以上の考察から次の定理が得られる．

定理 3.4.6　$f(\tilde{x})=\sum_{j=1}^{N}F_j(\tilde{x}+i\tilde{\Gamma}_j0)\in\mathcal{B}(\tilde{\Omega})$ に対し，$\tilde{x}=\Phi(x)$ によるこの超函数の座標変換（による引戻し）を

$$\Phi^*f(x)=f(\Phi(x))=\sum_{j=1}^{N}(\Phi^*F_j)\left(x+i\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x^{-1}\tilde{\Gamma}_j0\right)$$

と定める．これに対し次の等式が得られる．

$$\text{(3.4.16)}\qquad \operatorname{supp}\Phi^*f=\Phi^{-1}(\operatorname{supp}f)$$

$$\text{(3.4.17)}\qquad \mathrm{S.S.}\,\Phi^*f=\left(\Phi^{-1}\times{}^t\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right)\mathrm{S.S.}\,f$$

$$\underset{\text{定義}}{=}\left\{\left(x,i\tilde{\xi}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x dx\infty\right);(\Phi(x),i\tilde{\xi}d\tilde{x}\infty)\in\mathrm{S.S.}\,f\right\}$$

証明　(3.4.17)だけを示せばよい．それは分割を細かくすることにより固定した一点 $x\in\Omega$ における公式

$$\text{(3.4.18)}\qquad \left(\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x^{-1}\tilde{\Gamma}\right)^\circ={}^t\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\tilde{\Gamma}^\circ$$

に帰着される．この式は次のようにして確かめられる．

$$\text{(3.4.19)}\qquad \xi\in\left(\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x^{-1}\tilde{\Gamma}\right)^\circ \iff \left\langle\xi,\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x^{-1}\tilde{\Gamma}\right\rangle\geq 0$$

$$\iff \left\langle{}^t\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x^{-1}\xi,\tilde{\Gamma}\right\rangle\geq 0$$

$$\iff {}^t\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x^{-1}\xi\in\tilde{\Gamma}^\circ$$

$$\iff \xi\in{}^t\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x(\tilde{\Gamma}^\circ)$$

(3.4.17)の最後の行の書き直しにおいては$(d\Phi/dx)_x$を行列とみて横ベクトル$\tilde{\xi}$を左から，また列ベクトルdxを右から掛けている．この式は(3.4.19)と類似の次の計算により正当化される:

$$\left\langle {}^t\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\tilde{\xi}, dx\right\rangle=\sum_{j,k}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_k}\tilde{\xi}_j dx_k=\left\langle\tilde{\xi},\sum_k\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}dx_k\right\rangle=\left\langle\tilde{\xi},\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x dx\right\rangle$$ 証了.

座標変換の例については注12参照.

座標変換と積分との関係についても期待される通りのことが成り立つ．すなわち

補題3.4.7　a)　$f(\tilde{x})\in\mathcal{B}(\tilde{\Omega})$はコンパクト積分領域$\tilde{K}\subset\tilde{\Omega}$の境界$\partial\tilde{K}$の近くで実解析的とし，$\tilde{x}=\Phi(x):\Omega\to\tilde{\Omega}$を座標変換とすれば

$$\int_{\tilde{K}}f(\tilde{x})d\tilde{x}=\int_{\Phi^{-1}(\tilde{K})}f(\Phi(x))\left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\right|dx$$

ここに$|\det(d\Phi/dx)_x|$は写像Φの函数行列式の絶対値を表わす.

b)　$f(x,\tilde{t})\in\mathcal{B}(\Omega\times\boldsymbol{R}^m)$は$\tilde{t}$につき($x$に関して局所一様に)コンパクト台を有する超函数で，$\tilde{t}=\Phi(x,t)$は$(x,\tilde{t})\in\mathrm{supp}\,f(x,\tilde{t})$の近傍で$t$につき逆に解けるような実解析写像とする．このとき$(x,t)\mapsto(x,\tilde{t})$は座標変換となるが，これにより$f(x,\tilde{t})$を変換したもの$f(x,\Phi(x,t))\in\mathcal{B}(\Omega\times\boldsymbol{R}^m)$も$t$につき($x$に関して局所一様に)コンパクトな台を持つ超函数となり

$$\int_{\boldsymbol{R}^m}f(x,\tilde{t})d\tilde{t}=\int_{\boldsymbol{R}^m}f(x,\Phi(x,t))\left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{(x,t)}\right|dt$$

が成り立つ．ここに$|\det(\partial\Phi/\partial t)_{(x,t)}|$は写像$\Phi$を$x$は固定して変換$t\to\tilde{t}$と見たときの函数行列式の絶対値を表わす.

証明はいずれも，積分を計算するための都合の良い境界値表示をとって，複素積分路上の正則函数に対する通常の積分として表わしたものの変数変換に対する挙動を見れば自然にわかる．b)の場合には，始め一定であった複素変数τに関する積分路が，座標変換後はxに依存するようになるが，$f(x,\Phi(x,t))$がその境界付近で0ということから，xを十分小さい近傍に限れば，積分結果を変更することなく再び一定の積分領域にとり替えることができるのである．写像Φが向きを逆転する場合には函数行列式が実軸上で負になる一方，Φで写された後の複素積分路の向きと実軸の正の向きとが互いに逆になるので，絶対値を

つければつじつまが合う．最終的な公式においては積分領域 $\Phi^{-1}(\tilde{K})$ 等は向きを持たないただの集合と考えられていることに注意せよ．

なお，定理 3.4.1 や 3.4.2 で示された一般の纖維に沿う積分に対する座標変換は，一般に x に解析的に依存するような積分路 $K(x)$ というものに関する積分

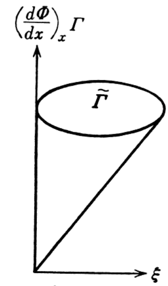
$$\int_{K(x)} f(x,t)dt$$

を導入しておけば同様に論ずることができるが，これは実は後にもっと統一した見方で上の補題の b) の場合に帰着させられる．

3° 代入 §2 で与えた制限と上に与えた座標変換をまとめて一般化したものとして，$\tilde{x}=\Phi(x)$ という $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ から $\tilde{\Omega}\subset \boldsymbol{R}^m$ への実解析写像を超函数 $f(\tilde{x})\in \mathcal{B}(\tilde{\Omega})$ に**代入**する $\Phi^*f(x)=f(\Phi(x))$ という演算が考えられる．ところで，$\Phi^*F(\tilde{x}+i\tilde{\Gamma}0)$ は当然 $F(\Phi(z))$ で定義されるべきものだから，この函数がまず何らかの無限小楔 $\Omega+i\Gamma 0$ で正則にならねばならぬ．すなわち，($x\in\Omega$ を固定したとき) $(d\Phi/dx)_x\Gamma\subset\tilde{\Gamma}$ となるような開凸錐 Γ が存在しなければならぬ．しかるに

$$(3.4.20)\quad \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\Gamma\subset\tilde{\Gamma}\Longleftrightarrow\left(\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\Gamma\right)^\circ\supset\tilde{\Gamma}^\circ,\ \mathrm{Ker}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\cap\Gamma=\phi,$$
$$\left(\mathrm{Image}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\right)^\circ\cap\tilde{\Gamma}^\circ=\{0\}$$

が成り立つ．(ここで $\mathrm{Ker}\,(d\varphi/dx)_x$, $\mathrm{Image}\,(d\Phi/dx)_x$ は線型写像 $(d\Phi/dx)_x:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ の核および像を表わす．) 何故なら，(3.4.20) の右辺の第一の条件は，双対錐をとれば $\overline{(d\Phi/dx)_x\Gamma}\subset\bar{\tilde{\Gamma}}$ と同値である．これから $(d\Phi/dx)_x\Gamma\subset\tilde{\Gamma}$ を結論するためには $(d\Phi/dx)_x\Gamma$ の各点が $\tilde{\Gamma}$ の境界点になっていないことを保障しておかなければならない．(3.4.20) の右辺の第二の条件は $0\notin(d\Phi/dx)_x\Gamma$ を保障し，また第三の条件は $\tilde{\Gamma}$ の 0 以外の境界点が $(d\Phi/dx)_x\Gamma$ に含まれないことを保障している．(図 3.10 参照．Γ が開錐なので $(d\Phi/dx)_x\Gamma$ は線型部分空間 $\mathrm{Image}\,(d\Phi/dx)_x$ を張り，その中で $(d\Phi/dx)_x\Gamma$ は開錐となっていることに注意．故にもしも $(d\Phi/dx)_x\Gamma$ が凸開錐 $\tilde{\Gamma}$ の境界を成す母線を含めば，条件 $\overline{(d\Phi/dx)_x\Gamma}\subset\bar{\tilde{\Gamma}}$ より $(d\Phi/dx)_x\Gamma$ は $\partial\tilde{\Gamma}$ に含まれてしまう．) さて (3.4.19) の計算を思い起こせば，(3.4.20) の右辺は更に次のように書き換えることができる:



$\xi \in \left(\mathrm{Image}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\right)^\circ \cap \tilde{\Gamma}^\circ$の図　**図 3.10**

$$\Longleftrightarrow {}^t\!\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x^{-1} \Gamma^\circ \supset \tilde{\Gamma}^\circ,\ \mathrm{Image}\, {}^t\!\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x + \Gamma^\circ = \boldsymbol{R}^n,$$

$$\left(\mathrm{Image}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\right)^\circ \cap \tilde{\Gamma}^\circ = \{0\}$$

$$\Longleftrightarrow \Gamma^\circ \supset {}^t\!\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x \tilde{\Gamma}^\circ,\ \mathrm{Image}\, {}^t\!\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x + \Gamma^\circ = \boldsymbol{R}^n, \tag{3.4.21}$$

$$\left(\mathrm{Image}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\right)^\circ \cap \tilde{\Gamma}^\circ = \{0\}$$

(ただし，ここでは ${}^t(d\Phi/dx)_x^{-1}$ は必ずしも一対一でない写像 ${}^t(d\Phi/dx)_x$ による逆像を表わしている.) さて最後の辺においては，$\tilde{\Gamma}$ に課せられる条件というのは結局第三の条件のみであり，あとはこれに応じた Γ の選択の仕方を規定しているものである. 実際，もし Image ${}^t(d\Phi/dx)_x=0$ なら Ker ${}^t(d\Phi/dx)_x=$ (Image $(d\Phi/dx)_x)^\circ=\boldsymbol{R}^m$ となるが，第三の条件により $\tilde{\Gamma}^\circ=\{0\}$ となり，こんなときは如何なる $\tilde{\Gamma}$ についても代入は不可能である. またもし Image ${}^t(d\Phi/dx)_x$ $\neq 0$ なら，第三の条件より Ker ${}^t(d\Phi/dx)_x \cap \tilde{\Gamma}^\circ=\{0\}$，従って $\tilde{\Gamma}^\circ \neq \{0\}$ なら ${}^t(d\Phi/dx)_x\tilde{\Gamma}^\circ \neq \{0\}$ だから，これを含むような内点を持つ閉凸錐 Γ° をとっておけば，第一の条件はもちろん第二の条件をも満たすことができる. 以上の議論を各点 $x\in\Omega$ に局所化し，与えられた代入されるべき超函数 $f(\tilde{x})$ の表示を細かくしてゆけば，結局次の定理が得られたことになる.

定理 3.4.8　写像 $\Phi:\boldsymbol{R}^n\supset\Omega\to\tilde{\Omega}\subset\boldsymbol{R}^m$ の一般化された意味での**余法球束** (conormal sphere bundle) を

$$(\mathrm{Image}\, d\Phi)^\perp = \left\{(\Phi(x), i\tilde{\xi}\, d\tilde{x}\infty) \in \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{S}^{m-1}; x \in \Omega,\ \tilde{\xi} \perp \mathrm{Image}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x\right\}$$

とおく．代入 $\Phi^* f(x)=f(\Phi(x))$ は S. S. $f\cap(\mathrm{Image}\ d\Phi)^{\perp}=\phi$ のとき可能であり，この代入に関して次の評価式が成り立つ

(3. 4. 22)　$$\mathrm{supp}\ f(\Phi(x))\subset\Phi^{-1}(\mathrm{supp}\ f(x))$$

(3. 4. 23)　$$\mathrm{S.\,S.}\ f(\Phi(x))\subset\left(\Phi^{-1}\times{}^t\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right)\mathrm{S.\,S.}\ f$$
$$=\left\{\left(x, i\tilde{\xi}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_x dx\infty\right);\ (\Phi(x); i\tilde{\xi}d\tilde{x}\infty)\in\mathrm{S.\,S.}\ f\right\}$$

代入の条件の記述において $\tilde{\xi}\in(\mathrm{Image}\ (d\Phi/dx)_x)^{\circ}$ と $\tilde{\xi}\perp\mathrm{Image}\ (d\Phi/dx)_x$ とは同じ意味を持つことに注意せよ．実際，線型部分空間 E に対しては，それが (-1) 倍に関して閉じていることから，$\langle\xi, y\rangle\geq 0$ で定まる E° も $\langle\xi, y\rangle=0$ で定まる $E^{\perp}$ も同じ集合になる．評価式(3. 4. 23)は(3. 4. 21)の第一の条件から従う．そこでは Γ° は内点を持たねばならぬと言ったが，それは ${}^t(d\Phi/dx)_x\tilde{\Gamma}^{\circ}$ にいくらでも近くとれるのだから，閉集合である S. S. $f(\Phi(x))$ の評価としては結局上のようになるのである．最後の行の書き換えは座標変換の場合の(3. 4. 17)と全く同様である．

例 3. 4. 9　a)　実解析曲線 $\Phi(t):\boldsymbol{R}\supset\Omega\to\boldsymbol{R}^n$ を考えよう．$f(x)$ をこの曲線の近傍で定義された n 変数超函数とするとき，$d\Phi/dt=\Phi'(t)$ はいわゆる曲線の接ベクトルで，代入の条件は S. S. f がこれと垂直なベクトル，すなわち曲線の余法線を含まぬこととなる．ただし曲線の特異点，すなわち $\Phi'(t)=0$ となる点においては，余法線はあらゆる方向をとり得るので，$f(x)$ はそこでは実解析的でなければならない．さて $f(\Phi(t))$ は一変数超函数となり

(3. 4. 24)　$$\mathrm{S.\,S.}\ f(\Phi(t))\subset\{(t, i\xi\Phi'(t)dt\infty);\ (\Phi(t), i\xi dx\infty)\in\mathrm{S.\,S.}\ f\}$$

特異スペクトルの方向成分については $dx=\Phi'(t)dt$ という形式通りの代入結果になっていることに注意されたい．なお，この例は $\Phi'(t)\neq 0$ なる点では座標変換により定理 3. 2. 10 の特別の場合に帰着する．

b)　実数値の実解析函数 $\Phi(x):\boldsymbol{R}^n\supset\Omega\to\boldsymbol{R}$ を考える．$f(t)$ をこの値域の近傍で定義された一変数超函数とするとき，代入 $f(\Phi(x))$ は $d\Phi_x=0$ なる点 $t=\Phi(x)$ で $f(t)$ が実解析的のときに可能となる．ここに $d\Phi_x=\sum_{j=1}^{n}(\partial\Phi/\partial x_j)_x dx_j$ の略記である．実際このときには $(d\Phi/dx)_x\xi=\sum_{j=1}^{n}(\partial\Phi/\partial x_j)_x\xi_j=d\Phi_x\cdot\xi$ という線型写像であり $d\Phi_x\neq 0$ または $d\Phi_x=0$ に応じて $\mathrm{Image}\ (d\Phi/dx)_x=\boldsymbol{R}$ または $\{0\}$ となる．故に

$$(3.4.25)\qquad \mathrm{S.S.}\, f(\Phi(x)) = \{(x, i\theta d\Phi_x\infty)\ ;\ (\Phi(x), i\theta dt\infty) \in \mathrm{S.S.}\, f\}$$

となる．ここで評価が等号になっているのは逆向きの包含関係がこの場合は明らかだからである．また，ここでも特異スペクトル成分は $t=\Phi(x)$ に対し $dt=d\Phi$ という形式的代入の結果になっていることに注意せよ．このように特異スペクトル成分に対する dx というアクセサリーは，実際計算において具体的有用性を持っているのである．

問 3.4.2　$\varphi(x)$ を $\varphi(x)=0$ のとき $d\varphi_x \neq 0$ なる実数値実解析函数とする．超函数 $\dfrac{1}{\varphi(x)+i0}$ および $\delta(\varphi(x))$ を定義しその台と特異台，特異スペクトルを調べよ．

問 3.4.3　超函数 $\delta(x_1-x_2{}^2)$ の台，特異台，特異スペクトルを決定し積分 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x_1-x_2{}^2)dx_1$ および $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x_1-x_2{}^2)dx_2$ を計算せよ．

問 3.4.4　$\boldsymbol{R}^3$ 上の $(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)_+{}^\lambda$，$(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^\lambda$ という超函数は上の理論ではそれぞれどこで定義されるか？　またそこでの台，特異台，特異スペクトルはどうなっているか？

4°　畳み込み　今までに定義して来た演算の集大成として二つの超函数の**畳み込み** (convolution) を定義しよう．

定義 3.4.10　$f(x)$, $g(x)$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上の二つの超函数とし，どちらか一方はコンパクトな台を持つとする．このとき，f, g の畳み込みを

$$(3.4.26)\qquad f*g = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

と定める．

定理 3.4.11　次の諸公式が成り立つ

$$(3.4.27)\qquad f*g = g*f$$

$$(3.4.28)\qquad D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g = f*(D^\alpha g)$$

$$(3.4.29)\qquad \delta*f = f*\delta = f$$

さらに，h もコンパクトな台を持つ超函数とすれば

$$(3.4.30)\qquad (f*g)*h = f*(g*h)$$

また次の諸評価式が成り立つ．

$$(3.4.31)\qquad \mathrm{supp}\, f*g \subset \mathrm{supp}\, f + \mathrm{supp}\, g$$

$$(3.4.32)\qquad \mathrm{sing\ supp}\, f*g \subset \mathrm{sing\ supp}\, f + \mathrm{sing\ supp}\, g$$

(3.4.33)　$\mathrm{S.S.}\, f*g \subset \{(x+y; i\xi dx\infty); (x, i\xi dx\infty) \in \mathrm{S.S.}\, f,$
$(y, i\xi dx\infty) \in \mathrm{S.S.}\, g\}$

証明　上に与えられた畳み込みの定義は明らかに既知のいくつかの演算の組み合わせであるから，その構成を追いながらまず定義が正当であることを順番に確認してゆこう．この過程で特異スペクトル等の評価式も自然に出てくる．さて，$f(x-y)$ は代入の一種であるが，これは明らかにいつでも可能な部類の代入であり，定理 3.4.8 により

$$\mathrm{supp}\, f(x-y) \subset \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^{2n}; x-y \in \mathrm{supp}\, f\}$$

$$\mathrm{S.S.}\, f(x-y) \subset \{(x, y, i(\xi dx-\xi dy)\infty); (x-y, i\xi dx\infty) \in \mathrm{S.S.}\, f\}$$

となる．次に積 $f(x-y)g(y)$ を考えると，これは定理 3.2.5 により可能で

(3.4.34)　$$\mathrm{supp}\, f(x-y)g(y) \subset \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^{2n}; x-y \in \mathrm{supp}\, f, y \in \mathrm{supp}\, g\}$$
$$\subset (\mathrm{supp}\, f+\mathrm{supp}\, g)\times \mathrm{supp}\, g$$

(3.4.35)　$$\mathrm{S.S.}\, f(x-y)g(y) \subset \{(x, y; i(\lambda(\xi dx-\xi dy)+(1-\lambda)\eta dy)\infty);$$
$$(x-y, i\xi dx\infty) \in \mathrm{S.S.}\, f,\ (y, i\eta dy\infty) \in \mathrm{S.S.}\, g,\ 0\leq\lambda\leq 1\}$$

が成り立つ．特に(3.4.34)の始めの評価と f または g がコンパクトな台を持つという仮定により，$f(x-y)g(y)$ の y に関する台は x に関して局所一様にコンパクトになっていることに注意されたい．故に定理 3.4.1 により積分 $\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ が意味を持つ．同じ定理により(3.4.34)の 2 行目の評価を用いて(3.4.31)が得られる．また(3.4.35)からは(3.4.33)が得られる．実際，y に関する積分を行なった後に残る特異スペクトルの方向成分は，高々(3.4.35)において dy の係数が 0 であるようなものから来るのだから

$$-\lambda\xi+(1-\lambda)\eta = 0, \qquad 0 < \lambda < 1$$

すなわち ξ と η とが同じ向きのものに限るのである．空間成分の方をも考慮すれば，こうして(3.4.33)が得られる．これからまた(3.4.32)も得られる．

さて，定義により

$$g*f = \int_{\boldsymbol{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

であるが，これと(3.4.26)とを比べてみれば，$\tilde{x}=x, \tilde{y}=x-y$ という座標変換にすぎないことがわかる．故に補題 3.4.7 b) により $f*g=g*f$ が成り立つ．(3.4.28)は命題 3.4.3 a) の特別な場合にすぎない．また(3.4.30)は両辺を定義

により書き直してみれば，やはり変数変換と積分順序変更(命題 3.4.3 b) と補題 3.4.7 b)) から得られることがわかる．最後に(3.4.29)が残った．これは $f(x-y)$ が y を実解析パラメータとして含むことに注意すれば，次の補題 3.4.12 を用いて $f(x-y)=f(x)+\sum_{k=1}^{n} y_k g_k(x,y)$ と表わされ，従って次のようにして導かれる．

$$f*\delta=\int_{R^n} f(x-y)\delta(y)dy=\int_{R^n} f(x)\delta(y)dy+\sum_{k=1}^{n}\int_{R^n} g_k(x,y)y_k\delta(y)dy = f(x)$$

ここで第一項の計算には系 3.4.5 とその後の計算(3.4.15)を用い，また第二項においては $y_k\delta(y)=0$ を用いた．後者は $y_k\delta(y_k)=0$ から直ちに得られる．証了．

補題 3.4.12　T を原点の凸近傍とし，超函数 $f(x,t)\in\mathcal{B}(\Omega\times T)$ は $t=(t_1,\cdots,t_m)$ を実解析パラメータとして含むとする．このとき同じく t を実解析パラメータとして含む m 個の超函数 $g_k(x,t)\in\mathcal{B}(\Omega\times T)$，$k=1,\cdots,m$ で

(3.4.36)
$$f(x,t)=f(x,0)+\sum_{k=1}^{m} t_k g_k(x,t)$$

を満たすものが存在する．

証明　定理 3.2.10 で示したように $f(x,t)=\sum F_j((x,t)+i\Delta_j 0)$，$\Delta_j\cap\{s=0\}\neq\phi$ という境界値表示をとる．この各項について Taylor の定理

$$F_j(z,\tau)=F_j(z,0)+\sum_{k=1}^{m}\tau_k\int_0^1\frac{\partial F_j}{\partial\tau_k}(z,\rho\tau)d\rho$$

が成り立つ．必要なら Δ_j を少し狭めることにすれば，$\int_0^1\frac{\partial F_j}{\partial\tau_k}(z,\rho\tau)d\rho$ はやはり開き Δ_j を持つ無限小楔で正則となり，従ってそれらの境界値の和として実解析パラメータを持つ超函数 $g_k(x,t)$ が定まる．上の式から境界値をとり j について加えれば(3.4.36)が得られる．($g_k(x,t)$ の大域的存在は $f(x,t)$ の境界値表示の大域的存在の下に従う．故に定理 3.2.3 を用いている現在の段階では $g_k(x,t)$ の存在域は少し狭くなるものとしなければならない．) 証了．

畳み込み $f*g$ は要するに積分(3.4.26)が x の超函数として意味を持てばよいので，定義 3.4.10 以外にも可能な場合がいろいろある．ここでは典型的な例を考えたわけである．

問 3.4.5　$f(t)$ を原点に台を持つ一変数超函数とするとき，$\boldsymbol{R}^2$ 上の超函数 $f(x_1^2+x_2^2-1)*Y(x_1)$ の台，特異台，および特異スペクトルを評価せよ．

問 3.4.6　$f(x_1, x_2)$ を台が $x_1=x_2{}^2$ に含まれる超函数とするとき，畳み込み $f(x_1, x_2) * \delta(x_1-x_2{}^2)$ は意味を持つことを示し，その台，特異台および特異スペクトルを評価せよ．

問 3.4.7　$f(x,t)|_{t=0}=\int f(x,t)\delta(t)dt$ を示し，これを用いて定理 3.2.5 と定理 3.4.1 から定理 3.2.10 を証明してみよ．

§5　通常の函数の埋め込み

一変数の場合と同様 $L_{1,loc}$ を $\mathcal{B}$ に埋め込むことを試みよう．(以下の議論は分布の理論を既知の読者には容易に $\mathcal{D}'$ の $\mathcal{B}$ への埋め込みの場合に翻訳できるように展開されるであろう．) 一変数の場合にはこの埋め込みを Cauchy 核を用いて定義した．多変数の場合に Cauchy 核の役割を果たすのは通常の Cauchy 核と Radon 分解核の二つがある．埋め込みの議論はそのどちらか一方のみを用いても行なうことができるが，ここでは双方の便利なところを利用する立場でゆこう．

そこでまず第2章§3の内容を既に確立された超函数の演算の言葉に翻訳することから始める．閉凸錐 Γ° (で開凸錐 Γ の双対となっているもの) に対し

$$W_\alpha(z, \Gamma^\circ) = \int_{\Gamma^\circ \cap S^{n-1}} W_\alpha(z, \xi) d\xi \tag{3.5.1}$$

とおこう ($\alpha \geq 0$)．これは型 $\boldsymbol{R}^n + i\Gamma 0$ の無限小楔 $\bigcap_{\xi \in \Gamma^\circ \cap S^{n-1}} \{y\xi > \alpha(y^2-(y\xi)^2)\}$ 上の正則函数であり，$\alpha>0$ のときはさらに $\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ へも解析接続される．これから $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数 $W_\alpha(x+i\Gamma 0, \Gamma^\circ)$ が定まるが，記号の濫用で以下これを $W_\alpha(x, \Gamma^\circ)$ と書くことにしよう．

補題 3.5.1　S^{n-1} を閉多角錐 $\Gamma_j{}^\circ$, $j=1, \cdots, N$ により相互に共通内点を持たぬように被覆したとき

$$\delta(x) = \sum_{j=1}^{N} W_\alpha(x, \Gamma_j{}^\circ) \tag{3.5.2}$$

証明　(3.5.2) の右辺が球面の分割の選び方によらぬ一定の超函数を定めることはまさに超函数の相等性の定義から出る．(共通の分割を経由して変形すればよい．) そこで特に象限分割に対応する被覆をとろう．Γ_σ を第 σ 象限とすれば，まず $\alpha=0$ の場合，補題 2.3.1 の証明中の計算 (2.3.9) より

$$\sum_\sigma W_0(x, \overline{\Gamma_\sigma}) = \sum_\sigma \frac{1}{(-2\pi i)^n}\frac{\operatorname{sgn}\sigma}{z_1\cdots z_n}\Big|_{z\to x+i\Gamma_\sigma 0}$$

となるが，定義によりこれは δ 函数(3.1.1)に等しい．次に $\alpha>0$ の場合は，補題 2.3.5 の証明中の計算(2.3.22)より，境界積分の部分を略記して

$$W_\alpha(z, \overline{\Gamma_\sigma}) = W_0(z, \overline{\Gamma_\sigma}) + \sum_{j=1}^n B_{\sigma,j}(z) \tag{3.5.3}$$

となるが，そこで述べたことを超函数の言葉に翻訳すれば，この式から実軸への境界値に移って σ につき総和をとったとき，右辺第二項は隣同士の象限で 2 項ずつ打ち消し合い，全体として 0 になることがわかる．故に

$$\sum_\sigma W_\alpha(x, \overline{\Gamma_\sigma}) = \sum_\sigma W_0(x, \overline{\Gamma_\sigma}) = \delta(x).$$

証了.

系 3.5.2　Γ_j は上の補題と同じとする．$f(x)$ をコンパクトな台を持つ超函数とするとき，積分

$$F_{\alpha,j}(z) = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(w) W_\alpha(z-w, \Gamma_j{}^\circ)dw \tag{3.5.4}$$

は型 $\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_j 0$ の無限小楔で正則となり，$\alpha>0$ のときは更に $\boldsymbol{R}^n \setminus \operatorname{supp} f$ へ解析接続できる．また

$$f(x) = \sum_{j=1}^N F_{\alpha,j}(x+i\Gamma_j 0) \tag{3.5.5}$$

が成り立つ．さらに $f(x)$ の台が直方体 $D=[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ に含まれているときには，$\alpha=0$ とし球面の被覆として象限分割をとれば

$$F(z) \underset{\text{定義}}{=} \operatorname{sgn}\sigma\, F_{0,\sigma}(z) = \frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D \frac{f(w)dw}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)} \tag{3.5.6}$$

は連結開集合 $(\boldsymbol{P}^1\setminus[a_1, b_1])\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus[a_n, b_n])$ で正則，かつどれか一つの $z_j=\infty$ のとき 0 となり

$$f(x) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma F(x+i\Gamma_\sigma 0).$$

実際，(3.5.2)式より

$$f(x) = f(x)*\delta(x) = \sum_{j=1}^N f(x)* W_\alpha(x, \Gamma_j{}^\circ)$$

となるが，ここで§4 に与えた積分の定義を用い，$f(x)$ の境界値表示を導入し右辺の各畳み込みを書き下してみれば

$$f(x)*W_\alpha(x,\Gamma_j{}^\circ)=\left[\int_{R^n}f(w)W_\alpha(z-w,\Gamma_j{}^\circ)dw\right]_{z\to x+i\Gamma_j0}$$

となることが容易にわかる.

さて，(3.5.6)で与えられるような定義函数は特別な有用性を持っているので，これを別に取り上げておこう.

定義 3.5.3　公式(3.5.6)で与えられる $F(z)$ を超函数 $f(x)$ の**標準定義函数**と呼び，これに対する境界値を $f(x)=[F(z)]$ と書く．もう少し一般に $[a_j, b_j]$ の複素近傍 U_j があって $F(z)\in\mathcal{O}((U_1\setminus[a_1,b_1])\times\cdots\times(U_n\setminus[a_n,b_n]))$ となっているとき，$F(z)$ の定める超函数を $[F(z)]$ と書く．すなわち

$$[F(z)]=\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma F(x+i\Gamma_\sigma 0)$$

このとき $\operatorname{supp}[F(z)]\subset[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ となることに注意せよ．実際この直方体の外では，定義函数はある座標面を境として二つずつ互いに打ち消し合う．さて，このような定義函数に対しては，定積分が一変数の場合と類似の次の公式で計算できる.

補題 3.5.4　$F(z)\in\mathcal{O}((U_1\setminus[a_1,b_1])\times\cdots\times(U_n\setminus[a_n,b_n]))$ とし，γ_j を U_j 内で $[a_j,b_j]$ を正の向きに一周する閉路とする．$\varphi(x,t)\in\mathcal{O}(U_1\times\cdots\times U_n\times T)$ とすれば

$$\int_{R^n}\varphi(x,t)[F(z)]dx=(-1)^n\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\varphi(z,t)F(z)dz_1\cdots dz_n \tag{3.5.7}$$

ここに積分の意味はパラメータ t を固定して計算したものである.

証明　命題 3.4.3 b) により

$$\int_{R^n}\varphi(x,t)[F(z)]dx=\int_{R^{n-1}}dx'\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,t)[F(z)]dx_1$$

と反復積分に分解される．ここに $x'=(x_2,\cdots,x_n)$ である．この変数の空間 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の第 σ' 象限を $\Gamma'_{\sigma'}$ で表わせば，補題 3.4.4 により，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,t)[F(z)]dx_1$$
$$=\sum_{\sigma'}\operatorname{sgn}\sigma'\left[\int_{\gamma_1{}^+}\varphi(z,t)F(z)dz_1-\int_{\gamma_1{}^-}\varphi(z,t)F(z)dz_1\right]_{z'\to x'+i\Gamma'_{\sigma'}0}$$

となる．ここに $\gamma_1{}^\pm$ は，a_1 の左方のある点より発し，それぞれ上および下半平面を通って b_1 の右方のある点に到る積分路である．故に $\gamma_1=-\gamma_1{}^++\gamma_1{}^-$ という

閉路をとれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,t)[F(z)]dx_1=\sum_{\sigma'}\operatorname{sgn}\sigma'\left[-\oint_{\gamma_1}\varphi(z,t)F(z)dz_1\right]_{z'\to x'+i\Gamma'_{\sigma'}0}$$

となり，帰納法により(3.5.7)が得られる．証了．

さて，以上の議論における $f(x)$ を普通の函数でおき換えることを考えよう．$\alpha>0$ を固定する．まず，コンパクトな台を持つ L_1 級函数 $f(x)$ に対し，球面 $\boldsymbol{S}^{n-1}$ の閉多角錐 $\Gamma_j{}^\circ$ による分割を一つ選んで

$$F_{\alpha,j}(z)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(w)W_\alpha(z-w,\Gamma_j{}^\circ)dw \tag{3.5.8}$$

とおこう．これはもちろん補題2.3.5において $f(x)$ から作られた函数 $F_\alpha(z;\zeta)$ に対する積分

$$\int_{\Gamma_j{}^\circ\cap S^{n-1}}F_\alpha(z;\xi)d\xi$$

にも等しい．$F_{\alpha,j}(z)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_j0)$ であり，従って

$$\iota(f)=\sum_{j=1}^{N}F_{\alpha,j}(x+i\Gamma_j0) \tag{3.5.9}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数を定める．表現(3.5.8)と補題3.5.1の証明により，この超函数が球面の分割の仕方によらぬことがわかる．こうしてコンパクトな台を持つ L_1 級函数に対して超函数への埋め込み写像 ι が定義できた．しかも系2.3.6から積分順序変更により $\operatorname{supp}\iota(f)\subset\operatorname{supp}f$ がわかる．このことを用いて ι の定義を一般の元 $f(x)\in L_{1,loc}(\Omega)$ に拡張しよう．$f(x)=\sum_\lambda f_\lambda(x)$ と局所有限和に分解し

$$\iota(f)=\sum_\lambda\iota(f_\lambda)$$

と定める．台の条件よりこの式の右辺もまた局所有限和となっているから，$\mathcal{B}$ が層をなしていることに注意すればこの和は Ω 上の超函数を一つ定める．

定理 3.5.5　この対応により層の準同型 $\iota:L_{1,loc}\to\mathcal{B}$ が定まり $L_{1,loc}$ は $\mathcal{B}$ の部分層となる．この包含写像は先に定義した $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，および通常の意味の $\mathcal{A}\to L_{1,loc}$ という二つの包含写像と両立する．

証明　ι が台の分解の仕方によらずに確定し層の準同型となることは，一変数の場合と全く同様にして示される．ι が単射であることの証明も Cauchy 核が曲面 Radon 分解核に変わるだけで形式的には全く同じである．最後に実解

析函数 $f(x)$ に対しては，閉領域 $D\subset\Omega$ の定義函数を $\chi(x)$ とするとき，$\chi(x)f(x)$ の L_1 級函数としての埋め込みは

$$\iota(\chi f)=\sum F_{\alpha,j}(x+i\Gamma_j 0)$$

である．ここに

$$F_{\alpha,j}(z)=\int_{\Gamma_j{}^\circ\cap S^{n-1}}F(z;\xi)d\xi,\qquad F(z;\zeta)=\int_D f(w)W_\alpha(z-w,\zeta)dw$$

定理 2.3.7 によれば $F_{\alpha,j}(z)$ は D の内部に解析接続され，それらの和が $f(x)$ に等しい．すなわち超函数として

$$\iota(\chi f)|_{\mathrm{Int}(D)}=\sum_j F_{\alpha,j}(x+i\Gamma_j 0)|_{\mathrm{Int}(D)}=f(x)$$

これは埋め込み $\mathscr{A}\to L_{1,loc}\to\mathscr{B}$ の局所的な両立性を示している．証了．

参考 3.5 $L_{1,loc}$ の代わりに Schwartz の分布 $\mathscr{D}'$ を考えるときはもちろん $\chi(x)$ を C_0^∞ 級函数でおき換えなければならない．後者も値が 1 の集合の内部では定義函数と同じ役割を果たす．

こうして定まった埋め込み写像 $\iota:L_{1,loc}\to\mathscr{B}$ はまた平面 Radon 分解核や Cauchy 核を用いても表わせることを示そう．同時に ι がパラメータ $\alpha>0$ の値によらぬこともわかる．

補題 3.5.6 L_1 級函数 $f(x)$ の台は直方体 $D=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ に含まれているとする．このとき

$$F_{0,j}(z)=\int_D f(w)W_0(z-w,\Gamma_j{}^\circ)dw$$

は楔 $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_j$ で正則となり

$$\iota(f)=\sum_{j=1}^N F_{0,j}(x+i\Gamma_j 0)\tag{3.5.10}$$

が成り立つ．特に球面の被覆として象限分割によるものをとれば

$$F(z)\underset{\text{定義}}{=}\operatorname{sgn}\sigma\, F_{0,\sigma}(z)=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D\frac{f(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw\tag{3.5.11}$$

は $(\boldsymbol{P}^1\setminus[a_1,b_1])\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus[a_n,b_n])$ で正則となり，どれか一つの $z_j=\infty$ のとき 0，かつ

$$\iota(f)=\sum_\sigma\operatorname{sgn}\sigma\, F(x+i\Gamma_\sigma 0)=[F(z)]\tag{3.5.12}$$

が成り立つ.

証明 超函数(3.5.10)は明らかに球面の分割の仕方によらないので，象限分割の場合に(3.5.10)が超函数として(3.5.9)と等しいことを確かめれば十分である．しかるに(3.5.3)により

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma} F_{\alpha,\sigma}(x+i\Gamma_{\sigma}0) &= \sum_{\sigma}\left[\int_{R^n} f(w)W_{\alpha}(z-w,\overline{\Gamma_{\sigma}})dw\right]_{z\to x+i\Gamma_{\sigma}0}\\ &= \sum_{\sigma}\left[\int_{R^n} f(w)W_{0}(z-w,\overline{\Gamma_{\sigma}})dw\right]_{z\to x+i\Gamma_{\sigma}0}\\ &\quad+\sum_{\sigma,j}\left[\int_{R^n} f(w)B_{\sigma,j}(z-w)dw\right]_{z\to x+i\Gamma_{\sigma}0}\end{aligned}$$

ここで最後の辺の第一項は $\sum_{\sigma} F_{0,\sigma}(x+i\Gamma_{\sigma}0)$ を与え，また第二項は $B_{\sigma,j}(z)$ が二つずつ打ち消し合ったことから全く同じ理由で 0 に帰する．証了.

次に諸種の演算と埋め込み写像 ι との両立性を調べよう.

定理 3.5.7 $\varphi\in\mathscr{A}(\Omega)$ とする.

a) $f\in L_{1,loc}(\Omega)$ に対し $\varphi\cdot\iota(f)=\iota(\varphi f)$

b) $f\in C^1(\Omega)$ に対し $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\iota(f)=\iota\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$

c) $\varphi(x,t)\in\mathscr{A}(\Omega\times T)$ とする．$f\in L_{1,loc}(\Omega)$ が(体積確定の)コンパクト集合 $K\subset\Omega$ の境界付近で実解析的ならば，任意に固定した t の値に対し

(3.5.13) $$\int_K \varphi(x,t)f(x)dx=\int_K \varphi(x,t)\iota(f)dx$$

証明 a) 実解析函数による積は L_1 級函数に対しても超函数に対しても局所的に定まるので，分割により台が直方体 $D\subset\Omega$ に含まれるような L_1 級函数 $f(x)$ に対して等式を確かめておけば十分である．そこで(3.5.11)で与えられる定義函数を採用し $\iota(f)=[F(z)]$ と見なそう．D の直積型複素凸近傍 $U_1\times\cdots\times U_n$ を適当にとれば $\varphi(z)\in\mathcal{O}(U_1\times\cdots\times U_n)$ となり，$\varphi(x)\iota(f)=[\varphi(z)F(z)]$ であるが，ここで

$$\begin{aligned}\varphi(z)F(z) &= \frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D \frac{\varphi(z)f(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw\\ &= \frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D \frac{\varphi(w)f(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw\\ &\quad+\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D \frac{(\varphi(z)-\varphi(w))f(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw\end{aligned}$$

と変形される．この右辺の第一項の正則函数は境界値にゆくと定義により $\iota(\varphi f)$ を与える．第二項が境界値として超函数 0 を与えることを示そう．Taylor の定理より

$$\varphi(z)-\varphi(w)=\sum_{j=1}^{n}(z_j-w_j)\varphi_j(z,w)$$

と書くことができる．ここに

$$\varphi_j(z,w)=\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(w+\rho(z-w))d\rho$$

は z, w がそれぞれ $U_1\times\cdots\times U_n$ の上を動くとき，これらの正則函数である．これを上の式に代入したとき，例えばそのうちの一項

$$G_1(z)=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D\frac{(z_1-w_1)\varphi_1(z,w)f(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw$$
$$=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D\frac{\varphi_1(z,w)f(w)dw}{(z_2-w_2)\cdots(z_n-w_n)}$$

は $U_1\times(U_2\setminus[a_2,b_2])\times\cdots\times(U_n\setminus[a_n,b_n])$ で正則となり，符号つき境界値の和 $\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma G_1(x+i\Gamma_\sigma 0)$ を考えると定義函数は座標面 $y_1=0$ を通して二つずつ互いに打ち消し合い，超函数 0 を定める．他の項 $G_j(z)$ についても同様である．

b) 同様の理由で再び $\iota(f)=[F(z)]$ と仮定して証明すればよい．(今回は台を分割するのに $C_0{}^1$ 級の函数を用いる必要があるであろう．) 定義により

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\iota(f)=\left[\frac{\partial}{\partial z_j}F(z)\right]$$

ところで，仮定により $f(x)$ は C^1 級なので部分積分が許され

$$\frac{\partial}{\partial z_j}F(z)=\frac{\partial}{\partial z_j}\left\{\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D\frac{f(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw\right\}$$
$$=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D f(w)\frac{\partial}{\partial z_j}\left\{\frac{1}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}\right\}dw$$
$$=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D f(w)\left(-\frac{\partial}{\partial w_j}\right)\left\{\frac{1}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}\right\}dw$$
$$=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_D\frac{\partial f(w)}{\partial w_j}\frac{1}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw$$

となる．最後の正則函数は超函数 $\iota(\partial f/\partial x_j)$ を定める．

c) まず f の台がコンパクトのときを考えよう．このとき supp f はある直

方体 D に含まれるとしてよい．a) によれば $\iota(\varphi(x,t)f(x))=\varphi(x,t)\iota(f)$ となる．(変数 t は f に陰に含まれると考えれば変更なしに適用できる．) 補題 3.5.4 により $\iota(f)$ の定義函数(3.5.11)を用いて証明すべき式(3.5.13)の右辺を計算してみよう．

$$\begin{aligned}\int_{R^n}\varphi(x,t)\iota(f)dx &= (-1)^n\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\varphi(z,t)F(z)dz_1\cdots dz_n\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\varphi(z,t)\left\{\int_D\frac{f(x)}{(z_1-x_1)\cdots(z_n-x_n)}dx\right\}dz_1\cdots dz_n\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_D f(x)dx\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{\varphi(z,t)}{(z_1-x_1)\cdots(z_n-x_n)}dz_1\cdots dz_n\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_D\varphi(x,t)f(x)dx\end{aligned}$$

となる．ここに積分順序の交換は広義積分の一様収束(あるいは Fubini の定理)により許された．

次に一般の場合を考えよう．f の台を K のコンパクトな近傍 L に C^n 級函数を用いて切り落とすことにより，supp $f\Subset L$ と仮定しても一般性を失わない．通常の積分の積分領域に関する加法性と，既に示した場合とを用いて

$$\begin{aligned}\int_K\varphi(x,t)f(x)dx &= \int_L\varphi(x,t)f(x)dx-\int_{\overline{L\setminus K}}\varphi(x,t)f(x)dx\\ &= \int_L\varphi(x,t)\iota(f)dx-\int_{\overline{L\setminus K}}\varphi(x,t)f(x)dx\end{aligned}$$

となる．超函数の積分も積分領域に関する加法性を有するから，最後の項が $\int_{\overline{L\setminus K}}\varphi(x,t)\iota(f)dx$ に等しいことを示せばよい．すなわち，始めから f は C^n 級と仮定して構わない．再び f の台を K の近傍に切り落とそう．このとき定義により ($\alpha>0$ として)

$$\iota(f)=\sum_{j=1}^N F_{\alpha,j}(x+i\Gamma_j0),\qquad F_{\alpha,j}(z)=\int_{\Gamma_j^\circ\cap S^{n-1}}F_\alpha(z;\xi)d\xi$$

であるが，補題 2.3.5 により $F_{\alpha,j}(z)$ は K の近傍において実軸まで連続函数として延長され，延長された函数 $F_{\alpha,j}(x)$ について $f(x)=\sum_j F_{\alpha,j}(x)$ が成り立っている．一方，超函数に対する積分の定義より適当な積分路 $K+i\varepsilon_j$ を用いて

$$\int_K\varphi(x,t)\iota(f)dx=\sum_{j=1}^N\int_{K+i\varepsilon_j}\varphi(z,t)F_{\alpha,j}(z)dz$$

であり，ここで各積分は上に述べたことから実軸の上まで変形され，その結果

$$\sum_{j=1}^{N}\int_K \varphi(x,t)F_{\alpha,j}(x)dx=\int_K \varphi(x,t)f(x)dx$$

を与える．証了．

問 3.5.1 (3.5.11)式で与えられる $F(z)$ は超函数 $\iota(f)$ の標準定義函数であることを示せ．

例 3.5.8 $K\subset \boldsymbol{R}^n$ を(体積を持つ)コンパクト集合とし $\chi(x)$ をその定義函数とすれば，$\chi(x)$ は L_1 級函数で，従ってそれ自身超函数とみなせる．

$$\text{S.S.}\,\chi(x)\subset \partial K\times iS^{n-1}dx\infty$$

であり，一般にはこの評価はこれ以上良くはならない．ただし，∂K が実解析的な超曲面をなす部分では，特異スペクトルは ∂K の法線方向だけになる．実際，座標変換すれば局所的に $Y(x_1)$ に帰着されるからである．

補題 3.5.9 $f(x,t)\in\mathcal{B}(\Omega\times T)$ とし，$K\subset T$ を区分的に滑らかな境界 ∂K を持つコンパクト集合とする．もし $f(x,t)$ が $\Omega\times\partial K$ の近傍で t を実解析パラメータとして含めば，超函数としての積 $\chi(t)f(x,t)$ が定義され

$$\int_K f(x,t)dt=\int_{\boldsymbol{R}^m}\chi(t)f(x,t)dt \tag{3.5.14}$$

証明 $\chi(t)$ の境界値表示

$$\chi(t)=\sum_k G_k(t+iE_k0) \tag{3.5.15}$$

で，各 $G_k(\tau)$ が $\boldsymbol{R}^m\setminus\partial K$ に解析接続できるようなものを選ぶ．また，定理 3.4.2 の証明を思い出し

$$f(x,t)=\sum F_j((x,t)+i\Delta_j0)$$

と表わす．そこでの分類の意味で，i) $F_j(z,\tau)$ が $\Omega\times\partial K$ の近傍に解析接続できる場合，$\Gamma_j=p_x(\Delta_j)$ とおけば

$$\int_K F_j((x,t)+i\Delta_j0)dt=\left[\int_{K+i\varepsilon_j}F_j(z,\tau)d\tau\right]_{z\to x+i\Gamma_j0} \tag{3.5.16}$$

であった．ここで積分路は ∂K の近傍では実軸上にあるものとし，$L\Subset K$ においてのみ変形を受けているとする．一方，$D\Supset K$ を適当に選べば

$$\int_{R^m} \chi(t) F_j((x,t)+i\varDelta_j 0)dt = \sum_k \left[\int_{D+i\varepsilon_k'} F_j(z,\tau) G_k(\tau) d\tau \right]_{z\to x+i\Gamma_j 0}$$

ここに積分路 $D+i\varepsilon_k'$ は ∂D を固定し ∂K の近傍では楔 $\boldsymbol{R}^m+iE_k0$ の方向に複素領域に逃れ，再び実軸に一旦戻った後 L の上では $K+i\varepsilon_j$ と同じ変形に従うものである．前半の $\overline{D\setminus L}$ に対する積分を I_1，後半の L に対するそれを I_2 とおけば，明らかに

$$I_1 = \int_{\overline{R^n \setminus L}} F_j(z,t)\chi(t)dt$$

である．ただし，ここでは $\chi(t)$ を超函数，$F_j(z,t)$ を実解析函数と思っている．故に定理 3.5.7 c) により，これは L_1 級函数に対する通常の意味の積分と等しく，従って $I_1 = \int_{\overline{K\setminus L}} F_j(z,t)dt$ にも等しい．一方，$I_2 = \int_{L+i\varepsilon_j} F_j(z,\tau)d\tau$ であり，従って

$$I_1+I_2 = \int_{K+i\varepsilon_j} F_j(z,\tau)d\tau$$

となり，(3.5.16) に帰着する．

次に，ii) $\varDelta_j \cap \{s=0\} \neq \phi$ の場合，$\Gamma_j = \varDelta_j \cap \{s=0\}$ とおけば

$$\int_K F_j((x,t)+i\varDelta_j 0)dt = \left[\int_K F_j(z,t)dt \right]_{z\to x+i\Gamma_j 0}$$
$$= \left[\int_{R^m} F_j(z,t)\chi(t)dt \right]_{z\to x+i\Gamma_j 0}$$

であった．ここで最後の積分は通常の L_1 級函数に対するものの意味であるが，定理 3.5.7 c) により，これを超函数の意味の積分と思ってもよい．故に証明すべきことは次のような補題の特別な場合となる．証了．

補題 3.5.10　$F((x,t)+i\varDelta 0) \in \mathcal{B}(\Omega\times T)$ は $\varDelta \cap \{s=0\} = \Gamma \neq \phi$ を満たすとする．$g(t)$ をコンパクトな台 $\subset T$ を持つ超函数とするとき

$$\int_{R^m} F((x,t)+i\varDelta 0)g(t)dt = \left[\int_{R^m} F(z,t)g(t)dt \right]_{z\to x+i\Gamma 0}$$

この補題自身も $g(t)$ の境界値表示を導入すれば，超函数の積分の定義から容易に導かれる．系 3.5.2 の証明中で使ったのもこの特別な場合である．

さて，(3.5.14) の右辺は積 $\chi(t)f(x,t)$ が定義できさえすれば意味を持つので，繊維に沿う積分の定義における $f(x,t)$ の $\Omega\times\partial K$ における滑らかさの仮定を場

合によっては更に弱めることができることを注意しておこう.

問 3.5.2 $\dfrac{1}{x_1+ix_2}$ は $\boldsymbol{R}^2$ 上の局所可積分函数であり，従って超函数とみなせる. その定義函数を求め$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}+i\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\dfrac{1}{x_1+ix_2}\right)$を超函数の意味で計算せよ.

問 3.5.3 $\boldsymbol{R}^3$ 上の局所可積分函数 $1/\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}$ について同様の考察を行ない，この超函数に対し Laplace 作用素$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}$ を施してみよ.

系 2.3.2 や補題 2.3.5 は，普通の函数に対しこの節で定義した超函数への埋め込みが，境界値をとることによりもとの函数に戻ることを示しており，埋め込みの定義のもっともらしさを表わしている. 一方，これとある意味で逆の関係にあるものとして，次の重要な結果がある.

補題 3.5.11 $F(z)\in\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma 0)$ は実軸まで連続に延長できるとする. この延長された連続函数 $F(x)$ を再び超函数とみなしたとき $\iota(F(x))=F(x+i\Gamma 0)$ となる.

証明 任意のコンパクト集合 $K\subset\Omega$ の上で等号を示せばよい. 球面 $\boldsymbol{S}^{n-1}$ の分割 $\Gamma_j{}^\circ$, $j=1,\cdots,N$ を一つ選び，$\Gamma_1{}^\circ\supset\Gamma^\circ$ となっているようにする. $\alpha>0$ とし，$D\supset K$ をとっていつもの通り

$$F_\alpha(z;\zeta)=\int_D F(w)W_\alpha(z-w;\zeta)dw$$

$$F_{\alpha,j}(z)=\int_{\Gamma_j{}^\circ\cap S^{n-1}}F_\alpha(z;\xi)d\xi$$

とおけば，埋め込みの定義により K の近傍で

$$\iota(F(x))=\sum_{j=1}^{N}F_{\alpha,j}(x+i\Gamma_j 0)$$

一方，$b\in\Gamma$ を適当に選んで，十分小さい $\varepsilon>0$ に対して $D+i\{\varepsilon b\}$ が常に $F(z)$ の正則域に含まれるようにし，

$$F_\alpha{}^\varepsilon(z;\zeta)=\int_{D+i\{\varepsilon b\}}F(w)W_\alpha(z-w;\zeta)dw$$

$$F_{\alpha,j}{}^\varepsilon(z)=\int_{\Gamma_j{}^\circ\cap S^{n-1}}F_\alpha{}^\varepsilon(z;\xi)d\xi$$

とおこう. 定理 2.3.7 により $K+i\{\varepsilon b\}$ の近傍で

$$\sum_{j=1}^{N} F_{\alpha,j}{}^{\varepsilon}(z) = F(z) \tag{3.5.17}$$

となる．また補題 3.3.1 により，ε が十分小さいとき $F_{\alpha,1}{}^{\varepsilon}(z) \in \mathcal{O}(K+i\Gamma_1 0)$ であり，$F_{\alpha,j}{}^{\varepsilon}(z)$, $j=2,\cdots,N$ は K の近傍まで解析接続できる．故に(3.5.17)は十分小さい無限小楔 $K+i\Gamma_1 0$ の上で成り立っているとしてよい．Poincaré の定理によれば，$F_\alpha{}^{\varepsilon}(z;\zeta)$ と $F_\alpha{}^{\varepsilon'}(z;\zeta)$ の差は ∂D をずらした部分に相当する側面上の積分

$$H_{\varepsilon'}{}^{\varepsilon}(z;\zeta) = \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} i|b|dt \int_{\partial D} F(w+itb) W_\alpha(z-w-itb;\zeta)dw$$

に等しい．ここに dw は ∂D 上の体積要素である．ここで $\varepsilon' \downarrow 0$ とすれば，これは $F_\alpha{}^{\varepsilon}(z;\zeta)$ と $F_\alpha(z;\zeta)$ の差

$$H^{\varepsilon}(z;\zeta) = \int_{0}^{\varepsilon} i|b|dt \int_{\partial D} F(w+itb) W_\alpha(z-w-itb;\zeta)dw$$

に収束する．このものは補題 2.3.4 により $K \times \boldsymbol{S}^{n-1}$ のある一定の複素近傍において z,ζ につき正則，かつ $\varepsilon \downarrow 0$ のとき明らかにそこで一様に 0 に収束する．故に $F_{\alpha,j}(z)$, $j=2,\cdots,N$ もまた K の近傍で正則となり，(3.5.17)より

$$\begin{aligned}
\iota(F(x)) &= F_{\alpha,1}(x+i\Gamma_1 0) + \sum_{j=2}^{N} F_{\alpha,j}(x) \\
&= F_{\alpha,1}(x+i\Gamma_1 0) + \sum_{j=2}^{N} F_{\alpha,j}{}^{\varepsilon}(x) - \int_{S^{n-1}\setminus\Gamma_1{}^\circ} H^{\varepsilon}(x;\xi)d\xi \\
&= F_{\alpha,1}(x+i\Gamma_1 0) - F_{\alpha,1}{}^{\varepsilon}(x+i\Gamma_1 0) + F(x+i\Gamma 0) - \int_{S^{n-1}\setminus\Gamma_1{}^\circ} H^{\varepsilon}(x;\xi)d\xi
\end{aligned}$$

ここで右辺の各項は $K+i\Gamma_1 0$ で正則だから，超函数 $\iota(F(x))$ は $G(x+i\Gamma_1 0)$ 型の単項表示を持つことがわかった．ここに $G(z) \in \mathcal{O}(K+i\Gamma_1 0)$ であり，これはもちろん ε に依存しないとしてよい．($\iota(F(x))$ が ε に依存しないから．) さて，補題 3.1.3 によれば，単項表示の一意性が成り立つから，任意の ε に対し

$$G(z) = F_{\alpha,1}(z) - F_{\alpha,1}{}^{\varepsilon}(z) + F(z) - \int_{S^{n-1}\setminus\Gamma_1{}^\circ} H^{\varepsilon}(z;\xi)d\xi$$

が，ある無限小楔 $K+i\Gamma_1 0$ の上で成り立つ．ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，明らかに $F_{\alpha,1}{}^{\varepsilon}(z) \to F_{\alpha,1}(z)$, $\int_{S^{n-1}\setminus\Gamma_1{}^\circ} H^{\varepsilon}(z;\xi)d\xi \to 0$, すなわち $G(z) \equiv F(z)$ が得られる．証了．

系 3.5.12(古典的な楔の刃定理の局所形)　$F_j(z) \in \mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_j 0)$, $j=1,2$ とす

る．各 $F_j(z)$ は実軸まで連続に延長され，延長された函数について等号 $F_1(x)=F_2(x)$ が成り立つとせよ．このとき $F_1(z)$ と $F_2(z)$ は $\Omega+i(\Gamma_1+\Gamma_2)0$ の上で正則な共通の元 $F(z)$ につながる．

実際，上の補題によりこれは超函数の意味の等号 $F_1(x+i\Gamma_10)=F_2(x+i\Gamma_20)$ とみなせるから，系 3.1.11 に帰着する．

付記　多変数の超函数論は佐藤[1]，[3]により理論の梗概が発表されたが，予告された証明の詳細等は遂に出版されなかった．多変数超函数の一般的参考書としては小松[3]，Schapira [1]，森本[1]，柏原-河合[1]等がある．はじめの二つは佐藤の原論文を解読するための Martineau および Harvey-小松の研究成果を載せた古典的文献である．その後，特異スペクトルの理論等の大発展があったため参考書としてはやや古くなっているかもしれない．特異スペクトルの理論を含むミクロ函数の理論も 1960 年代後半に佐藤自身により展開された．彼の連続講演が柏原[1]に記録されている．これも歴史的文献である．

森本[1]および柏原-河合[1]はすぐれた参考書である．本書の執筆に当っても森本[1]を適宜利用させていただき，また柏原-河合[1]は直接見る機会を得なかったが，その骨格の一部をなした名古屋大学における柏原の講義録(木村によるノート)を参考にさせていただいた．最近の発展に関する佐藤自身の思想をうかがうには佐藤[4](名古屋大学における講義の浪川によるノート)を一読するのもよい．

この章で展開したような超函数の演算の初等的説明については，はっきり文献になったものはないが，著者はこれを柏原の諸処における講義から学んだ．Cerezo-Piriou-Chazarain [1] にもその概要が載っている．これを曲面 Radon 分解を用いて直接理論化してしまう創意は片岡[1]に示唆された．§5 に述べた普通の函数の埋め込み，及びその応用としての古典的楔の刃定理の説明もこれですっきりしたと思う，なお，Schwartz の分布の理論でも特異スペクトル理論の類似が試みられているが，これについては，Hörmander [2]，熊之郷[1]，金子[1]等と比較されるとよい．(この方面の文献では，普通，特異スペクトルに対して(解析的)波面集合という言葉が用いられている．)また同じ概念は，場の理論を研究する物理学者によっても独立に得られた．Bros-Iagolnitzer[1]を見よ．これらの文献では，特異スペクトルの理論を Fourier 変換の局所化としてとらえている．本書においても第2章§3の記述からそのことは納得されるであろう．なお，このような立場からの特異スペクトルの説明は本書の後半の Fourier 変換のところで再び取り上げられる．

計算練習として挙げた例は十分とは言い難いが，これについてはGelfand-Shilov[1]の諸例を我々の立場から解釈してみるのが良い練習となるであろう．

第3章の問題

問題1　空間1次元の波動方程式 $(\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2)u=0$ を考察する．

a)　この方程式の超函数の一般解 $u(t,x)$ を求めよ．

b)　それについて $\mathrm{S.S.}\,u(t,x)\subset \boldsymbol{R}^2\times(\{\pm i(dt+dx)\infty\}\cup\{\pm i(dt-dx)\infty\})$ を示せ．

c)　次の方程式の解 $E_0(t,x)$ を求めよ(これをCauchy問題の基本解と呼ぶ)．

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E_0(t,x)=0\\ E_0(0,x)=0,\quad \dfrac{\partial E_0}{\partial t}(0,x)=\delta(x)\end{cases}$$

d)　$E(t,x)=Y(t)E_0(t,x)$ とおき $\mathrm{supp}\,E$，$\mathrm{sing\,supp}\,E$，$\mathrm{S.S.}\,E$ を求め，また $(\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2)E(t,x)$ を計算せよ．(これを作用素 $\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2$ の基本解と呼ぶ)

e)　$f(t,x)$ を台が $\{t\geq 0\}$ に含まれる超函数とするとき，$f*E$ は意味を持つことを示せ．

f)　$\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2:\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^2)\to\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^2)$ は全射であることを示せ．[$Y(-t)E_0(t,x)$ も用いよ．]

g)　任意の開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^2$ に対し $\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2:\mathcal{B}(\Omega)\to\mathcal{B}(\Omega)$ も全射であることを示せ．[$\mathcal{B}$ の脆弱性を用いよ．]

問題2　$\boldsymbol{R}^3$ 上のLaplace作用素 Δ の基本解 $-(1/4\pi r)$ が既知であるとして次に答えよ．

a)　$\Omega\subset\boldsymbol{R}^3$ を有界開集合とするとき，$\Delta:\mathcal{B}(\Omega)\to\mathcal{B}(\Omega)$，$\Delta:\mathcal{A}(\Omega)\to\mathcal{A}(\Omega)$ は全射であることを示せ．[$\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$の元に延長して $*(-1/4\pi r)$ を計算する．]

b)　$\Delta:C^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$，$\Delta:\mathcal{D}'(\Omega)\to\mathcal{D}'(\Omega)$ も全射であることを示せ．

c)　$u(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ とする．もし $\Delta u\in\mathcal{A}(\Omega)$ (または $\in C^\infty(\Omega)$，または $\in\mathcal{D}'(\Omega)$) なら $u\in\mathcal{A}(\Omega)$ (または $\in C^\infty(\Omega)$ または $\in\mathcal{D}'(\Omega)$) である．[$*(-1/4\pi r)$ で求めた解を引き算してみよ．]

問題3　Levi-溝畑の作用素 $P(x,D)=\partial/\partial x_1-ix_1(\partial/\partial x_2)$ を考える．

a)　$e(x)$ を正則函数 $1/(2z_2+iz_1^2)$ の $\mathrm{Im}\,(2z_2+iz_1^2)>0$ からの境界値として定まる超函数とするとき，$\mathrm{supp}\,e(x)$，$\mathrm{sing\,supp}\,e(x)$，$\mathrm{S.S.}\,e(x)$ を求め，また $e(x)|_{x_1=0}$，$P(x,D)e(x)$，$P(x,D)(Y(x_1)e(x))$ を計算せよ．

b)　Cauchy問題

$$\begin{cases} P(x, D)u = 0 \\ u|_{x_1=0} = v(x_2) \end{cases}$$

は S. S. $v(x_2) \subset \boldsymbol{R} \times \{idx_2 \infty\}$ を満たす初期値 v に対し常に局所解を持つことを示せ.

問題4 a) $F(z) \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma 0)$ とし，これは任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ および任意の固有部分錐 $\Delta \subset \Gamma$ に対し $\varepsilon > 0$ と m を適当にとれば，ある定数 C に対し

$$|F(z)| \leq \frac{C}{|y|^m}, \qquad z \in K + i\Delta \cap \{|y| < \varepsilon\} \text{ の上で},$$

を満たしているとする．このとき，任意に固定した $y \in \Gamma$ について，x の実解析函数 $F(x+i\varepsilon y)$ は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $\mathcal{D}'(\Omega)$ において収束し，その極限として得られる Schwartz の分布を再び超函数と見なしたものは $F(x+i\Gamma 0)$ に他ならない.

b) 上の不等式をある固定した $y \in \Gamma$ を通る半直線 $\{ty\,;\, t>0\}$ に対応する集合 $K + i\{ty\,;\, 0<t<\varepsilon\}$ の上だけで仮定しても同じ結論が得られる.

［a) 適当に不定積分して補題 3.5.11 に持ち込む．b) 第2章の問題3を用いて a) に帰着させる.］

問題5 a) 超函数の複素共役，および実数値超函数の概念を多変数の場合に定義せよ．これらと特異スペクトルの間にどのような関係があるか？

b) $f(-x_1, x') = f(x_1, x')$ あるいは $f(-x_1, x') = -f(x_1, x')$ を満たす超函数 f を，それぞれ x_1 について偶あるいは奇であるという．このような超函数の特異スペクトルについて如何なることが言えるか？

c) $f(x)$ は x_1 を実解析パラメータとして含み，かつ x_1 につき奇ならば，x_1 を実解析パラメータとして含み，かつ x_1 につき偶なる超函数 $f(x)/x_1$ が確定する.

d) $f(x)$ は x_1 を実解析パラメータとして含み，かつ x_1 につき偶ならば，x_1 を実解析パラメータとして含む超函数 $f(\sqrt{x_1}, x')$注13) が確定する．$\left[\frac{1}{2}(F_j(z_1, z') + F_j(-z_1, z'))\right.$ という定義函数を用いよ.$\left.\right]$

第4章　超函数の諸構造

この章では超函数の性質について更に立ち入った諸構造を解説する．このため§1では位相に関する二,三の常識の助けを借り，§2では基礎的な幾何の概念を引用する．§3以降においては証明を本書の後半に留保する公理的定理をさらにいくつか援用するが，それらは直観的には承認しやすいものであろう．また$\mathcal{B}$の脆弱性も§2以降の応用では随所で有効に用いられる．

§1　位　　相

この節では超函数の空間にある種の位相を入れておこう．Schwartz の分布が位相を基礎とした理論であるため，その類比からしばしば超函数に対しても位相が語られ，またそれを基礎とした成書も出ているが，以下に示すように超函数の位相には普通の函数空間のそれとかけ離れた特殊事情が多いので，これに安易に頼ることは危険である．この節では位相線型空間として Fréchet 空間とその双対が現われるが，これらについてそう多くを知る必要はない．典型的な Fréchet 空間として$\mathcal{O}(U)$があり，その可算個のセミノルム系としてコンパクト部分集合の取り尽し列$K_j \subset U$上の最大値

$$\|f\|_j = \max_{z \in K_j} |f(z)|, \qquad f(z) \in \mathcal{O}(U)$$

が用いられること等を知っていれば十分である．$\mathcal{O}(U)$の点列$\{f_k\}$がこの位相の意味でfに収束するとは，函数列$\{f_k\}$がいわゆる“U上広義一様に”fに収束することに外ならない．なお本書後半において超函数の層$\mathcal{B}$の脆弱性を証

明するとき，本節の結果をいくつか用いるつもりなので，本節の議論が $\mathcal{B}$ の脆弱性には依拠していないことをここで予め注意しておく．

以下の必要のため $W(z,\overline{\Gamma_\sigma})$ の正則域に記号を与えておこう．まず $\alpha=1$ のとき，補題 2.3.4 で示された $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ の複素近傍(2.3.18)は，さらに方向 ξ に依らない一定の近傍

$$V=\left\{\sum_{j=1}^n|y_j|<\min\left(\frac{1}{4}x^2,\ \frac{1}{4}\sum_{j=1}^n|x_j|,\ 1\right)\right\}$$

を含むことに注意しよう．そこで Γ_σ を第 σ 象限とし，コンパクト集合 $K\subset\boldsymbol{R}^n$ に対し開集合 $U_\sigma{}^K$ を

$$U_\sigma{}^K=\Big[\bigcap_{\xi\in\overline{\Gamma_\sigma}\cap S^{n-1}}\{\mathrm{Im}\,(z\xi+i(z^2-(z\xi)^2))>0\}\Big]\cup\Big[\bigcap_{a\in K}(V+\{a\})\Big] \tag{4.1.1}$$

により定義する．補題 2.3.4 により $W(z,\overline{\Gamma_\sigma})$ は $U_\sigma{}^{\{0\}}$ で正則となる．

定理と定義 4.1.1　$K\subset\boldsymbol{R}^n$ をコンパクト集合とする．台が K に含まれる超函数の全体を $\mathcal{B}[K]$ と書くとき，これは次のように Fréchet 空間となる：写像

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{B}[K] & \longrightarrow & \prod_\sigma \mathcal{O}(U_\sigma{}^K)\\ \Psi & & \Psi\\ f & \longmapsto & \left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}f(w)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw\right\}\end{array} \tag{4.1.2}$$

は単射で，その像は Fréchet 空間 $\prod_\sigma \mathcal{O}(U_\sigma{}^K)$ の閉部分空間となる．$\mathcal{B}[K]$ にこの閉部分空間の位相を与えて Fréchet 空間とする．

証明　(4.1.2)は f の一組の定義函数の計算に外ならないから，写像(4.1.2)は明らかに単射である．さて $\{f_k\}$ を $\mathcal{B}[K]$ の点列とし，正則函数の列

$$F_{k,\sigma}(z)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f_k(w)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw \tag{4.1.3}$$

が $k\to\infty$ のとき $\mathcal{O}(U_\sigma{}^K)$ において $F_\sigma(z)$ に収束したとせよ．このとき

$$f(x)=\sum F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0)$$

により超函数 $f(x)\in\mathcal{B}[K]$ が定まることは明らかである．故にこの f から計算した $\int_{\boldsymbol{R}^n}f(w)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw$ が $F_\sigma(z)$ と一致することさえ示せばよい．ところで積分(4.1.3)は $f_k(x)$ の一つの境界値表示を用いて計算される．たとえば(4.1.3)自身を用いた表示 $f_k(x)=\sum_{\sigma'}F_{k,\sigma'}(x+i\Gamma_{\sigma'}0)$ を用いれば，

$$F_{k,\sigma}(z)=\sum_{\sigma'}\int F_{k,\sigma'}(w)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw$$

ここに積分路は K の近傍を $U_{\sigma'}{}^K$ 内に適当に変形したものである．仮定によりこの上で一様に $F_{k,\sigma'}(w) \to F_{\sigma'}(w)$ であるから，極限に行って

$$F_\sigma(z) = \sum_{\sigma'} \int F_{\sigma'}(w) W(z-w, \overline{\Gamma_\sigma}) dw = \int_{R^n} f(w) W(z-w, \overline{\Gamma_\sigma}) dw$$

を得る，証了.

$\mathcal{B}[K]$ の位相を定義するのに特殊な曲面 Radon 核を用いているのは奇妙に感じられるかも知れない．だが実際にはこうして得られる $\mathcal{B}[K]$ の位相は積分核のとり方や近傍 $U_\sigma{}^K$ の選び方には依存しないのである．実際

補題 4.1.2 $f_k(x) \in \mathcal{B}[K]$ を超函数の列とし，$\Omega \supset K$ を実の近傍とする．

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{N} F_{k,j}(x + i\Gamma_j 0)$$

は f_k の一つの境界値表示で，各 $F_{k,j}(z)$ は型 $\Omega + i\Gamma_j 0$ の k に依らぬ一定の無限小楔 U_j で正則，かつ $\Omega \setminus K$ の一定の複素近傍 V に解析接続されるものとする．このときもし $\mathcal{O}(U_j \cup V)$ において $F_{k,j}(z) \to F_j(z)$, $j=1, \cdots, N$ ならば，$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0)$ に対し $\mathcal{B}[K]$ において $f_k \to f$ となる．

証明はするまでも無かろう．積分(4.1.2)を計算するのにこの境界値表示を使えばよいだけの話である．これから次のことも直ちにわかる．

命題 4.1.3 実解析係数の線型偏微分作用素 $P(x, D)$ は超函数の空間 $\mathcal{B}[K]$ に連続に作用する．また K' を K の $\boldsymbol{R}_{x'}^{n-1}$ への射影像とするとき，x_1 に関する積分

$$\begin{array}{ccc} \int \cdot dx_1 : \ \mathcal{B}[K] & \longrightarrow & '\mathcal{B}[K'] \\ \Psi & & \Psi \\ f(x) & \longmapsto & \int_R f(x) dx_1 \end{array}$$

も連続写像となる．ここで K' に台を持つ $n-1$ 変数 x' の超函数の空間を区別のため $'\mathcal{B}[K']$ と書いた．特に定積分 $\int_{R^n} f(x)dx$ は $\mathcal{B}[K]$ 上の連続な線型汎函数となる．

超函数の空間に与えられたこの位相は考え得る最も弱いものである．特に，

補題 4.1.4 f_k を台が K に含まれる連続函数(あるいは L_1 級函数，あるいは分布)の列とする．K 上一様に(あるいは L_1 ノルムで，あるいは $\mathcal{E}'(K)$ において) $f_k \to f$ ならば，それらを超函数とみなしたとき $\mathcal{B}[K]$ において $f_k \to f$.

実際，このような f_k に対し超函数としての積分(4.1.2)は定理3.5.7 c)により埋め込みの積分(3.5.8)に等しく，従ってその収束が結果に翻訳できる.

特に K が直方体 $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ の場合には Cauchy 核を用いた次の表現法がある.

定理 4.1.5 $U_j\subset \boldsymbol{C}$ を $[a_j,b_j]$ の複素近傍とし

$$U=U_1\times\cdots\times U_n$$
$$U\sharp K=(U_1\setminus[a_1,b_1])\times\cdots\times(U_n\setminus[a_n,b_n])$$
$$U\sharp_j K=U\sharp K \text{ の第 } j \text{ 因子を } U_j \text{ でおき換えたもの.}$$

とおく．このとき制限写像から誘導される写像 $\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}(U\sharp_j K)\to\mathcal{O}(U\sharp K)$ の像は閉部分空間となり，Fréchet 空間の意味で同型

$$\mathcal{B}[K]\cong\mathcal{O}(U\sharp K)\Big/\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}(U\sharp_j K) \tag{4.1.4}$$

が成り立つ．特に

$$\mathcal{B}[K]\cong\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1)^n\sharp K) \tag{4.1.5}$$

ここに右辺は標準定義函数の空間，すなわち $(\boldsymbol{P}^1\setminus[a_1,b_1])\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus[a_n,b_n])$ で正則，かつどれか一つの $z_j=\infty$ のとき0となるような正則函数の全体である.

証明 $\mathcal{O}(U\sharp K)$ の元から境界値として $\mathcal{B}[K]$ の元が定まることはすでに定義3.5.3で注意した．その対応で(4.1.4)の右辺の分母の元が超函数0を与えることも明らかである．($\mathcal{O}(U\sharp_j K)$ の元はその境界値を考えるとき第 j 虚座標面を通して二つずつ互いに打ち消し合う.) 故に(4.1.4)の右辺から左辺への写像が確定した．(4.1.2)の積分を補題3.5.4を用いて計算してみればこの写像が連続なことがわかる.

次に $\mathcal{B}[K]$ の元に対しては標準定義函数を計算することができる．すなわち $\mathcal{B}[K]\to\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1)^n\sharp K)$ という写像がある．この写像も明らかに連続である.

最後に自明な写像として，制限写像から導かれる連続写像 $\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1)^n\sharp K)\to\mathcal{O}(U\sharp K)/\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}(U\sharp_j K)$ がある．これは Liouville の定理により一対一であることがすぐわかる．(注35)

以上をまとめると次のような写像の図式が書ける.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}[K] & \xleftarrow{\lambda} & \mathcal{O}(U\sharp K)\Big/\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}(U\sharp_j K) \\ & {}_{\mu}\searrow & \uparrow\nu \\ & & \mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1)^n\sharp K) \end{array}$$

ここで ν が単射なことが既知であり，また系 3.5.2 より $\lambda\circ\nu\circ\mu=id$ である．故に λ は全射，μ は単射となる．故にあと μ が全射であることと λ が単射であることを示せば証明が完了する．さて $F(z)$ を $\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1)^n\sharp K)$ の元とせよ．$f(x)=[F(z)]$ に対し $f(x)$ の標準定義函数 $G(z)$ を計算すれば，もちろん $[G(z)]=f(x)$, 従って $[F(z)-G(z)]=0$ となる．故にもし λ が単射なら，ν の単射性から $F(z)=G(z)$ つまり μ が全射となる．故に結局 λ が単射であることを示すのだけが本質的である．

そこで $F(z)\in\mathcal{O}(U\sharp K)$ とし $f(x)=[F(z)]=0$ とせよ．このとき標準定義函数も

$$G(z)=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int\frac{f(t)dt}{(z_1-t_1)\cdots(z_n-t_n)}=0$$

である．ここへ $f(t)$ の定義函数 $F(z)$ を代入し変形してみよう．補題 3.5.4 により

$$G(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(\tau)}{(z_1-\tau_1)\cdots(z_n-\tau_n)}d\tau_1\cdots d\tau_n$$

ただし，γ_j は $[a_j, b_j]$ を正の向きに一周する $U_j\setminus[a_j, b_j]$ 内の道であり，点 z_j はその外にあることに注意せよ．ここで γ_1 をまず変形し，z_1 を内部に取り込む道 γ_1' に変形すれば

$$(4.1.6)\quad G(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1'}\oint_{\gamma_2}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(\tau)}{(z_1-\tau_1)\cdots(z_n-\tau_n)}d\tau_1\cdots d\tau_n$$
$$+\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\oint_{\gamma_2}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(z_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)}{(z_2-\tau_2)\cdots(z_n-\tau_n)}d\tau_2\cdots d\tau_n$$

を得る．ここで右辺の第一項は積分路変形により $U_1\times(U_2\setminus[a_2, b_2])\times\cdots\times$

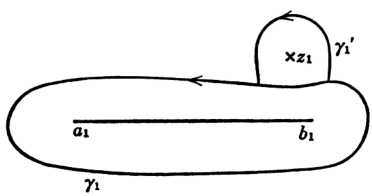


図 4.1

$(U_n\setminus[a_n, b_n])$ で正則となっていることがわかる．すなわち，これは(4.1.4)の右辺の分母の元である．(4.1.6)の右辺第二項に対し $\gamma_2, \cdots, \gamma_n$ の順に同様の変形を繰返せば，(4.1.4)の右辺の分母に入るような元のいくつかと，遂に $F(z)$ とが得られる．すなわち，$F(z)$ 自身が分母に入るような元となる．これは λ が単射であることを示している．証了．

上の同型定理の系として原点のみに台を持つ超函数の構造を調べておこう．

$$\mathcal{B}[\{0\}]\cong\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n)$$

であるが，系2.2.3により右辺の元は負冪のみを持つ Laurent 級数

$$\sum_{\alpha_j>0}\frac{a_\alpha}{z^\alpha} \tag{4.1.7}$$

に一意に展開される．この級数を $1/z_j$ の整級数として見たときの収束半径は ∞ であるから，Lemaire の公式(2.1.7)において $r_1=\cdots=r_n=R$ をいくらでも大きくとることにより

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\sqrt[|\alpha|]{|a_\alpha|}=0$$

がわかる．ところで今 $e=(1, \cdots, 1)$ とおくとき

$$D_z{}^\alpha\frac{1}{z^e}=D_z{}^\alpha\frac{1}{z_1\cdots z_n}=\frac{(-1)^{|\alpha|}\alpha!}{z^{\alpha+e}}$$

であるから，$(-2\pi i)^n(-1)^{|\alpha|}\dfrac{a_{\alpha+e}}{\alpha!}$ を改めて b_α とおけば，(4.1.7)は形式的に

$$\left(\sum_{\alpha_j\geq 0}b_\alpha D^\alpha\right)\frac{1}{(-2\pi i)^n}\frac{1}{z_1\cdots z_n} \tag{4.1.8}$$

と書き直される．ここで

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\sqrt[|\alpha|]{|b_\alpha|\alpha!}=0 \tag{4.1.9}$$

となっている．

定義と系 4.1.6　(4.1.9)を満たすような係数を持つ無限階微分作用素 $J(D)=\sum_{\alpha_j\geq 0}b_\alpha D^\alpha$ を定数係数の**局所作用素**と呼ぶ．正則函数 $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ に対し級数 $\sum_{\alpha_j\geq 0}b_\alpha D^\alpha F(z)$ は U で広義一様収束し再び $\mathcal{O}(U)$ の元を定める．これにより局所作用素は層 $\mathcal{O}$ の自己準同型となり，従って層 $\mathcal{B}$ の自己準同型ともなる．対応 $J(D):\mathcal{O}(U)\to\mathcal{O}(U)$，$J(D):\mathcal{B}[K]\to\mathcal{B}[K]$ は連続である．台が原点に含まれる超函数 $f(x)$ は定数係数局所作用素を用いて

(4. 1. 10)
$$f(x)=\sum_{\alpha_j\geq 0} b_\alpha D^\alpha \delta(x)$$

の形に一意に表わされる．右辺の級数は $\mathcal{B}[\{0\}]$ の位相で収束する．

証明　局所作用素が正則函数に項別微分により作用することの証明は一変数の場合と全く同様なので省略する．(第1章§8参照．ここでも一変数のときのように b_α は(4.1.9)を局所一様に満足する変数の係数であるとしても証明の手間は同じである．) このときの $J(D)F(z)$ の評価は作用を受ける函数 $F(z)$ の最大値ノルムにしか依存しないから，$J(D):\mathcal{O}(U)\to\mathcal{O}(U)$ の連続性もわかる．超函数への作用は例によってその言い換えにすぎない．特に(4.1.10)は(4.1.8)を言い換えたものに他ならない．証了．

次に双対性について述べよう．一般に位相線型空間 $\mathcal{F}$ の**双対空間** $\mathcal{F}'$ とは $\mathcal{F}$ から $\boldsymbol{C}$ への連続な線型写像(汎函数)の全体のことを言うのであった．

定理 4.1.7　$\mathcal{B}[K]$ の双対空間は，K の近傍で定義された実解析函数の全体が作る空間 $\mathcal{A}(K)$ に等しい．内積は積の積分で与えられる：$f\in\mathcal{B}[K]$，$\varphi\in\mathcal{A}(K)$ に対し

(4. 1. 11)
$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

証明　$\varphi\in\mathcal{A}(K)$ が(4.1.11)により $\mathcal{B}[K]$ 上の連続線型汎函数を与えることは明らかである．φ が異なれば汎函数としても異なることは，$a\in K$ に対し $\delta(x-a)\in\mathcal{B}[K]$ であり，かつ

(4. 1. 12)
$$\langle\delta(x-a),\varphi(x)\rangle=\varphi(a)$$

となることからわかる．故に $\mathcal{A}(K)\to\mathcal{B}[K]'$ という一対一写像が定義される．逆に $\Phi:\mathcal{B}[K]\to\boldsymbol{C}$ を抽象的に定義された双対空間の元とすれば，Φ は定理4.1.1の与える正則函数 $F_\sigma(z)=\int_{\boldsymbol{R}^n} f(w)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw$ に対し $\mathcal{O}(U_\sigma{}^K)$ から誘導された位相で連続に作用する．特に $U_\sigma{}^K$ 内のコンパクト集合 L_σ があって

$$\forall\sigma \text{ について } \max_{z\in L_\sigma}|F_\sigma(z)|\leq\delta \implies |\Phi(f)|\leq\varepsilon$$

となっている．Hahn-Banach の定理によれば，この関係を崩さずに Φ を $\prod_\sigma \mathcal{O}(U_\sigma{}^K)$ 上の線型汎函数にまで拡張することができる．(ここで更に $U_\sigma{}^K$ を L_σ の任意の近傍でおき換えてもよい．) さて K の複素近傍 U で，任意の σ につき $L_\sigma-U\subset U_\sigma{}^{(0)}$ を満たすものをとろう(左辺の－はベクトル演算の意)．この包

含関係は U を K でおき換えれば確かに成り立っているから，このような U は存在する．このとき $\tau\mapsto W(z-\tau,\overline{\Gamma_\sigma})$ は τ が U を動くとき z に関する L_σ 上の最大値ノルムの意味で連続であり，しかもさらに τ に関する複素偏微分はこのノルムの意味で(差分商が微分商に)収束する．故に拡張された Φ の連続性により

$$\varphi(\tau)=\Phi_z(\{W(z-\tau,\overline{\Gamma_\sigma})\})\in\mathcal{O}(U)$$

となる．すなわち $\mathscr{A}(K)$ の元 $\varphi(x)$ が見出された．(以下，Φ_z の添え字 z は，Φ が変数 z に作用することを示す.) この φ に対し(4.1.11)で定まる汎函数がもとの Φ と等しいことを見よう．$f(x)=\sum_{j=1}^N F_j(x+i\Gamma_j0)\in\mathcal{B}[K]$ とし，積分領域 D_j を $U\setminus K$ に含まれるように選べば，

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\varphi(x)dx=\sum_{j=1}^N\int_{D_j}F_j(\tau)\varphi(\tau)d\tau$$
$$=\sum_{j=1}^N\int_{D_j}F_j(\tau)\Phi_z(\{W(z-\tau,\overline{\Gamma_\sigma})\})d\tau$$

Φ の線型性と連続性により L_σ 上の最大値ノルムの意味で収束する積分を中に入れることができるから，これは

$$\Phi_z\left(\left\{\sum_{j=1}^N F_j(\tau)W(z-\tau,\overline{\Gamma_\sigma})d\tau\right\}\right)$$

に等しい．(τ に関する積分を Riemann 式近似和の極限の形に表わし，極限と Φ_z との順序交換を行なえばよい.) 最後の式の括弧内は定義により $\int_{\boldsymbol{R}^n}f(w)\cdot W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw$ に等しいから，$\Phi(f)$ が得られた．証了.

問 4.1.1　内積(4.1.11)に関し部分積分の公式 $\langle D^\alpha f,\varphi\rangle=\langle f,(-D)^\alpha\varphi\rangle$ を示せ.

K が直方体の場合には，同型(4.1.4)(あるいは(4.1.5))と Cauchy 核とを用いても上の定理を証明することができる．この場合は Hahn-Banach の定理は不要である．同じ方法で証明される次の主張を，後の利用のために補題として掲げておこう.

補題 4.1.8　$\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_1|\le r_1\})\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_n|\le r_n\}))$ の双対空間は，多重円板 $\{|z_1|\le r_1\}\times\cdots\times\{|z_n|\le r_n\}$ の近傍で定義された正則函数の全体が作る空間に等しい．内積は，$\{|z_j|\le r_j\}$ を正の向きに一周する積分路 γ_j により

$$\langle F(z), \varphi(z)\rangle = (-1)^n \oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n} F(z)\varphi(z)dz_1\cdots dz_n$$

で与えられる.

問 4.1.2　上に述べた指示に従い，定理 4.1.7 の証明にならってこの補題を証明してみよ.

さて，$\mathscr{A}(K)$ にはそれ自身自然な位相がある．これは K の複素近傍に関する帰納極限

(4.1.13)
$$\mathscr{A}(K) = \varinjlim_{U\supset K} \mathscr{O}(U)$$

から誘導されるものである．すなわち，すべての $\mathscr{O}(U)$ の上で連続なセミノルムをどれも $\mathscr{A}(K)$ の連続セミノルムとして採用し，これらにより $\mathscr{A}(K)$ の位相を定義するのである．この位相は Fréchet にはならないので，位相空間の一般論からはそれを点列で表現することはできない．しかし $\mathscr{A}(K)$ の位相構造は (4.1.13) の表現に由来する特別な性質をいろいろ持っており，そのことが以下で論ずる程度の内容を点列に代弁させることを可能にしている．それはともかく我々は，本来は定理というべき次の性質を定義として採用しよう．（このやり方は Schwartz の分布の理論の通俗的解説書においても，$\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$ の位相について普通に行なわれているものである.）

定義 4.1.9　列 $\varphi_k\in\mathscr{A}(K)$ が $\mathscr{A}(K)$ において φ に収束するとは，K のある複素近傍において一様に $\varphi_k(z)\to\varphi(z)$ となることをいう.

この定義は次のように実の集合 K の上の言葉で言い換えることができる.

定理 4.1.10　列 $\varphi_k\in\mathscr{A}(K)$ が $\mathscr{A}(K)$ において収束するためには，任意の定数係数局所作用素 $J(D)$ に対し $J(D)\varphi_k(x)$ が K において各点毎に収束することが必要かつ十分である.

証明　必要であることは局所作用素の連続性（系 4.1.6）により明らかである．十分性を示そう．これには K を原点と仮定し，任意の局所作用素 $J(D)$ に対する $J(D)\varphi_k(0)$ の収束から，原点のある複素近傍での $\varphi_k(z)$ の一様収束を示せば十分である．局所作用素の全体を系 4.1.6 により $\mathscr{B}[\{0\}]\cong\mathscr{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n)$ と同一視する．$J(-D)\delta(x)$ に対応する後者の空間の正則函数を $F(z)$ とすれば，

項別部分積分により

$$J(D)\varphi_k(0)=\langle\delta, J(D)\varphi_k\rangle=\langle J(-D)\delta, \varphi_k\rangle$$
$$=\int_{R^n} J(-D)\delta(x)\varphi_k(x)dx=(-1)^n\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}F(z)\varphi(z)dz_1\cdots dz_n$$

となる．ここで γ_j は原点を正の向きに一周する $\varphi_k(z)$ の正則域内の任意の積分路である．そこで以後は簡単のため

$$\langle F(z), \varphi_k(z)\rangle=(-1)^n\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}F(z)\varphi_k(z)dz_1\cdots dz_n \tag{4.1.14}$$

を“局所作用素” $F(z)$ の作用と見なして話を進めることにしよう．証明は長いので幾段かに分けて行なう．

第一段　$\varepsilon>0$ を適当にとれば，$F(z)\in\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n)$ に対し

$$\sup_{|z_j|\geq\varepsilon, j=1,\cdots,n}|F(z)|\leq\varepsilon \Longrightarrow |\langle F(z), \varphi_k(z)\rangle|\leq 1, \qquad k=1,2,\cdots \tag{4.1.15}$$

となることを示す．背理法を用いよう．この主張を否定すれば，$F_k(z)\in\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n)$，$k=1,2,\cdots$，および単調増加する自然数の列 m_k，$k=1,2,\cdots$ を次の諸条件を満たすように帰納的に選ぶことができる．

$$\sup_{|z_j|\geq 1/2^k, j=1,\cdots,n}|F_k(z)|\leq\frac{1}{2^k} \tag{4.1.16}$$

$$|\langle F_k(z), \varphi_j(z)\rangle|\leq\frac{1}{2^k}, \qquad j=1,\cdots,m_{k-1} \tag{4.1.17}$$

$$|\langle F_k(z), \varphi_{m_k}(z)\rangle|\geq 2^k+\sum_{j=1}^{k-1}|\langle F_j(z), \varphi_{m_k}(z)\rangle| \tag{4.1.18}$$

実際，既に $k-1$ 番目まで選ばれたとしよう．まず内積(4.1.14)の連続性により，必要なら(4.1.16)の右辺の $1/2^k$ をさらに小さい数 δ_k でおき換えれば，有限個の元 $\varphi_j(z)$ に対して(4.1.17)が従うことは明らかであろう．次に各固定した $F(z)$ に対しては $\langle F(z), \varphi_k(z)\rangle$ は仮定により収束するから，有限個の元 $F_j(z)$，$j=1,\cdots,k-1$ に対し $|\langle F_j(z), \varphi_k(z)\rangle|$，$k=1,2,\cdots$ は有界である，故に(4.1.18)の右辺はこの上界に 2^k を加えた数 c_k で抑えられる．一方(4.1.15)を否定したのだから，$\varepsilon=\min\{1/2^k, \delta_k\}/c_k$ に対して反例 $F_k(z)$，$\varphi_{m_k}(z)$ が存在するはずである：

$$\sup_{|z_j|\geq 1/2^k, j=1,\cdots,n}|F_k(z)|\leq\frac{\min\{1/2^k, \delta_k\}}{c_k}, \qquad |\langle F_k(z), \varphi_{m_k}(z)\rangle|\geq 1$$

故に $c_kF_k(z)$ を改めて $F_k(z)$ とすれば，これは明らかに(4. 1. 16)-(4. 1. 18)を満足する．さて

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(z)$$

は $(\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n$ において広義一様収束し，従って $\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n)$ の元を定める．これに対し

$$|\langle F(z),\varphi_{m_k}(z)\rangle|\geq|\langle F_k(z),\varphi_{m_k}(z)\rangle|-\sum_{j=1}^{k-1}|\langle F_j(z),\varphi_{m_k}(z)\rangle|-\sum_{j=k+1}^{\infty}|\langle F_j(z),\varphi_{m_k}(z)\rangle|$$

$$\geq 2^k-\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\geq 2^k-1$$

となるが，これは $\langle F(z),\varphi_k(z)\rangle$ が収束するという仮定に反する．

第二段　$\varphi_k(z)$ は原点の k に依らぬ一定の複素近傍 $\{|z_j|\leq r,\ j=1,\cdots,n\}$ で正則となることを示す．そのためには補題 4. 1. 8 により各 φ_k が $\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_1|\leq r\})\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_n|\leq r\}))$ 上の連続線型汎函数となることをいえばよい．(4. 1. 15)の ε に対し $r=\varepsilon/2$ ととり $\rho=\varepsilon$ とおけば，定数因子を調節することにより任意の $\varepsilon>0$ に対し δ を適当にとるとき $F(z)\in\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n)$ に対し

$$\sup_{|z_j|\geq\rho,\,j=1,\cdots,n}|F(z)|\leq\delta\Longrightarrow|\langle F(z),\varphi_k(z)\rangle|\leq\varepsilon \tag{4. 1. 19}$$

が成り立つ．さて，$\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_1|\leq r\})\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_n|\leq r\}))$ の元 $F(z)$ は，無限遠を中心とする Taylor 展開を考えれば，$\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n)$ の元の列 $F_l(z)$, $l=1,2,\cdots$ により $(\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_1|\leq\rho\})\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_n|\leq\rho\})$ の上で一様に近似されることがわかるから，上の内積(4. 1. 14)を

$$\langle F(z),\varphi_k(z)\rangle=\lim_{l\to\infty}\langle F_l(z),\varphi_k(z)\rangle$$

により $\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_1|\leq r\})\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_n|\leq r\}))$ の元に対して拡張する．

(4. 1. 19)が示す連続性によりこの極限値が確かに定まり，かつこうして拡張された内積が類似の不等式を満たすことがわかる．さて，こうして得られた連続線型汎函数は，補題 4. 1. 8 により多重円板 $\{|z_j|\leq r, j=1,\cdots,n\}$ の近傍で正則なある函数 $\psi_k(z)$ を以て

$$\langle F(z),\varphi_k(z)\rangle=(-1)^n\oint_{|z_1|=\rho'}\cdots\oint_{|z_n|=\rho'}F(z)\psi_k(z)dz_1\cdots dz_n \tag{4. 1. 20}$$

と表現されるが，ここで $F(z)$ として Cauchy 核 $\dfrac{1}{(-2\pi i)^n}\dfrac{1}{(z_1-\tau_1)\cdots(z_n-\tau_n)}$ を

とり，τ を $\varphi_k(z)$ の当初の正則域内に固定して $F_l(z)\in\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n)$ を $F(z)$ の近似列とすれば

$$(4.1.21)\quad \langle F(z),\varphi_k(z)\rangle = \lim_{l\to\infty}\langle F_l(z),\varphi_k(z)\rangle$$
$$= \lim_{l\to\infty}(-1)^n\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}F_l(z)\varphi_k(z)dz_1\cdots dz_n$$
$$= (-1)^n\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{1}{(-2\pi i)^n}\frac{\varphi_k(z)}{(z_1-\tau_1)\cdots(\tau_n-\tau_n)}dz_1\cdots dz_n$$
$$= \varphi_k(\tau)$$

となる．一方，(4.1.20)の右辺は $\psi_k(\tau)$ を与える．故に $\varphi_k(z)$ 自身が実は $\{|z_j|\leq r,\ j=1,\cdots,n\}$ で正則となる．

第三段 $\langle F(z),\varphi_k(z)\rangle$ は $F(z)\in\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_1|\leq r\})\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_n|\leq r\}))$ に対しても $k\to\infty$ のとき収束することを示す．実際

$$\sup_{|z_j|\geq\rho,\ j=1,\cdots,n}|F(z)-G(z)|\leq\delta$$

となる $G(z)\in\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{0\})^n)$ を選べば，k_0 を十分大きくとるとき，(4.1.19)により $k,l\geq k_0$ に対して

$$|\langle F(z),\varphi_k(z)\rangle-\langle F(z),\varphi_l(z)\rangle| \leq |\langle F(z)-G(z),\varphi_k(z)\rangle|+|\langle F(z)-G(z),\varphi_l(z)\rangle|$$
$$+|\langle G(z),\varphi_k(z)\rangle-\langle G(z),\varphi_l(z)\rangle|$$
$$\leq \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon$$

とできる．これは数列 $\langle F(z),\varphi_k(z)\rangle$ が収束することを示している．

第四段 $\varphi_k(z)$ が原点のある複素近傍で一様収束することを示す．まず(4.1.21)式より

$$(4.1.22)\qquad \varphi_k(\tau) = \left\langle\frac{1}{(-2\pi i)^n}\frac{1}{(z_1-\tau_1)\cdots(z_n-\tau_n)},\ \varphi_k(z)\right\rangle$$

に注意せよ．(4.1.19)が $\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_1|\leq r\})\times\cdots\times(\boldsymbol{P}^1\setminus\{|z_n|\leq r\}))$ の元に対しても成り立つことから，(4.1.22)が $\{|\tau_j|<r,\ j=1,\cdots,n\}$ で有界なことがわかる．故に $\varphi_k(\tau)$ はそこでいわゆる正規族を成し，Montel の定理によりその任意の部分列はこの多重円板内で広義一様収束する部分列を含む．しかるに第三段により，(4.1.22)は固定した各 τ について収束している．すなわち，列 $\varphi_k(\tau)$ は，全体がある集合論的函数 $\varphi(\tau)$ に同じ多重円板内で各点収束している．故に部分列の極限は常にこの一定の函数 $\varphi(\tau)$ に一致しなければならない．このよ

うな場合は，よく知られているように，列 $\varphi_k(\tau)$ 全体が $\varphi(\tau)$ にそこで広義一様収束する．証了．

さて，定理 4.1.7 において $\mathcal{B}[K]'=\mathcal{A}(K)$ という同型が成り立つことを示したが，一般に双対空間には通常，有界集合上の汎函数としての一様収束により位相を入れる．$\mathcal{B}[K]$ の有界集合とは，$\mathcal{B}[K]$ の位相を定めるすべてのセミノルムがその上で有界となるような部分集合のことである．定理 4.1.7 の証明を見直せば次のことがわかる．

系 4.1.11　$\mathcal{B}[K]'\cong\mathcal{A}(K)$ が位相も込めて成り立つ．

証明　$\varphi_k\in\mathcal{A}(K)$ が K のある複素近傍で φ に一様収束していれば，積分(4.1.11)で定まる $\mathcal{B}[K]$ 上の汎函数について f が $\mathcal{B}[K]$ のある有界集合を動くとき一様に $\langle f,\varphi_k\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$ となることは明らかである．実際，有界集合に属する f に対しては積分(4.1.11)を計算する積分路の上でその定義函数 $F_\sigma(z)$ が一様に有界だからである．逆に，抽象的な汎函数の列 Φ_k が $\mathcal{B}[K]'$ で Φ に収束しているとせよ．定理 4.1.7 の証明を踏襲するとして，

$$\varphi_k(\tau)=\Phi_{k,z}(\{W(z-\tau,\overline{\Gamma_\sigma})\})$$

は K の近傍で正則となる．これが K のある一定の複素近傍で一様収束することを示さねばならない．$J(D_\tau)$ を定数係数の局所作用素とすれば，Φ_k の連続性により，

$$J(D_\tau)\varphi_k(\tau)=\Phi_{k,z}(\{J(D_\tau)W(z-\tau,\overline{\Gamma_\sigma})\})$$

となる．ここで $\tau\in K$ を固定するとき，右辺は仮定により $\Phi_z(\{J(D_\tau)W(z-\tau,\overline{\Gamma_\sigma})\})$ に収束する．故に定理 4.1.10 により主張が示された．

上の証明を見ればわかるように，$\mathcal{B}[K]'$ の列 Φ_k は実は各点収束してさえいれば，すなわち各 $f\in\mathcal{B}[K]$ に対し $\Phi_k(f)$ が収束していれば，収束列となる．

正則函数の空間 $\mathcal{O}(U)$ は，いわゆる Montel の性質を持つ．すなわち，この空間の有界集合は，その任意の点列が収束する部分列を含むという性質(コンパクト性)を有する．故にそれから位相を入れられた空間 $\mathcal{B}[K]$ も同じ性質を享有する．位相線型空間の一般論によれば，このことから $\mathcal{B}[K]$ の再帰性，すなわち $\mathcal{A}(K)$ の双対空間が $\mathcal{B}[K]$ に戻ることが結論されるのだが，ここではそれを直接証明してみよう．

定理 4.1.12　$\mathcal{A}(K)'=\mathcal{B}[K]$

証明 以下，代数的同型とともに位相的同型をも示しておこう．ただし，$\mathscr{A}(K)'$ の位相は $\mathscr{A}(K)$ の真の位相の分析をしなかったので，$\mathscr{A}(K)'$ の点列の各点収束により与えておく．（ついでながら $\mathscr{A}(K)$ の有界集合は，ある複素近傍 $U \supset K$ 上で最大値ノルムが有界な正則函数の集合の $\mathscr{A}(K)$ への像となることが知られている．）さて，$f \in \mathscr{B}[K]$ が内積(4.1.11)により $\mathscr{A}(K)'$ の元を定めることは明らかである．これにより $\mathscr{B}[K] \to \mathscr{A}(K)'$ という連続写像が得られる．$\mathscr{A}(K)$ には $W(\tau - z, \overline{\Gamma_\sigma})$ 等が含まれるのでこの写像が一対一であることは明らかである．

逆に抽象的汎函数 $\Psi \in \mathscr{A}(K)'$ を考えよう．$z \in U_\sigma{}^K$ のとき $W(z-\tau, \overline{\Gamma_\sigma})$ は τ の函数として K のある複素近傍で正則となり，しかも対応 $z \mapsto W(z-\tau, \overline{\Gamma_\sigma})$ は $U_\sigma{}^K$ から $\mathscr{A}(K)$ への連続写像となる．さらに，z に関する $W(z-\tau, \overline{\Gamma_\sigma})$ の複素偏微分も τ について $\mathscr{A}(K)$ の位相の意味で収束する．故に汎函数 Ψ の連続性により

$$F_\sigma(z) = \Psi_\tau(W(z-\tau, \overline{\Gamma_\sigma})) \in \mathscr{O}(U_\sigma{}^K)$$

となる．こうして超函数 $f(x) = \sum_\sigma F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0) \in \mathscr{B}[K]$ が得られた．

この f に対し内積(4.1.11)で定まる $\mathscr{A}(K)$ 上の汎函数が，もとの抽象的汎函数 Ψ と一致することを見よう．$\varphi(x) \in \mathscr{A}(K)$ とし，これは $\varphi(z) \in \mathscr{O}(U)$ まで解析接続されるとすれば，

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi \rangle &= \sum_\sigma \int F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0)\varphi(x)dx = \sum_\sigma \int_{\gamma_\sigma} F_\sigma(z)\varphi(z)dz \\ &= \sum_\sigma \int_{\gamma_\sigma} \Psi_\tau(W(z-\tau, \overline{\Gamma_\sigma}))\varphi(z)dz\end{aligned}$$

ここに γ_σ は $U_\sigma{}^K \cap U$ 内の適当な積分路である．この道はとにかく集合 K から離れているので，積分 $\int_{\gamma_\sigma} W(z-\tau, \overline{\Gamma_\sigma})\varphi(z)dz$ は τ の函数として K のある複素近傍で一様収束する．故に Ψ_τ の連続性により積分を中に入れることができ

$$\langle f, \varphi \rangle = \Psi_\tau\left(\sum_\sigma \int_{\gamma_\sigma} W(z-\tau, \overline{\Gamma_\sigma})\varphi(z)dz\right)$$

となる．括弧内の正則函数が $\varphi(\tau)$ に等しいことを示そう．（変数の位置関係が異なるため定理2.3.7そのままではない．）γ_σ が実領域 $D \supset K$ の変形であるとすれば，$\tau = t$ が実軸上 K の近傍にあるとき，上の函数は超函数として

$$\sum_\sigma \int_{\gamma_\sigma} W(x-t, \overline{\Gamma_\sigma})\varphi(x)dx = \int_{R^n} \delta(x-t)\chi_D(x)\varphi(x)dx = \chi_D(t)\varphi(t)$$

に等しい．故に実解析函数の超函数への埋め込みの一意性(定理 3.1.2)により，実軸上 K の近傍で上の函数は $\varphi(t)$ に等しく，従って複素近傍においても $\varphi(\tau)$ に等しい．これで $\langle f,\varphi\rangle=\Psi(\varphi)$ が示され，従って $\mathscr{A}(K)'\to\mathscr{B}[K]$ が代数的同型であることがわかった．

最後にこの向きの対応の連続性を示しておこう．汎函数の列 $\Psi_k\in\mathscr{A}(K)'$ は，各 $\varphi\in\mathscr{A}(K)$ に対し $\Psi_k(\varphi)$ が収束するようなものであるとせよ．このとき

$$F_{k,\sigma}(z) = \Psi_{k,\tau}(W(z-\tau, \overline{\Gamma_\sigma})) \in \mathscr{O}(U_\sigma{}^K)$$

は $U_\sigma{}^K$ において各点収束する．のみならず，任意の定数係数局所作用素 $J(D_z)$ に対し

$$J(D_z)F_{k,\sigma}(z) = \Psi_{k,\tau}(J(D_z)W(z-\tau, \overline{\Gamma_\sigma})) \in \mathscr{O}(U_\sigma{}^K)$$

も $U_\sigma{}^K$ 上各点収束する．ここで右辺において $J(D_z)$ を Ψ_k の中に入れたのは，もちろん Ψ_k の連続性を用いたのである．故に，定理 4.1.10 により $F_{k,\sigma}(z)$ は $U_\sigma{}^K$ の各点のある近傍で一様収束し，従って $\mathscr{O}(U_\sigma{}^K)$ において収束する．これは Ψ_k に対応する超函数 f_k の列が $\mathscr{B}[K]$ において収束することを意味している．証了．

上の証明の最後で示したことを特に系として掲げておこう．

系 4.1.13　超函数の列 $f_k\in\mathscr{B}[K]$ は，任意の $\varphi\in\mathscr{A}(K)$ に対し内積 $\langle f_k,\varphi\rangle$ が収束するとき**弱収束**するといわれる．このとき実は f_k は $\mathscr{B}[K]$ において普通の意味で収束する．

最後に双対性の考察から得られる一つの大切な結論を挙げておこう[注14)]．

定理 4.1.14　$K\subset L$ をコンパクト集合の対とし，L の各連結成分は K と交わるとする．このとき，自然な包含写像 $\mathscr{B}[K]\to\mathscr{B}[L]$ は稠密な像を持つ．

証明　Hahn-Banach の定理により，$\mathscr{B}[L]$ の双対空間の元 $\varphi\in\mathscr{A}(L)$ が部分空間 $\mathscr{B}[K]$ の上で 0 なら，実は 0 に等しいことをいえばよい．さて $a\in K$ とすれば $D^\alpha\delta(x-a)\in\mathscr{B}[K]$ なので

$$0 = \langle D^\alpha\delta(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x-a), (-D)^\alpha\varphi(x)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\varphi^{(\alpha)}(a)$$

故に，解析接続の一意性により少くとも a を含む連結成分の上で $\varphi(x)\equiv 0$ となる．他にも連結成分が残っていれば，a の他に点をとって同様にやればよい．

証了.

この定理は，本書の後半に与える多変数解析函数論のより進んだ知識を用いればHahn-Banachの定理に依らず補題4.1.2の位相の表現で直接証明することができる.

この節を終えるにあたって超函数の位相に関する老婆心的注意を述べておこう．連結集合Kに対しては，その一点に台が含まれるような超函数が既に全体の中で稠密となってしまうのだから，Schwartzの分布の場合のように局所的に極限をとり，それをつなぎ合わせて新しい超函数を作るという手法は大抵使えない．特に次のような誤りを犯さぬように注意せよ：“Ωを有界な開集合とし$f_k\in\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$を超函数の列とするとき，$\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$において$f_k\to f$，かつ$L_1(\Omega)$において$f_k\to g$ならば$f|_\Omega=g$となる”．事実は，$\mathcal{B}[\partial\Omega]$が$\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$に稠密に入っているのであるから，$f|_\Omega$は何処の馬の骨か知れたものではない.

参考4.1　開集合Ω上の超函数の空間$\mathcal{B}(\Omega)$には位相は入らない．その説明らしきものを与えておこう．まず，コンパクトな台を持つ超函数の場合にやった方法を真似て，$f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j0)$と境界値表示したときの$F_j(z)$に対する広義一様収束位相を以て超函数の空間に位相を入れることを考えてみよう．しかるに台がコンパクトな場合と異なり，このような境界値表示の選び方には標準的なものが存在しない．さらに錐Γ_jを決めても超函数0を表わすような表示が表示全体の中で稠密となってしまう．実際，Ωを有界とし$f\in\mathcal{B}(\Omega)$を$\tilde{f}\in\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$に延長すれば，定理4.1.14により$f_k\in\mathcal{B}[\partial\Omega]$により$\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$の位相で$\tilde{f}$を近似できる．故に$f_k(x)=\sum_\sigma F_{k,\sigma}(x+i\Gamma_\sigma0)$, $\tilde{f}(x)=\sum_\sigma F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma0)$を定理4.1.1の標準的な境界値表示とすれば，少なくとも$\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_\sigma0)$において$F_{k,\sigma}(z)\to F_\sigma(z)$となるが，一方$\sum_\sigma F_{k,\sigma}(x+i\Gamma_\sigma0)|_\Omega\equiv0$である．つまり，この収束の決め方では点列の収束に関してHausdorff性すら満たされない.

もう一つ考えられる方法は$\mathcal{B}$の脆弱性に基づく代数的同型

$$\mathcal{B}(\Omega)\cong\mathcal{B}[\bar{\Omega}]/\mathcal{B}[\partial\Omega]$$

を用いたらどうか，というものである．だが，これも同じ理由ですぐだめなことがわかる．開集合上の超函数の空間には今のところ位相を入れる方法がないというだけではなく，元来，普通の意味の位相というものが存在しないものと考えられている．それは種種の状況証拠により，もしもそのような位相があれば，その双対空間は“コンパクトな台を持つ実解析函数の空間”にならざるを得ないことが推論されるからである．これは無意味な主張ではあるが時には発見的考察として役に立つこともある．なお，第一に述

べた方法において一つの固定した楔からの境界値として得られる超函数だけを考えれば，Fréchet 位相が意味を持つことを付言しておこう．これは補題 3.1.3 と対応している．要するに，“位相を使いたければ正則函数の段階でせよ”，ということである．

問 4.1.3　$f_k \in \mathcal{B}[K\cap L]$ とし $\mathcal{B}[K]$ において $f_k \to f$，$\mathcal{B}[L]$ において $f_k \to g$ ならば，実は $f=g$ であり，$\mathcal{B}[K\cap L]$ において $f_k \to f$ となる．

§2　多様体上の超函数

超函数の概念は局所的なので，その定義をユークリッド空間の開集合から，それらを実解析写像により貼り合わせて得られる実解析多様体の上にまで拡張することができる．M を n 次元実解析多様体，$\{\Omega_\lambda\}$ をその座標近傍による開被覆とし，$\Phi_\lambda: \Omega_\lambda \to \boldsymbol{R}^n$ を座標写像とする．$\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu \neq \phi$ のとき $\Phi_\mu\circ\Phi_\lambda^{-1}: \Phi_\lambda(\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu) \to \Phi_\mu(\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu)$ という写像は定義によりユークリッド開集合の間の実解析的座標変換となっている．位相同型写像 Φ_λ により $\Phi_\lambda(\Omega_\lambda)\subset\boldsymbol{R}^n$ 上の層 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を Ω_λ の上に移すことができる．しかも共通部分 $\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu$ の上では，それぞれの成分から誘導された定義は座標変換の法則により一致している．($\mathcal{B}$ については第 3 章 §4，2° を見よ．) このとき，これらをつなぎ合わせることにより M 上の実解析函数の層 $\mathcal{A}$ および超函数の層 $\mathcal{B}$ が確定する．実は一般に次のような抽象的補題が成り立つ

補題 4.2.1　X を位相空間，$\{U_\lambda\}$ をその開被覆とする．各 U_λ 上に層 $\mathcal{F}_\lambda$ が定義され，共通部分で $\mathcal{F}_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu}=\mathcal{F}_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}$ が成り立っているならば，X 上の層 $\mathcal{F}$ で $\mathcal{F}|_{U_\lambda}=\mathcal{F}_\lambda$ を満たすものが一意に存在する．

ここに $\mathcal{F}|_{U_\lambda}$ は層 $\mathcal{F}$ の U_λ への**制限**であり，$V\subset U_\lambda$ に対し $V\mapsto\mathcal{F}(V)$ で定義される U_λ 上の層のことである．従って $\mathcal{F}|_{U_\lambda}=\mathcal{F}_\lambda$ とは，任意の開部分集合 $V\subset U_\lambda$ について $\mathcal{F}(V)=\mathcal{F}_\lambda(V)$ が成り立つことを意味する．このような $\mathcal{F}$ を構成するには，$U\subset X$ に対し

$$\mathcal{F}(U) = \{\{f_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda(U\cap U_\lambda)\}\,;\ \forall\lambda,\mu \text{ について } f_\lambda|_{U\cap U_\lambda\cap U_\mu}=f_\mu|_{U\cap U_\lambda\cap U_\mu}\}$$

とおけばよい．細かい部分の検証は容易なので省略する．

このようにして定義された多様体 M 上の層 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対し，微分や積などの局所的な諸演算は前章と全く同様に遂行できる．実際，適当な座標近傍をとり，ユークリッド空間内に持ち込んでこれらを行なえばよい．特異スペクトル

は大域的には M の**余接球束**と呼ばれる集合 iS^*M 上の概念となる．この集合は局所的には $\Omega_\lambda\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ の形をしており，共通部分 $x\in\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu$ においてはその方向成分を

$$\xi_\lambda dx_\lambda=\xi_\mu dx_\mu=\xi_\mu\left(\frac{d(\Phi_\mu\circ\Phi_\lambda{}^{-1})}{dx_\lambda}\right)_x dx_\lambda,$$

すなわち，$\xi_\lambda=\xi_\mu\left(\dfrac{d(\Phi_\mu\circ\Phi_\lambda{}^{-1})}{dx_\lambda}\right)_x$ なる線型変換で同一視することにより，それらを貼り合わせて得られるもので，それ自身実解析多様体となる．ここに $\dfrac{d(\Phi_\mu\circ\Phi_\lambda{}^{-1})}{dx_\lambda}$ は写像 $x_\mu=(\Phi_\mu\circ\Phi_\lambda{}^{-1})(x_\lambda)$ の函数行列である．この事実は特異スペクトルの座標変換法則（定理 3.4.6）の幾何学的表現に他ならない．

次に大域的な演算の例としてコンパクトな台を持つ超函数 $f(x)$ の定積分を計算してみよう．そのために M 上の超函数の層 $\mathcal{B}$ が脆弱であることをまず注意しておこう．層 $\mathcal{B}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の上では脆弱であったから（定理 3.1.2），これは次の補題から直ちに得られる．

補題 4.2.2 $\mathcal{F}$ を位相空間 X 上の層とし，$\{U_\lambda\}$ を X の開被覆とする．もしも各 $\mathcal{F}|_{U_\lambda}$ が脆弱ならば $\mathcal{F}$ 自身脆弱である．

下の証明では現代集合論の Zorn の補題を用いるが，これを未習の読者は $\{U_\lambda\}$ が有限被覆のときに帰納法による証明を考えてみよ．ここでの応用にはそれで十分である．

補題の証明 $f\in\mathcal{F}(U)$ を与えられた切断とし，これを X の上まで延長しよう．今，開集合 $\tilde{U}\supset U$ とその上の切断 $\tilde{f}\in\mathcal{F}(\tilde{U})$ で f の延長になっているものより成る対 $(\tilde{f},\tilde{U})$ の全体を考え，これに包含関係と制限写像による順序

$$(\tilde{f},\tilde{U})\prec(\tilde{\tilde{f}},\tilde{\tilde{U}})\iff\tilde{U}\subset\tilde{\tilde{U}},\ \tilde{\tilde{f}}|_{\tilde{U}}=\tilde{f}$$

を与えると，いわゆる**帰納的順序集合**を成すことがわかる．

故に Zorn の補題により極大元 $(\tilde{f},\tilde{U})$ が存在する．このとき $\tilde{U}=X$ であれば証明が終わる．$\tilde{U}\subsetneq X$ と仮定して矛盾を導こう．この仮定により被覆のある元 U_λ について $\tilde{U}\not\supset U_\lambda$ となる．$\mathcal{F}|_{U_\lambda}$ は脆弱だから，$\tilde{f}|_{\tilde{U}\cap U_\lambda}\in\mathcal{F}(\tilde{U}\cap U_\lambda)$ の U_λ 上への延長 f_λ が存在する．

$$\tilde{f}_\lambda=\begin{cases}\tilde{f}, & \tilde{U}\text{ 上},\\ f_\lambda, & U_\lambda\text{ 上},\end{cases}$$

とおけば明らかに $\tilde{f}_\lambda\in\mathcal{F}(\tilde{U}\cup U_\lambda)$ であり，$(\tilde{f}_\lambda,\tilde{U}\cup U_\lambda)$ は $(\tilde{f},\tilde{U})$ よりも真に大

きい．これは後者が極大元であったことに反する．証了．

さて，コンパクト集合 $\mathrm{supp}\, f$ の近傍には実解析係数を持つ体積要素 dx が与えられているとする．$\mathrm{supp}\, f$ を有限個の座標近傍 $\Omega_{\lambda_1}, \cdots, \Omega_{\lambda_N}$ により覆うことができるが，$\mathscr{B}$ の脆弱性により，これに応じて

$$f = f_1 + \cdots + f_N, \qquad \mathrm{supp}\, f_j \Subset \Omega_{\lambda_j}, \qquad j = 1, \cdots, N$$

と分解できる(補題 1.4.4 参照)．そこで

$$\int_M f(x)dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega_{\lambda_j}} f_j(x)dx \tag{4.2.1}$$

とおく．ただし，右辺の各積分は f_j を座標写像 Φ_{λ_j} によりユークリッド空間に移し，それを前章の定義によって計算するものとする．

補題 4.2.3　積分(4.2.1)の値は座標近傍や f の分解の選び方によらない．

証明　このことは一つの座標近傍内においては積分の線型性により明らかである．故に二種の分解による表現が与えられたとき，各座標近傍内における再分割により一方から他方に移り得ることを示せば十分である．まず，被覆の元については両者の合併をとることによりこれを共通としてよい．(余分に加わった被覆の元には分解要素として 0 を与える．) そこで二つの分解の差をとり，$\sum_{j=1}^{N} f_j = 0$ と仮定して $\sum_{j=1}^{N} \int f_j dx = 0$ を示せばよい．さて，$f_N = -\sum_{j=1}^{N-1} f_j$ より $\mathrm{supp}\, f_N$ は実際には $\bigcup_{j=1}^{N-1} \Omega_{\lambda_N} \cap \Omega_{\lambda_j}$ 内のコンパクト集合となっている．故に

$$f_N = \sum_{j=1}^{N-1} f_{Nj}, \quad \mathrm{supp}\, f_{Nj} \subset \Omega_{\lambda_j}, \quad j=1, \cdots, N-1$$

と Ω_{λ_N} 内で分解すれば，許された変形により

$$\sum_{j=1}^{N} \int f_j dx = \sum_{j=1}^{N-1} \int (f_{N_j} + f_j) dx$$

となる．故に被覆の元の個数に関する帰納法によりこれは 0 となる．証了．

参考 4.2　ここで n 次元多様体 M 上の体積要素について解説しておこう．まず M 上の n 次微分形式 $\omega(x)$ とは，局所座標 x に関し実解析函数 $g(x)$ を係数とする $g(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ という表現を持ち，座標変換について

$$\omega(\tilde{x}) = \omega(x), \text{ すなわち } \tilde{g}(\tilde{x}) \det\left(\frac{d\tilde{x}}{dx}\right) = g(x) \tag{4.2.2}$$

という法則を満たすもののことであった．M が向き付け可能ならば，M の局所座標を

$\det(d\tilde{x}/dx)>0$ となるように選ぶことができ，従って微分形式 $\omega(x)$ をそのまま体積要素とみなして M の上で積分論を展開することができる．ところで実領域における積分は実は空間の向き付けとは無関係な概念である，実際，積分の座標変換法則(補題3.4.7)のところで注意したように，変換で現われる因子は函数行列式の絶対値 $|\det(d\tilde{x}/dx)|$ である．そこで $\omega(x)=g(x)|dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n|$ という局所表示を持ち，(4.2.2)の代わりに

$$\tilde{g}(\tilde{x})\left|\det\left(\frac{d\tilde{x}}{dx}\right)\right|=g(x) \tag{4.2.3}$$

という座標変換法則を満たすものを考え，これを実解析係数の**体積要素**と呼ぶ．変換法則に絶対値をつけたために，M が向き付け可能でない場合にもこのような $\omega(x)$ で到るところ0にならぬものが存在し，それらは0にならぬ函数の因子を除き本質的には一意である．こうして，向き付け可能でない多様体の上でも積分論が可能となる．ただし，後述のStokesの定理のように微分形式の符号の機微がかかわる結果はそのまま体積要素に移すことはできない．

同様の議論は積多様体 $M\times T$ 上の超函数 $f(x,t)$ の t に関する積分にも応用することができる．$\operatorname{supp} f(x,t)$ が t につき $x\in M$ に関して局所一様にコンパクトならば，$\operatorname{supp} f$ の近傍で定義された T 上の実解析的体積要素 dt に対し積分 $\int_T f(x,t)dt$ は確定し，M 上の超函数となる．この特異スペクトルについて定理3.4.1と同様の評価式が成り立つ．さらに，この積分の結果として得られる x の超函数は M に沿って局所的に定まるので，積構造は局所的に存在すれば十分である．実際，隣の積構造に移ったときの積分の結果は，まさに座標変換の公式(補題3.4.7)により元のものと合致する．これらをまとめると次の定理になる．

定理4.2.4　$\Phi:M\to N$ は m 次元実解析多様体 M から n 次元実解析多様体 N への実解析写像とし $d=m-n>0$ とする．$f(x)$ を M 上の超函数とし，次の仮定をおく．

a)　Φ は $\operatorname{supp} f$ の近傍で極大の階数を持つ．すなわち $\operatorname{rank}(d\Phi/dx)=n$ とする．

b)　$\Phi|_{\operatorname{supp} f}$ は適正写像である．

c)　$\omega(x)$ を $\operatorname{supp} f$ の近傍で定義された，写像 Φ に関する実解析係数の d 次元相対体積要素とする．すなわち，Φ を射影写像 $x=(y,t)\mapsto y$ に帰するような

局所座標 $x=(y,t)$ に関し実解析係数を以て $g(y,t)dt$ と表わされ，別の同種の座標 $\tilde{x}=(\tilde{y},\tilde{t})=(\varphi(y),\psi(y,t))$ に対し変換法則

$$\tilde{g}(\tilde{y},\tilde{t})d\tilde{t} = \tilde{g}(\varphi(y),\psi(y,t))\left|\frac{\partial\psi(y,t)}{\partial t}\right|dt = g(y,t)dt$$

を満たすものである．

このとき Φ の繊維に沿う f の積分 $\int_{\Phi^{-1}} f(x)\omega(x)$ が定義され，N 上の超函数となる．次の評価式が成り立つ．

$$\mathrm{supp}\int_{\Phi^{-1}} f(x)\omega(x) \subset \Phi(\mathrm{supp}\, f)$$

$$\mathrm{S.\,S.}\int_{\Phi^{-1}} f(x)\omega(x) \subset \left(\Phi\times {}^t\!\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^{-1}\right)\left(\mathrm{S.\,S.}\, f\cap \mathrm{Image}\,{}^t\!\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right)$$

実際，条件 a) から陰函数の定理を用いることにより supp f の近傍では各微小座標近傍 $\Omega\subset N$ に対し $\Phi^{-1}(\Omega)=\Omega\times T$，かつ Φ はこの上で自然な射影 $\Omega\times T\to\Omega$ とみなすことができる．隣の座標近傍 $\tilde{\Omega}$ 上の直積構造を $\tilde{\Omega}\times\tilde{T}\to\tilde{\Omega}$ とすれば，$\Omega\cap\tilde{\Omega}$ においては $\tilde{t}=\psi(y,t)$ は(もし必要なら T, $\tilde{T}$ を少し縮めることにより) t につき逆に解ける写像となる．積分の座標変換則により

$$\int_T f(y,t)g(y,t)dt = \int_{\tilde{T}} f(\tilde{y},\tilde{t})\tilde{g}(\tilde{y},\tilde{t})d\tilde{t}, \qquad \Omega\cap\tilde{\Omega}\ 上,$$

が成り立つから，積分により Ω, $\tilde{\Omega}$ 上に定義された超函数は共通部分において座標変換 $\tilde{y}=\varphi(y)$ を通して一つにつながっている．評価式は定理 3.4.1 のものを座標不変な形に書き直したにすぎない．

今までは被積分函数の台が積分変数についてコンパクトな場合のみを扱ってきたが，被積分函数が積分領域の境界付近で積分変数についてミクロ解析的な場合も同様に扱える．第3章§5 で述べたように，積分領域の定義函数を被積分函数に掛けることにより上に述べた場合に帰着させることもできる．

次に Stokes の定理を述べよう．

定理 4.2.5 (Stokes)　T は向き付けられた d 次元実解析多様体，$D\subset T$ は区分的に実解析的な境界 ∂D を持つコンパクト集合とし，D および ∂D に T から定まる自然な向きを与える．$\omega(t)$ を D の近傍で定義された $d-1$ 次微分形式とする．このとき積多様体 $M\times T$ 上で定義され $M\times\partial D$ の近傍で t を実解析パラメータとして含む超函数 $f(x,t)$ に対し

(4.2.4)
$$\int_D d_t(f(x,t)\omega(t)) = \int_{\partial D} f(x,t)\omega(t)$$

が成り立つ．ただし，左辺の積分において d_t は変数 t に関する外微分を表わし，局所座標で

$$d_t(f(x,t)\omega(t)) = \sum_{j=1}^{d} dt_j \wedge \frac{\partial}{\partial t_j}(f(x,t)\omega(t))$$

と計算されるものである．ここに $\partial/\partial t_j$ は $f(x, t)\omega(t)$ を基底 $dt_1, \cdots, dt_d$ で表わしたときの係数を微分している．また，(4.2.4)の右辺の積分は ∂D の各実解析的小片における積分の総和を表わす．

証明　向きの付いた多様体においては最高次の微分形式と体積要素とは同一視できるから公式の意味は明らかであろう．まず $\mathrm{supp}\, f$ が t につき x に関して局所一様にコンパクトとなっている場合に

(4.2.5)
$$\int_T d_t(f(x,t)\omega(t)) = 0$$

を示そう．これは $\mathrm{supp}\, f$ を t 変数に関して分割することによりユークリッド空間の場合に帰着されるが，このとき(4.2.5)は部分積分(命題3.4.3c)により明らかである．次に一般の場合，$\chi_D(t)$ を D の定義函数とすれば，今示したことから

$$\int_T d_t(\chi_D(t)f(x,t)\omega(t)) = 0$$

となることに注意せよ．証明すべき式の左辺は $\int_T \chi_D(t)d_t(f(x,t)\omega(t))$ に等しいから，結局

(4.2.6)
$$\chi_D(t)d_t(f(x,t)\omega(t)) - d_t(\chi_D(t)f(x,t)\omega(t))$$

の積分が(4.2.4)の右辺を与えることを示せばよい．この量は明らかに境界 ∂D にしか台を持たないから，角を無視すれば局所的な座標変換により公式

(4.2.7)
$$Y(t_1)d_t(f(x,t)\omega(t)) - d_t(Y(t_1)f(x,t)\omega(t)) = -\delta(t_1)f(x,t)dt_1 \wedge \omega(t)$$

に帰着する．$f(x,t)$ の台を境界上の変数につきコンパクトに切断したあとでこれを t につき積分すれば，まず t_1 に関する積分により

$$-\int_{\mathbf{R}^{d-1}} (f(x,t)\omega(t))|_{t_1=0}$$

が得られる．ここで D が $t_1 \geq 0$ に対応しているとき，境界 $t_1=0$ に D から誘導

される正の向きは $\boldsymbol{R}^{d-1}$ の自然な向きと逆になることを思い出せば，負号が相殺しこれが(4.2.4)の右辺の一部を与えることがわかる．

最後に角がある場合の議論を補足しておこう．∂D の内側に角を持たない境界 $\partial D'$ を人為的に付け加えて殻状領域を作り，それを適当に細分すれば，(4.2.6)の T 上の積分は D' および各細片 D_j に対する同種の量を T 上で積分したものの総和に等しい．故に D がユークリッド空間内に含まれ $f(x,t)$ がその近傍で t を実解析パラメータとして含む場合に(4.2.6)の積分を計算しておけば十分である．このとき $f(x,t)=\sum_{j=1}^{N}F_j((x,t)+i\Delta_j0)$，$\Gamma_j=\Delta_j\cap\{\mathrm{Im}\,\tau=0\}\neq\phi$ と表示され，補題3.5.10により求める積分は

$$(4.2.8)\qquad \sum_{j=1}^{N}\left[\int_{\boldsymbol{R}^d}\chi_D(t)d_t(F_j(z,t)\omega(t))-d_t(\chi_D(t)F_j(z,t)\omega(t))\right]_{z\to x+i\Gamma_j0}$$

に等しい．括弧内の積分は最初に注意したように $\int_D d_t(F_j(z,t)\omega(t))$ に等しいが，これは既に通常の函数の積分であるから，通常の Stokes の定理により $\int_{\partial D}F_j(z,t)\omega(t)$ に等しいことが結論できる．あるいは自己完結性を重んじるなら，ここで D を実解析的な境界を持つ領域 D_ε で一様近似すれば，既に示されたように $\int_{D_\varepsilon}d_t(F_j(z,t)\omega(t))=\int_{\partial D_\varepsilon}F_j(z,t)\omega(t)$ となるから，ここで $D_\varepsilon\to D$ とすれば各辺はそれぞれ

$$\int_D d_t(F_j(z,t)\omega(t))=\int_{\partial D}F_j(z,t)\omega(t)$$

の対応する辺に近づく．ここで右辺の積分は ∂D の各実解析的小片に対するものの和の意味であることはもちろんである．得られた等式を(4.2.8)に代入すれば証明が完了する．

参考 4.3 実解析係数の微分形式 $\omega(x)$ に超函数を掛けたもの $f(x)\omega(x)$ はそれ自身数学的対象となり，**超函数係数の微分形式**と呼ばれる．実際，座標変換法則(4.2.2)は実解析函数の掛け算により表わされているので，$\omega(x)$ が既に超函数係数でも確定した意味を持つ．このことは任意次元の微分形式に対しても同様である．こうして，実解析的な積分路(輪体)の上では超函数係数の微分形式を積分することが可能になる．他方実解析係数の微分形式に対しては，輪体上での積分を定義する測度の概念を超函数にまで一般化することができ，こちらの方は**カレント**と呼ばれる．このような概念の導入は，上に述べた Stokes の定理の証明からもわかる様に，境界という幾何学的概念を係数の特

異性に取り込むことを可能にする等，議論の見通しを良くするのに役立つ.

さて，我々が以下に用いる多様体は球面 $\boldsymbol{S}^{n-1}$ のみである．これを $\boldsymbol{R}^n$ 内の曲面 $\xi_1{}^2+\cdots+\xi_n{}^2=1$ と見るとき，$\xi_j\neq 0$ なるところではユークリッド座標 $\xi_1, \cdots, \xi_{j-1}$, $\xi_{j+1}, \cdots, \xi_n$ が $\boldsymbol{S}^{n-1}$ の座標として流用できる．混乱を避けたいときは球面上の点を表わすのに $\omega=\xi/|\xi|$ という文字を用いることにする．$\boldsymbol{R}^{n-1}$ 上の $n-1$ 次微分形式

$$\omega(\xi)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\xi_j d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_{j-1}\wedge d\xi_{j+1}\wedge\cdots\wedge d\xi_n$$

を $\boldsymbol{S}^{n-1}$ に制限すると，ちょうど球面の標準的な体積要素 $d\omega$ が得られる.

問 4.2.1　そのことを確かめよ.

例 4.2.6　平面 Radon 分解の成分 $W_0(x,\xi)$ において，実解析パラメータ ξ を球面 $|\xi|=1$ の上に制限したものを $W_0(x,\omega)$ と書くとき

$$\delta(x)=\int_{S^{n-1}}W_0(x,\omega)d\omega=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{S^{n-1}}\frac{d\omega}{(x\omega+i0)^n}$$

実際，積分領域 $\boldsymbol{S}^{n-1}$ を閉多角錐 $\Gamma_j{}^\circ$ により分割してみれば，これは補題 3.5.1 の言い換えにすぎないことが積分の定義によりわかる．この公式から $\delta(x)$ が x につき球対称なことがわかり，例 3.1.10 d) の評価が確定した.

例 4.2.7(柏原)　曲面 Radon 分解の成分 $W(x,\xi)$ に対して，同様に

$$\delta(x)=\int_{S^{n-1}}W(x,\omega)d\omega$$
$$=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{S^{n-1}}\frac{(1-ix\omega)^{n-1}-(1-ix\omega)^{n-2}(x^2-(x\omega)^2)}{(x\omega+i(x^2-(x\omega)^2)+i0)^n}d\omega$$

$\boldsymbol{S}^{n-1}$ の開部分集合 Δ に対し

$$W(x,\Delta)=\int_\Delta W(x,\omega)d\omega$$

とおけば，

$$\text{S. S. } W(x,\Delta)=\{0\}\times i\bar{\Delta}dx\infty$$

超函数芽 $f(x)$ が点 $(x,i\omega dx\infty)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ でミクロ解析的となるためには，f の台を点 x の近傍の外でコンパクトに切り落したもの $\tilde{f}(x)$ に対し

$$\int_{R^n} \tilde{f}(y) W(x-y, \omega) dy$$

が，x, ω の超函数としてこの点の近傍で実解析的となることが必要かつ十分である．

最後の主張は定理 3.3.2 を超函数の言葉に翻訳したものであるが，既に確立した特異スペクトルの計算規則には恰好の練習問題でもある．

問 4.2.2 その計算を遂行せよ．

問 4.2.3 平面 Radon 分解成分に対して同様に $\Delta \subset S^{n-1}$ に対し

$$W_0(x, \Delta) = \int_\Delta W_0(x, \omega) d\omega$$

とおくとき

$$\text{S.S.}\, W_0(x, \Delta) \subset \{0\} \times i\bar{\Delta} dx\infty \cup \{(x, i\omega dx\infty) ; x\omega=0, \omega \in \partial\Delta\}$$

を示せ．この評価は正確か？

例 4.2.6–4.2.7 の分解はさらに，次のように一般化できる．証明も同様である．

定理 4.2.8 $\Psi_j(x, \xi)$, $j=1, \cdots, n$ は $x=0$, $|\xi|=1$ の近傍で定義された実解析函数で ξ につき正 1 次同次かつ $\Psi_j(0, \xi)=\xi_j$ を満たしているものとする．また $\Phi(x, \xi)=\langle x, \Psi(x, \xi)\rangle$ とおくとき，これは開き $\mathrm{Im}\, z\xi>0$ の無限小楔において $\mathrm{Im}\, \Phi(z, \xi)>0$ を満たしていると仮定する．このとき $x=0$ の近傍で次の公式が成り立つ．

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \int_{S^{n-1}} \frac{\det(\partial\Psi_j/\partial\xi_k)}{(\Phi(x, \xi)+i0)^n} d\xi \tag{4.2.9}$$

例としては古典的な平面波分解(例 4.2.6)，柏原の分解(例 4.2.7)が最も有名であり，本書でも専らこれらを利用して来たが，この他に Bony の分解

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \int_{S^{n-1}} \frac{1+ix\omega}{(x\omega+ix^2+i0)^n} d\omega \tag{4.2.10}$$

も簡単で便利である．これは上の定理で $\Psi_j(x, \xi)=\xi_j+ix_j|\xi|$ をとった場合に相当する．この分解成分も原点の外で x につき実解析的である．

参考 4.4 実解析多様体 M のコンパクト集合 K についても，台が K に含まれる超

函数の全体 $\mathcal{B}[K]$ は Fréchet 空間になり，K の近傍における体積要素を一つ固定すれば，K の近傍で実解析的な函数の作る空間 $\mathcal{A}(K)$ と互いに双対になる．特に，コンパクト多様体 M 上の超函数の全体 $\mathcal{B}(M)$ は Fréchet 空間になり，実解析函数の全体の作る空間 $\mathcal{A}(M)$ と互いに双対になる．この事実の初等的な証明を一つ与えておこう．

一つの座標近傍に含まれるようなコンパクト集合については，この事実は既知なので，一般に $K\subset M$ については既知とし，これに一つの座標近傍に含まれるようなコンパクト集合 L をつけ加えても上述の主張が正しいことを示せばよい．まず $\mathcal{B}$ の脆弱性から出る代数的完全列

$$(4.2.11)\quad 0\to\mathcal{B}[K\cap L]\xrightarrow{\lambda}\mathcal{B}[K]\oplus\mathcal{B}[L]\xrightarrow{\mu}\mathcal{B}[K\cup L]\longrightarrow 0$$

$$f\longmapsto f\oplus f,\qquad f\oplus g\longmapsto f-g$$

に着目する．仮定により $\mathcal{B}[K]\oplus\mathcal{B}[L]$, $\mathcal{B}[K\cap L]$ は Fréchet 空間であるから，Image λ が閉部分空間になることを示し，$\mathcal{B}[K\cup L]$ に商位相 $\mathcal{B}[K]\oplus\mathcal{B}[L]/\mathcal{B}[K\cap L]$ を入れることを考える．そこで，この双対列ともいうべき完全列

$$(4.2.12)\qquad 0\leftarrow\mathcal{A}(K\cap L)\xleftarrow{{}^t\lambda}\mathcal{A}(K)\oplus\mathcal{A}(L)\xleftarrow{{}^t\mu}\mathcal{A}(K\cup L)\longleftarrow 0$$

$$\varphi-\psi\longleftarrow\!\dashv\varphi\oplus\psi,\qquad\varphi\oplus\varphi\longleftarrow\!\dashv\varphi$$

に着目する．ここで ${}^t\lambda$ の全射性は (本書の後半に述べる) コホモロジーの消滅定理から従うもので自明ではない(補題 1.5.1 等と比較してみればその意味が理解できよう)．さて，$f_k\in\mathcal{B}[K\cap L]$ が $\mathcal{B}[K]$ において $f_k\to f$, $\mathcal{B}[L]$ において $f_k\to g$ とせよ．$\varphi\in\mathcal{A}(K\cap L)$ に対し $\varphi=\psi-\chi$, $\psi\in\mathcal{A}(K)$, $\chi\in\mathcal{A}(L)$ と分解すれば，

$$\langle f_k,\varphi\rangle=\langle f_k,\psi\rangle-\langle f_k,\chi\rangle\longrightarrow\langle f,\psi\rangle-\langle g,\chi\rangle$$

故に，系 4.1.13 により f_k は $\mathcal{B}[K\cap L]$ においてある元に収束する．$\mathcal{B}[K\cap L]\to\mathcal{B}[K]$, $\mathcal{B}[K\cap L]\to\mathcal{B}[L]$ はともに連続だから(厳密に言えば前者のほうは帰納法の仮定であり，帰納法と共に証明してゆくべきものである)，$f=g\in\mathcal{B}[K\cap L]$ かつ $\mathcal{B}[K\cap L]$ において $f_k\to f$ となり，Image λ が閉じていることが確かめられた．

(4.2.11)の第一，二項と(4.2.12)の第一，二項がそれぞれ双対関係にあることから，$\mathcal{B}[K\cup L]$ と $\mathcal{A}(K\cup L)$ とが双対関係にあることがわかり，帰納法を進めることができる．系 4.1.13 あるいは定理 4.1.14 に相当する主張も帰納法で同時に証明してゆくことができる．

§3 正則パラメータを持つ超函数

正則パラメータを持つ超函数の一般論は本書の後半で与えるが，ここでは理解し易くまた応用上も重要な，正則パラメータが一つの場合について，基礎的考察をしておこう．

定義 4.3.1　$\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ を開集合とし $T\subset \boldsymbol{C}$ を複素開集合とする．$f(x,\tau)$ が $\tau\in T$ を**正則パラメータ**として含む超函数であるとは，f が各点 $(x^0,\tau^0)\in\Omega\times T$ のある近傍 $\Omega_0\times T_0$ において

$$(4.3.1)\qquad f(x,\tau)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j 0,\tau),\qquad F_j(z,\tau)\in\mathcal{O}((\Omega_0+i\Gamma_j 0)\times T_0)$$

という表示を持ち，かつ点 (x^0,τ^0) を変えたとき，これらの表示が共通部分において互いに同値となっていることを言う．ただし，二つの表示が同値とは，$\Gamma_j\cap\Gamma_k\neq\phi$ のとき

$$F_j(x+i\Gamma_j 0,\tau)+F_k(x+i\Gamma_k 0,\tau)=(F_j+F_k)(x+i\Gamma_j\cap\Gamma_k 0,\tau)$$

という項の縮約，およびこの逆の分解を有限回繰返すことにより互いに移り得ることを言う．このような $f(x,\tau)$ の全体を $\mathcal{B}_n\mathcal{O}_1(\Omega\times T)$，あるいは単に $\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ で表わす．

このとき $\tau=t+is$ とし，t,s を実の2独立変数とみなせば，$f(x,\tau)$ は実開集合 $\Omega\times T\subset\boldsymbol{R}^{n+2}$ 上の $n+2$ 変数の超函数とみなせる．実際，t の複素化を τ, s の複素化を σ とすれば，$F_j(z,\tau+i\sigma)$ は $n+2$ 複素変数 z,τ,σ の函数として $(\Omega_0+i\Gamma_j 0)\times(T_0+i\boldsymbol{R}^2 0)$ で正則である．($\mathrm{Im}\,\tau$, $\mathrm{Im}\,\sigma$ の動き得る範囲は $t=\mathrm{Re}\,\tau$, $s=\mathrm{Re}\,\sigma$ が T_0 の境界に近づくにつれて小さくなるかもしれないが，方向的には無制限であることに変わりない．) この正則函数の境界値として $\Omega_0\times T_0$ 上に $n+2$ 変数 x,t,s の超函数 $f(x,t,s)$ が得られる．これが $f(x,\tau)$ の境界値表示(4.3.1)によらず，従って $\Omega\times T$ 上の超函数につながることは明らかであろう．

定理 4.3.2　上の対応により $\mathcal{BO}(\Omega\times T)\to\mathcal{B}(\Omega\times T)$ という単射が定まる．$\mathcal{B}(\Omega\times T)$ の元 $f(x,t,s)$ で τ を正則パラメータとして含むものは，ちょうど Cauchy-Riemann 方程式

$$(4.3.2)\qquad \frac{\partial f}{\partial\bar{\tau}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\partial}{\partial s}\right)f(x,t,s)=0$$

の解に対応する．従って，正則パラメータ τ を含む超函数は $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{C}$ 上の層 $\mathcal{BO}$ をなす．正則パラメータは特に実解析パラメータでもあり，更に強く

$$(4.3.3)\qquad \mathrm{S.S.}\,f(x,\tau)\subset\{dt=ds=0\}=\Omega\times T\times iS^{n-1}dx\infty$$

が成り立つ．

証明　対応 $\mathcal{BO}(\Omega\times T)\to\mathcal{B}(\Omega\times T)$ が単射なことの証明は本書後半で与え

る．以下においてはこの埋め込みの像を直接扱うので，単射性の証明は理論的にも必要ではない．さて，埋め込みの定義から評価(4.3.3)は明らかである．この評価から特に正則パラメータ τ が実解析パラメータ (t, s) と思えることもわかる．

次に Cauchy-Riemann 方程式との関係を見よう．$f(x, t, s)$ が $\tau=t+is$ を正則パラメータとして含めば，(4.3.1)の形の表示を持つから，定義により

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\partial}{\partial s}\right)f=\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+i\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)F_j(z,\tau+i\sigma)\right]_{(z,\tau,\sigma)\to(x+i\Gamma 0,t,s)}$$

であり，括弧内は単純な計算で0に帰する．逆に超函数として $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\partial}{\partial s}\right)f=0$ とせよ．$\Omega\times T$ の点 (x^0, τ^0) を一つ固定し，その凸近傍 $\Omega_0\times T_0$ において

$$f(x,t,s)=\sum_{j=1}^{N}F_j((x,t,s)+i\varDelta_j 0)$$

という表示を一つとる．

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\partial}{\partial s}\right)f=\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+i\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)F_j(z,\tau,\sigma)\right]_{(z,\tau,\sigma)\to(x,t,s)+i\varDelta_j 0}$$

であり，これが0ということから，補題3.2.7により $H_{jk}(z,\tau,\sigma)\in\mathcal{O}(\Omega_0'\times T_0'+i(\varDelta_j'+\varDelta_k')0)$ で $H_{kj}=-H_{jk}$ かつ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+i\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)F_j(z,\tau,\sigma)=\sum_{k=1}^{N}H_{jk}(z,\tau,\sigma),\qquad j=1,\cdots,N \tag{4.3.4}$$

を満たすものが存在する．ここで，′は対応する領域を少し縮めたことを示す．この収縮により $H_{jk}(z,\tau,\sigma)$ の定義域である無限小楔は真に凸な領域であると仮定しても一般性を失わない．すると $(\tau+i\sigma, \tau-i\sigma)$ は (τ, σ) と同値な複素変数の対と見なせるから，後に述べる補題4.3.3により方程式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+i\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)G_{jk}(z,\tau,\sigma)=\frac{\partial}{\partial(\tau-i\sigma)}G_{jk}(z,\tau,\sigma)=H_{jk}(z,\tau,\sigma)$$

は，この領域において大域的に解くことができる．さて

$$G_j(z,\tau,\sigma)=F_j(z,\tau,\sigma)-\sum_{k=1}^{N}G_{jk}(z,\tau,\sigma),\qquad j=1,\cdots,N$$

は，もとと同じ超函数 $f(x, t, s)$ を与えるが，(4.3.4)により

$$\frac{\partial}{\partial(\tau-i\sigma)}G_j(z,\tau,\sigma)=0$$

すなわち，$G_j(z, \tau, \sigma)$ は z および $\tau+i\sigma$ のみの正則函数であると思える．故に

$(\varepsilon, \delta) \in p_{t,s}(\Delta_j)$ と選べば

$$G_j(z, \tau, \sigma) = G_j(z, \tau + i\varepsilon + \delta, \sigma + i\delta - \varepsilon)$$

となり，T_0' の大きさを更に ε, δ の分だけ犠牲にすれば，τ, σ はその分だけ T_0' の複素近傍を動き得ることになる．従って，$G_j(z, t, s)$ は $\tau = t + is$ につき T_0' で正則となる．このような G_j の境界値として定まる f は定義により τ を正則パラメータとして含む．

さて，変数 x, t, s の超函数は $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{C} \cong \boldsymbol{R}^{n+2}$ 上の層 $\mathcal{B}$ をなし (定理 3.1.1)，また微分作用素 $\partial/\partial\bar{\tau}$ はその自己準同型だから，その核として正則パラメータ τ を含む超函数は $\mathcal{B}$ の部分層となる．証了．

補題 4.3.3　$U \subset \boldsymbol{C}^n$ を凸開集合とすれば，$G(z) \in \mathcal{O}(U)$ に対し偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial z_1} F(z) = G(z)$$

は大域解 $F(z) \in \mathcal{O}(U)$ を持つ．

この方程式が局所的に解けることは不定積分により明らかだが，積分起点 $z_1 = \mathrm{const}$ が U の最も“幅の広い”部分と交わっていない限り不定積分が大域的に求まるかどうかは自明ではない．この証明は本書の後半で与えることにする．

正則パラメータを含む超函数 $f(x, \tau) \in \mathcal{B}\mathcal{O}(\Omega \times T)$ のうちで x に関する台がコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に含まれるものの全体を $\mathcal{B}[K] \widehat{\otimes} \mathcal{O}(T)$ と記すことにしよう．ここに $\widehat{\otimes}$ は位相テンソル積の記号であるが，ここでは全体を一つの記号と思って頂けばよい．この空間はもちろん K のみに依存し $\Omega \supset K$ には依らない．

定理 4.3.4　$f(x, \tau) \in \mathcal{B}[K] \widehat{\otimes} \mathcal{O}(T)$ の元は (4.3.1) の形の大域的表示で，$F_j(z, \tau)$ が更に $(\boldsymbol{R}^n \setminus K) \times T$ の近傍に解析接続されるようなものを許す．$\mathcal{B}[K] \widehat{\otimes} \mathcal{O}(T)$ は自然な Fréchet 空間の構造を持つ．$\mathcal{B}[K]$ の元と $\mathcal{O}(T)$ の元の積の有限和は明らかに $\mathcal{B}[K] \widehat{\otimes} \mathcal{O}(T)$ に属するが，これらの全体は $\mathcal{B}[K] \widehat{\otimes} \mathcal{O}(T)$ で稠密となる．特に $T = \{|\tau| < r\}$ とすれば，$\mathcal{B}[K] \widehat{\otimes} \mathcal{O}(T)$ の元 $f(x, \tau)$ は

$$(4.3.5) \qquad f(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \tau^k, \quad f_k(x) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^k f(x, 0)$$

という無限級数に展開され，これは $\mathcal{B}[K] \widehat{\otimes} \mathcal{O}(T)$ の位相で収束する．また，$K \subset L$ に対し埋め込み写像 $\mathcal{B}[K] \widehat{\otimes} \mathcal{O}(T) \to \mathcal{B}[L] \widehat{\otimes} \mathcal{O}(T)$ が定義され，この写

像は，L の各連結成分が K と交わるならば，稠密な像を持つ.

証明　定理4.1.1の真似をし積分

$$F_\sigma(z,\tau)=\int_{\boldsymbol{R}^n} f(w,\tau)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw \tag{4.3.6}$$

を考えると，これは z,τ につき $U_\sigma{}^K\times T$ 上の正則函数となる．実際，$\tau=t+is$ において t,s をただの実解析パラメータと見，f の境界値表示

$$f(x,\tau)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j0,t,s)$$

で各 $F_j(z,t,s)$ が $(\boldsymbol{R}^n\setminus K)\times T$ の近傍に解析接続できるようなものを選んで上の積分を定義にもとづき計算すれば，$F_\sigma(z,\tau)$ が z,t,s の実解析函数であることがまずわかる．一方，これを超函数の積分と見て $\partial/\partial\bar{z}_j, \partial/\partial\bar{\tau}$ を施し，命題3.4.3a) によりこれらを積分記号下にもってゆけば，$F_\sigma(z,\tau)$ が z,τ の正則函数であることがわかる．これより

$$f(x,\tau)=\sum_\sigma F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma0,\tau) \tag{4.3.7}$$

がわかる．より詳しく言えば，この右辺から定まる x,t,s の超函数が，超函数として $f(x,\tau)$ に等しいことがわかる．実際，積分の定義により

$$\sum_\sigma F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma0,\tau)=\sum_\sigma\int_{\boldsymbol{R}^n} f(w,\tau)W(x-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw$$
$$=\int_{\boldsymbol{R}^n} f(w,\tau)\delta(x-w)dw=f(x,\tau)$$

となっているからである．こうして，求める形の表示が一つ得られた.

この対応 $f(x,\tau)\mapsto\{F_\sigma(z,\tau)\}$ により $\mathcal{B}[K]\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ を $\prod_\sigma\mathcal{O}(U_\sigma{}^K\times T)$ の部分空間とみて，後者の Fréchet 位相から誘導される位相を前者に入れる．あとの細かい議論は§1と同様である.

次に稠密性を示そう．今得た $f(x,\tau)$ の境界値表示(4.3.7)を(4.3.6)に代入すれば，$D\supseteq K$ を積分領域，$D+i\varepsilon_{\sigma'}$ をその $D+i\Gamma_{\sigma'}0$ 内への適当な変形として

$$F_\sigma(z,\tau)=\sum_{\sigma'}\int_{D+i\varepsilon_{\sigma'}} F_{\sigma'}(w,\tau)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw \tag{4.3.8}$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\sum_{\sigma'}\int_D F_{\sigma'}(w+i\varepsilon\sigma',\tau)W(z-w-i\varepsilon\sigma',\overline{\Gamma_\sigma})dw$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\sum_{\sigma'}\int_D F_{\sigma'}(w+i\varepsilon\sigma',\tau)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw$$

となる．ここで極限は $\mathcal{O}(U_\sigma{}^K\times T)$ における収束である．今この積分を Riemann 式近似和でおき換えれば，結局

$$\sum_k\sum_{\sigma'}F_{\sigma'}(w^k+i\varepsilon\sigma',\tau)W(z-w^k,\overline{\Gamma_\sigma^\circ})\Delta w^k$$

の形の元による $\mathcal{O}(U_\sigma{}^D\times T)$ 内の近似列を得るが，これは $\sum_k\delta(x-w^k)G_k(\tau)\in\mathcal{B}[D]\otimes\mathcal{O}(T)$ の形の元を定める．故に定理 4.1.1 により D を K でおき換えることができ，また $\mathcal{B}[K]\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)\subset\mathcal{B}[L]\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ も稠密となる．

最後の主張については，積分(4.3.8)において(系 2.2.2 により)τ に関して

$$F_{\sigma'}(w,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}F_{\sigma'}{}^k(w)\tau^k$$

と Taylor 級数に展開すれば，

$$F_\sigma(z,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\tau^k\sum_{\sigma'}\int_{D+i\varepsilon_{\sigma'}}F_{\sigma'}{}^k(w)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma^\circ})dw$$

となる．この級数はもちろん $\mathcal{O}(U_\sigma{}^K\times T)$ で収束している．(4.3.5)の係数 $f_k(x)$ は明らかに $\sum_{\sigma'}F_{\sigma'}{}^k(x+i\Gamma_{\sigma'}0)$ に等しいから，これより位相の意味を込めた展開(4.3.5)が得られる．証了．

正則パラメータ τ を持つ超函数のうちで台が x につきコンパクトなものは，その構造上かなり特殊なものである．例えば，一般の正則パラメータを持つ超函数に対して(4.3.5)に相当する Taylor 展開は，実解析パラメータの場合と同様の意味での漸近展開と見なせるが，それはもはやもとの超函数を忠実に表現できないという事実がある．(第3章の参考 3.3 で与えた例 $f(x,t)$ は t を複素変数 $\tau\in\boldsymbol{C}$ としたとき，そのまま正則パラメータの場合の例となっていることに注意せよ.) しかしながら次の定理があるため，この特殊な形のものも場面によっては役に立つ．

定理 4.3.5　正則パラメータ τ を持つ超函数の層 $\mathcal{BO}$ は変数 x につき脆弱である．すなわち，$\Omega'\subset\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ とするとき，制限写像

$$\mathcal{BO}(\Omega\times T)\longrightarrow\mathcal{BO}(\Omega'\times T)$$

は全射となる．特に Ω を有界開集合とするとき，$\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ の元 $f(x,\tau)$ は $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ の元に延長することができる．

この定理の証明は $\mathcal{B}$ の脆弱性の証明と共に本書の後半において与える．

問 4.3.1　第1章の例1.1.5において $(x\pm i0)^\lambda$ は $\lambda\in\boldsymbol{C}$ を正則パラメータとして含む超函数であることを確かめよ．また $x_\pm^\lambda$，$|x|^\lambda$ 等についてはどうか？

正則パラメータの重要性は，これを経由して新しい超函数を構成できる点にある．まず正則パラメータに関する解析接続の方法から始めよう．これには函数等式を用いるものや，Cousin 積分を用いるものがあるが，後者の基礎になる Cauchy の積分公式を述べよう．$f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ とし γ を T 内の区分的に滑らかな弧とする．$f(x,\tau)$ の表示(4.3.1)を用いて

$$\int_\gamma f(x,\tau)d\tau=\sum_{j=1}^N\left[\int_\gamma F_j(z,\tau)d\tau\right]_{z\to x+i\Gamma_j0}\in\mathcal{B}(\Omega)$$

と定める．この積分が表示(4.3.1)に依らないことは明らかである．故に(4.3.1)の形の表示が局所的にしか有効でない場合も，x について局所化し，また γ を分割して各小片に上の定義をあてはめたものの和をとれば，$\mathcal{B}(\Omega)$ の元が確定する．γ が区分的に実解析的な場合は各小片を実解析多様体と見，$f(x,\tau)|_\gamma$ をその上の超函数と思って体積要素 $d\tau|_\gamma$ につき前節の意味で積分したものの和と一致する．

補題 4.3.6　$f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ とし，γ を一点に収縮可能な T 内の区分的に滑らかな単純閉曲線とする．このとき

$$\oint_\gamma f(x,\tau)d\tau=0$$

さらに，τ を γ の内部の一点とすれば

$$f(x,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(x,w)}{w-\tau}dw$$

実際，γ で囲まれた閉領域の近傍で(4.3.1)の形の表示が可能ならば，これらの公式は上に与えた積分の定義により正則函数 $F_j(z,\tau)$ に対する通常の Cauchy の積分定理に帰着する．一般の場合にはこの閉領域を細かく分割し，これに応じて仮想境界をつけ加えれば，この特殊な場合に帰着する．

系 4.3.7　$f(x,\tau)\in\mathcal{B}[K]\hat{\otimes}\mathcal{O}(\{r<|\tau|<R\})$ は，τ につき位相の意味で収束する **Laurent 級数**に展開される：

$$(4.3.9)\qquad f(x,\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(x)\tau^k,\qquad f_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(x,\tau)}{\tau^{k+1}}d\tau$$

これは定義函数をとってみれば系 2.2.3 の言い換えにすぎない．この展開係数は $f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times\{r<|\tau|<R\})$ に対しても一意に確定することに注意せよ．ただし，級数の意味はある種の漸近展開にすぎなくなる．係数全部がもとの超函数を復元できないことは Taylor 展開のとき既にそうだったのだから言うまでもない．これらの係数は x につき局所的に定まることに注意せよ．これは γ として実解析的な閉曲線をとってみれば，繊維に沿う積分の一般論からの帰結にすぎないが，事実は重要である．特に τ^{-1} の係数は**留数**と呼ばれ，これが x の超函数として局所的に計算できることは種々の応用がある．

問 4.3.2 $x_\pm{}^\lambda$ の $\lambda=-m$ における Laurent 展開を求めよ．

では，解析接続の一意性はどうであろうか？ これについてはもっと強力な次の定理が成り立つ．

定理 4.3.8 $f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ とする．開部分集合 $T'\subset T$ で T の各連結成分と交わるようなものがあり，$f(x,\tau)|_{\Omega\times T'}$ は ξ 方向にミクロ解析的とせよ．このとき $f(x,\tau)$ は到るところで ξ 方向にミクロ解析的となる．

証明 定理 4.3.2 により $\xi\in\boldsymbol{S}^{n-1}\times\{(0,0)\}$ としてよい．連続的帰納法を用いて ξ 方向にミクロ解析的な領域を少しずつ拡大してゆけばよいから，$T=\{|\mathrm{Re}\,\tau|<\rho, |\mathrm{Im}\,\tau|<R\}$，$T'=\{|\mathrm{Re}\,\tau|<\rho, |\mathrm{Im}\,\tau|<r\}(r<R)$ と仮定しても一般性を失わない．（$\mathrm{Re}\,\tau$ 軸と $\mathrm{Im}\,\tau$ 軸の選び方ももちろん任意である．）さらに Ω をその固定した一点の近傍でおき換えることにより，ξ の錐状閉近傍 $\Gamma^\circ\subset\boldsymbol{R}^n$ で

$$\text{(4.3.10)}\qquad \mathrm{S.S.}\,f(x,\tau)\cap\Omega\times T'\times i(\Gamma^\circ\times\boldsymbol{R}^2)(dx,dt,ds)\infty=\phi$$

を満たすものが存在すると仮定できる．さて，$\tilde{f}(x,\tau)$ を定理 4.3.5 が与える $f(x,\tau)$ の $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ の元への拡張とすれば，

$$\text{(4.3.11)}\qquad f(x,\tau)=\tilde{f}(x,\tau)\underset{x}{*}W(x,\Gamma^\circ)|_{\Omega\times T}+\tilde{f}(x,\tau)\underset{x}{*}W(x,\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus\Gamma^\circ)|_{\Omega\times T}$$

となる．ここに $W(x,\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus\Gamma^\circ)$ は $\int_{\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus\Gamma^\circ}W(x,w)dw$ を表わしている．この第二項は明らかに $\Omega\times T$ 上到るところで ξ 方向にミクロ解析的である．第一項は積分を定義により書き下してみれば

$$F(z,\tau;\Gamma^\circ)=\int_{\boldsymbol{R}^n}\tilde{f}(w,\tau)W(z-w,\Gamma^\circ)dw$$

という $\mathcal{O}((\Omega+i\Gamma 0)\times T)$ の元の境界値となるが，仮定(4.3.10)により，この超函数は $\Omega\times T'$ において実解析的となり，従ってその定義函数 $F(z,\tau;\Gamma^\circ)$ は補題3.1.3により $\Omega\times T'$ の近傍に解析接続される．今 $y\in\Gamma$ をとれば，結局任意の $\delta>0$ に対して $\varepsilon>0$ を適当に選ぶとき，$F(z,\tau;\Gamma^\circ)$ は

$$(\Omega_\delta\times\{|\mathrm{Re}\,\tau|<\rho-\delta\}+i\{ty;0<t<\varepsilon\}\times\{|\mathrm{Im}\,\tau|<R-\delta\})$$

$$\cup\ (\Omega_\delta\times\{|\mathrm{Re}\,\tau|<\rho-\delta\}+i\{ty;-\varepsilon<t<\varepsilon\}\times\{|\mathrm{Im}\,\tau|<r-\delta\})$$

の近傍で正則となる．ここに $\Omega_\delta=\{x\in\Omega;\mathrm{dis}\,(x,\partial\Omega)>\delta\}$ である．この集合に局

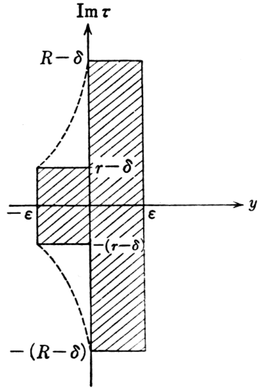


図 4.2

所型 Bochner の定理(定理 2.2.6)を適用すれば，$F(z,\tau;\Gamma^\circ)$ は

$$\Omega_{2\delta}\times\{|\mathrm{Re}\,\tau|<\rho-2\delta\}+i\{0\}\times\{|\mathrm{Im}\,\tau|<R-\delta\}$$

の近傍に解析接続できる．δ は任意だから，これは $F(z,\tau;\Gamma^\circ)$ の実解析性が $\Omega\times T$ まで伝播したことを示す．故に $f(x,\tau)$ は $\Omega\times T$ の上で ξ 方向にミクロ解析的となる．証了．

系 4.3.9　$f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ とし，開部分集合 $T'\subset T$ を上の定理のようなものとする．もし $f(x,\tau)|_{\Omega\times T'}$ が 0 (または実解析的) ならば，$f(x,\tau)$ は $\Omega\times T$ 全体で 0 (または実解析的) となる．

この解析接続の一意性は Taylor 展開の一意性から出たものではないことに注意せよ．

問 4.3.3　$\mathrm{Re}\,\lambda>0$ のとき $\boldsymbol{R}^3$ 上の局所可積分函数 $(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^\lambda$ は超函数として λ を正則パラメータとして含むことを示せ．また $\mathrm{Re}\,\lambda>1$ に対し等式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}\right)(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^\lambda = 2\lambda(2\lambda+1)(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^{\lambda-1}$$

を示し，これを用いてこの超函数を $\lambda\in \boldsymbol{C}\setminus\left\{-\dfrac{m+1}{2};\ m=1,2,\cdots\right\}$ に解析接続せよ．さらに S. S. $(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^\lambda$ を評価し，また $\lambda=-\dfrac{m+1}{2}$ における留数を計算せよ．超函数 $(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)_+{}^\lambda=|x|^{2\lambda}$ についても同様の考察を行なえ.

次に新しい超函数の作り方として更に強力な手法を与えよう．超函数というのは正則函数の境界値であったが，正則パラメータを含む超函数というのは見様によってはその境界値のとり方が不徹底なものとも思える．そこで正則パラメータに関して再び境界値をとることにより新しい超函数を作ることを考えよう.

定理 4.3.10 T は開区間 $]a,b[$ の複素上半近傍とし，$f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ とする．このとき $f(x,t+i0)$ という $n+1$ 変数の超函数が確定し，次の評価式を満たす.

(4.3.12) $\qquad \operatorname{supp} f(x,t+i0)\subset \overline{\operatorname{supp} f(x,\tau)}\cap\{\operatorname{Im}\tau=0\}$

また，球面 $\boldsymbol{S}^n=\{\xi dx+\theta dt;\xi^2+\theta^2=1\}$ の“南半球” $\{\theta\le 0\}$ の適当な近傍 V をとれば

(4.3.13) $\qquad$ S. S. $f(x,t+i0)\cap V$

$$\subset(\overline{\text{S. S. } f(x,\tau)}\cap\{\operatorname{Im}\tau=0\})\vee(\Omega\times]a,b[\times\{idt\infty\})$$

ここに $\vee$ は各繊維において，$\boldsymbol{S}^n$ の“赤道” $\{\theta=0\}$ 上の集合とみなされる第一因子と，“北極”に相当する第二因子との凸結合，すなわちそれらの点対を結ぶ短い方の大円弧の和集合を表わす．(従って特に $f(x,t+i0)$ は“開南半球” $\{\theta<0\}$ においては常にミクロ解析的となる.) 対応 $F(x,\tau)\mapsto f(x,t+i0)$ は境界 $\operatorname{Im}\tau=0$ に沿って局所的に定まる．$f(x,\tau)$ が正則パラメータ τ を含む超函数として境界の近傍まで延長できれば，$f(x,t+i0)$ はただの制限 $f(x,t)$ と一致する．下半近傍からの境界値 $f(x,t-i0)$ についても同様のことが成り立つ．(評価式 (4.3.13) において dt の係数の符号が逆転する.)

証明 まず $f(x,\tau)$ が x についてコンパクトな台を持つ場合を考える．$\boldsymbol{S}^{n-1}$ の閉多角錐 $\Gamma_j{}^\circ$，$j=1,\cdots,N$ による分割を選び

$$f_j(x,\tau)=f(x,\tau)\underset{x}{*}W(x,\Gamma_j{}^\circ)$$

とおく，これは

$$(4.3.14)\qquad F_j(z,\tau)=\int_{\mathbf{R}^n} f(w,\tau)W(z-w,\Gamma_j{}^\circ)dw\in\mathcal{O}((\mathbf{R}^n+i\Gamma_j0)\times T)$$

の境界値である：$f_j(x,\tau)=F_j(x+i\Gamma_j0,\tau)$．ここで $F_j(z,\tau)$ の正則域 $(\Omega+i\Gamma_j0)\times T$ は $\Omega\times]a,b[$ を刃とする $n+1$ 次元無限小楔 $\Omega\times]a,b[+i(\Gamma_j\times\{\mathrm{Im}\,\tau>0\})0$ の形をしており，従って z,τ について同時に境界値をとれば $\mathcal{B}(\Omega\times]a,b[)$ の元が得られる．これを $f_j(x,t+i0)$ とし

$$(4.3.15)\qquad f(x,t+i0)=\sum_{j=1}^{N}f_j(x,t+i0)$$

と定める．これは明らかに球面の分割の選び方によらない．また，この和は f の台の外では実解析函数の普通の和として 0 を与える．さらに，もし $f(x,\tau)$ が正則パラメータ τ を含む超函数として $\Omega\times]a,b[$ の近傍にまで延長できれば，各 $f_j(x,\tau)$ はそこで $s=\mathrm{Im}\,\tau$ を実解析パラメータとして含み，$f_j(x,t+i0)=f_j(x,\tau)|_{s=0}$ に他ならないことも明らかであろう．

次に一般の場合を考える．定理 4.3.5 により $f(x,\tau)$ を x につきコンパクトな台を持つものの局所有限和 $\sum_\lambda f_\lambda(x,\tau)$ に分解し，その各々について上に与えた定義(4.3.15)により境界値 $f_\lambda(x,t+i0)$ をとる．そうして再び総和をとり

$$f(x,t+i0)=\sum_\lambda f_\lambda(x,t+i0)$$

と定める．各項の台は上に注意したようにもとの分解成分の台に含まれるから，この和も局所有限和となり超函数が確定する．得られた超函数 $f(x,t+i0)$ が分解の仕方によらぬことは定理 1.3.10 の証明と同様にして示される．このことから，対応 $f(x,\tau)\mapsto f(x,t+i0)$ が境界 $\mathrm{Im}\,\tau=0$ に沿って局所的に定まること，および台の評価(4.3.12)が成り立つこともわかる．

最後に特異スペクトルの評価をしよう．そのためには $f(x,\tau)\in\mathcal{B}[\bar{\Omega}]\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ とし，次のことを示せば十分である：$f(x,\tau)$ が $\Omega\times T$ 内で $i\xi dx\infty$ 方向にミクロ解析的のとき，南半球の近傍 V が存在し $f(x,t+i0)$ は $\Omega\times]a,b[$ 内で $i(\xi dx+\theta dt)\infty\cap V$ 方向にミクロ解析的となる．($f(x,\tau)$ は τ を正則パラメータとして含むので，この仮定から任意の θ について $f(x,\tau)$ は $i(\xi dx+\theta dt)\infty$ 方向にミクロ解析的となっていることに注意せよ．) さて，ξ の閉多角錐状の近傍 $\Gamma_1{}^\circ$ をとり，必要なら考察中の領域を少し縮めることにより

$$\text{(4.3.16)} \qquad \text{S.S.}\, f(x,\tau) \cap (\Omega\times T\times i\Gamma_1{}^\circ dx\infty) = \phi$$

と仮定してもよい．$\Gamma_1{}^\circ$ を一成分とする球面の分割を選びそれを用いて $f(x,\tau)$ の境界値 $f(x,t+i0)$ を(4.3.14)-(4.3.15)により定義する．このとき，$f_j(x, t+i0)$, $j=2,\cdots,N$ はいずれも定義により任意の θ について $i(\xi dx+\theta dt)\infty$ 方向にミクロ解析的である．一方，$f_1(x,\tau)$ は仮定(4.3.16)により $\Omega\times T$ で実解析的となる．すなわち，$F_1(z,\tau)$ は $\Omega\times]a,b[+i(\{0\}\times\{\mathrm{Im}\,\tau>0\})0$ の近傍で正則である．柏原の補題(系2.2.7)によれば，このとき $F_1(z,\tau)$ は $\{0\}\times\{\mathrm{Im}\,\tau>0\}$ を含むある開凸錐 Δ の開きを持つ無限小楔において正則となる．故に局所型 Bochner の定理(系2.2.10)により結局

$$F_1(z,\tau)\in\mathcal{O}(\Omega\times]a,b[+i(\Gamma_1\times\{\mathrm{Im}\,\tau>0\}+\Delta)0)$$

となる．$V=\boldsymbol{S}^n\setminus\Delta^\circ$ は南半球の近傍であり，これより特に

$$\text{S.S.}\, f_1(x,t+i0)\cap V=\phi$$

となる．証了．

上の評価(4.3.13)において，南半球の近傍 V というのを省くことができれば(あるいは少くともそれを具体的に決定できれば)結果が綺麗になるのだが，それは不可能である．例えば，$\dfrac{1}{kx+\tau}$ は $\boldsymbol{R}\times\{\mathrm{Im}\,\tau>0\}$ 上の実解析函数であり，超函数として正則パラメータ τ を含んでいる．だが，この境界値 $\dfrac{1}{kx+t+i0}$ の特異スペクトルは明らかに点 $(0, i(kdx+dt)\infty)$ を含み，この方向成分は k を大きくすればいくらでも赤道に近づく．(注36)

境界値に関して次の諸公式が成り立つ．それらは諸々の定義から明らかであろう．

系 4.3.11　a)　$P(z,\tau,D_z,D_\tau)$ を正則な係数を持つ線型偏微分作用素とすれば

$$[P(x,\tau,D_x,D_\tau)f(x,\tau)]_{\tau\to t+i0} = P(x,t,D_x,D_t)f(x,t+i0)$$

b)　$f(x,\tau)$ が $\partial D\times T$ の近傍で実解析的ならば

$$\left[\int_D f(x,\tau)dx\right]_{\tau\to t+i0} = \int_D f(x,t+i0)dx$$

変数 x の一部に関する積分についても同様である．

例 4.3.12　$\dfrac{1}{x_1+ix_2}$ を局所可積分函数を経由せずにこの節の立場から超函数とみなしてみよう(問3.5.2参照)．$\dfrac{Y(\mp x_1)}{x_1+i\tau}$ はそれぞれ $\pm\mathrm{Im}\,\tau>0$ において正

則パラメータ τ を含む超函数として確定する．故にそれらの境界値をとることにより

$$\frac{1}{x_1+ix_2}=\left[\frac{Y(-x_1)}{x_1+i\tau}\right]_{\tau\to x_2+i0}+\left[\frac{Y(x_1)}{x_1+i\tau}\right]_{\tau\to x_2-i0} \tag{4.3.17}$$

と予想される．この等号はこの超函数が実解析的である $\boldsymbol{R}^2\setminus\{0\}$ の上では明らかだから，例えば $|x_1|\le\varepsilon$, $|x_2|\le\varepsilon$ で切断して積分 $\dfrac{1}{(2\pi i)^2}\displaystyle\int\frac{\varphi(x_1,x_2)}{x_1+ix_2}dx_1dx_2$ を両方の流儀で計算し比較してみればよい．さて，(4.3.17)の右辺の表現から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{1}{x_1+ix_2}\right)&=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{Y(-x_1)}{x_1+i\tau}\right)\right]_{\tau\to x_2+i0}\\&\quad+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{Y(x_1)}{x_1+i\tau}\right)\right]_{\tau\to x_2-i0}\\&=-\frac{\delta(x_1)}{2i(x_2+i0)}+\frac{\delta(x_1)}{2i(x_2-i0)}=\pi\delta(x)\end{aligned}$$

が確かめられる．これは同じ式の左辺で計算するよりもかなり見通しが良い．

問 4.3.4　等式(4.3.17)の証明を完成せよ．

最後に正則パラメータについて楔の刃定理の類似を示しておこう．

補題 4.3.13　$T_\pm$ を開区間 $]a,b[$ の複素上半および下半近傍とし，$f_\pm(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T_\pm)$ とする．$T=T_+\cup\,]a,b[\,\cup T_-$ とおき $\tau=t+is$ と書こう．このとき台が $\pm s\ge 0$ に含まれるような $f_\pm(x,\tau)$ のただの超函数としての延長 $\tilde{f}_\pm(x,t,s)$ で，$\Omega\times T$ において

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\partial}{\partial s}\right)\tilde{f}_\pm(x,t,s)=\pm\frac{i}{2}f_\pm(x,t\pm i0)\delta(s) \tag{4.3.18}$$

を満たすものが存在する．

証明　$Y(s)f_+(x,\tau+is)$ という x,τ,s の超函数を考えると，これは $x\in\Omega$, $\tau+is\in T_+$, $\operatorname{Im}\tau>0$ で定義され，しかも τ を正則パラメータとして含む．（ここでは s と $\operatorname{Im}\tau$ とは独立な変数である．）故に $\operatorname{Im}\tau\downarrow 0$ のときこれの境界値として x,t,s の超函数が定まる．それを $\tilde{f}_+(x,t,s)$ と書けば明らかに $\operatorname{supp}\tilde{f}_+\subset\{s\ge 0\}$ であり，$s>0$ では $\tilde{f}_+=f_+$，また系 4.3.11 と補題 3.4.12 により，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\partial}{\partial s}\right)\tilde{f}_+(x,t,s)=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+i\frac{\partial}{\partial s}\right)(Y(s)f_+(x,\tau+is))\right]_{\tau\to t+i0}$$

$$= \frac{i}{2}[\delta(s)f_+(x, \tau+is)]_{\tau\to t+i0}$$

$$= \frac{i}{2}\delta(s)[f_+(x, \tau)]_{\tau\to t+i0} = \frac{i}{2}f_+(x, t+i0)\delta(s)$$

となる．下側からの境界値についても同様である．証了．

定理 4.3.14　$T_\pm$ を開区間 $]a, b[$ の複素上半および下半近傍とし，$f_\pm(x, \tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T_\pm)$ とする．もし

(4.3.19)　$$f_+(x, t+i0) = f_-(x, t-i0)$$

ならば，$f_\pm(x, \tau)$ は $]a, b[$ の近傍で正則パラメータ τ を含む超函数としてつながる．特に，$f_+(x, t+i0)$ が 0（または実解析的）ならば，$f_+(x, \tau)$ 自身 0（または実解析的）である．

証明　前補題と同じ開集合 T を用いよう．$\tilde{f}_\pm(x, t, s)$ を上の補題が与える $f_\pm(x, \tau)$ の延長とし，$f(x, t, s)=\tilde{f}_+(x, t, s)+\tilde{f}_-(x, t, s)$ とおけば，$\Omega\times T$ の上で

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\partial}{\partial s}\right)f(x, t, s) = \frac{i}{2}f_+(x, t+i0)\delta(s)-\frac{i}{2}f_-(x, t-i0)\delta(s) = 0$$

が成り立つ．ここで(4.3.18)と(4.3.19)を用いたのは言うまでもない．故に $f(x, t, s)$ は求める接続である．

後半の主張を示すには，$f_-(x, \tau)$ として 0，あるいは境界値から延長された実解析函数をとる．前半の主張によりこれは $f_+(x, \tau)$ と正則パラメータを持つ超函数として一つにつながる．故に系 4.3.9 により下方の 0，あるいは実解析性が上方の $f_+(x, \tau)$ にも伝播する．証了．

この節を終えるに当って次のことを注意しておこう：Cauchy-Riemann の作用素 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ というのは偏微分方程式の非常に特殊な一例であるが，本節の内容は，この方程式の超函数解について，ミクロ解析性（定理 4.3.2），零点あるいは実解析性の伝播（系 4.3.9），ミクロ解析性の伝播（定理 4.3.8），境界値の存在とそのミクロ解析性（定理 4.3.10），境界における実解析性の反射（定理 4.3.14），基本解の存在（例 4.3.12）等の美しい結果が成り立つということを示している．偏微分方程式論ではこれらの結果を一つの範例として一般の作用素に拡張することを試みるのであるが，正則パラメータの重要性は単に偏微分方程式論の模型というだけでないことはもちろんである．それはあたかも正則函数という概念が一つの特殊な偏微分方程式系の解というだけでその有用

性を片付けられないと同様である．本章の残りの部分においても正則パラメータの概念はいくつかの重要な場面で応用を見るであろう．

§4 台が半空間に含まれる超函数

この節では台が半空間 $\{x_1 \geq 0\}$ に含まれる超函数の特異スペクトルの構造について二つの深い定理を証明する．まず，次の定理は偏微分方程式の解の一意性に関する古典的な Holmgren の定理の研究を通して発見されたため，**Holmgren 型の定理**と呼ばれる．

定理 4.4.1（柏原–河合） $f(x)$ は原点の近傍で定義された超函数とし

(4.4.1) $$0 \in \operatorname{supp} f \subset \{x_1 \geq 0\}$$

と仮定する．このとき $(0, \pm i dx_1 \infty) \in \mathrm{S.S.}\, f$ となる．

証明 背理法により，例えば $(0, i dx_1 \infty) \notin \mathrm{S.S.}\, f$ と $\operatorname{supp} f \subset \{x \geq 0\}$ とから $0 \notin \operatorname{supp} f$ を示そう．特異スペクトルに影響を与えず $x' = (x_2, \cdots, x_n)$ に関する台をコンパクトにするため，歴史的に有名な **Holmgren 変換**

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x'^2 \\ \tilde{x}' = x' \end{cases}$$

を用いる．新しい座標 $\tilde{x}$ については $\operatorname{supp} f$ は $\tilde{x}_1 \geq \varepsilon \tilde{x}'^2$ という回転放物面の内部に含まれる．この変換で原点の特異スペクトルは向きを変えないから，$\tilde{x}$ を改めて x と書き，初めからこの状態を仮定してもよい．さて，このとき球面 $\boldsymbol{S}^{n-2}$ の凸多角錐への分割 $\Gamma_j{}'^\circ$，$j=1, \cdots, N$ を選び

$$f_j(x) = f(x) \underset{x'}{*} W(x', \Gamma_j{}'^\circ) \underset{\text{定義}}{=} \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} f(x_1, y') W(x'-y', \Gamma_j{}'^\circ) dy'$$

とおこう．f の台は y' につきコンパクトになっているので積分は合法的である．明らかに $\operatorname{supp} f_j \subset \{x_1 \geq 0\}$ であり，また特異スペクトルの計算規則により

(4.4.2) $\mathrm{S.S.}\, f_j(x) \subset \{(x, i\xi dx \infty);\ \exists \xi' \in \Gamma_j{}'^\circ, 0 \leq \exists \lambda \leq 1$ について

$\xi = \pm \lambda \nu + (1-\lambda)(0, \xi')$，かつ $\exists y'$ について $(x_1, y', i\xi dx \infty) \in \mathrm{S.S.}\, f\}$

と評価される．ここに $\nu = (1, 0, \cdots, 0)$ とおいた．仮定により $\{x_1 = 0\} \times \{i dx_1 \infty\}$ が $\mathrm{S.S.}\, f$ と交わらないから，この評価より $\Gamma_j{}^\circ \cap \{\xi_1 = 0\} = \Gamma_j{}'^\circ$ を満たす n 次元閉凸錐 $\Gamma_j{}^\circ$ で，原点のある近傍 Ω において

$$\mathrm{S.S.}\, f_j|_{\Omega} \subset \Omega \times i\Gamma_j{}^\circ dx \infty$$

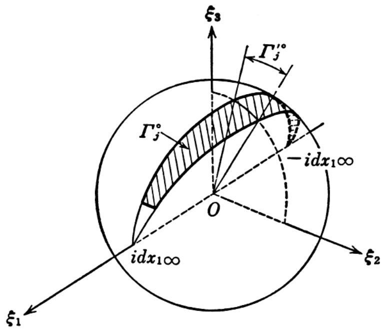


図 4.3

となるものが存在することがわかる(図 4.3 参照). 故に定理 3.1.7 により

(4.4.3) $$f_j(x) = F_j(x+i\Gamma_j 0)$$

と単項の境界値で表わされる. 一方, $x_1<0$ において $f_j(x)\equiv 0$ であったから, 補題 3.1.3 によりそこでは定義函数 $F_j(z)$ 自身 0 に等しい. 故に解析接続の一意性によりこの表示(4.4.3)が有効な限り $F_j(z)\equiv 0$, すなわち Ω において $f_j(x)\equiv 0$ となる. 以上のことは各 j につき成り立つから, 結局

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(x) = f(x) \underset{x'}{*} \delta(x') = f(x)$$

も原点のある近傍で 0 に等しい. 証了.

例 4.4.2 $Y(x_1)$ の台は $\{x_1\geq 0\}$ に含まれているから, 上の定理により $\{x_1=0\}\times\{\pm idx_1\infty\}$ は S. S. $Y(x_1)$ に含まれていなければならぬことがわかる. この例では S. S. $Y(x_1)$ は実際この下からの評価と一致する. また, $\delta(x)$ の台はあらゆる半空間 $\{x\xi\geq 0\}$ に含まれているから, S. S. $\delta(x)\supset\{0\}\times \boldsymbol{S}^{n-1}$ であることがこの定理からもわかる. もう少し一般に, 台が部分多様体 $N\subset \boldsymbol{R}^n$ に含まれる超函数 $f(x)$ については, $x^0\in\operatorname{supp} f$ なる点において N の余法線方向 ξ は必ず f の特異スペクトル方向に含まれなければならない. 実際, このような点 x^0 の近傍で適当な座標変換を行なうことにより N が接超平面 $(x-x^0)\xi=0$ の片側に来るようにできるからである.

問 4.4.1 注 15 参照.

次の定理は特異スペクトルと台の関係についてのより決定的な結果であり, 量子力学のいわゆる因果律の一つの数学的定式化でもある.

定理 4.4.3(西瓜割り定理) $\boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{S}^{n-1}$ の繊維に対する両極から赤道への射影を

$$p_{dx'}: iS_{\infty}^{*n-1} \setminus \{\pm i dx_1\infty\} \longrightarrow iS_{\infty}^{*n-2}$$
$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)dx\infty & \mapsto & i(\xi_2, \cdots, \xi_n)dx'\infty \end{array}$$

とおくとき，台が$\{x_1 \geq 0\}$に含まれる超函数$f(x)$の特異スペクトルの原点における繊維は次の構造を持つ：赤道上の閉集合Eが存在し

$$\mathrm{S.S.}\, f \cap \{0\} \times S^{n-1} = p_{dx'}{}^{-1}(E) \cup \{\pm i dx_1 \infty\}$$

すなわち，ちょうど西瓜を縦に割った一片のような形をしている．

証明 与えられた条件の下に，$(0, i\xi dx\infty) \notin \mathrm{S.S.}\, f$, $\xi' \neq 0$ から S.S. f がこの点を通る経線と交わらないこと，すなわち

$$\{0\} \times p_{dx'}{}^{-1}(i\xi' dx'\infty) \cap \mathrm{S.S.}\, f = \phi \tag{4.4.4}$$

を示せばよい．ここで

$$p_{dx'}{}^{-1}(i\xi' dx'\infty) = \{i(\pm\lambda dx_1 + (1-\lambda)\xi' dx')\infty \ ; \ 0 \leq \lambda < 1\}$$

であることに注意せよ．証明は長いので段階に分けて行なう．

第一段 ξを通る緯線が抜けていると仮定しても一般性を失わぬことを示す．fの台を原点の近傍に切断したものを$\tilde{f}$とし，$\xi' \in S^{n-2}$の近傍Δ'°を十分小さく選んで

$$\tilde{f} = \tilde{f} \underset{x'}{*} W(x', \Delta'^{\circ}) + \tilde{f} \underset{x'}{*} W(x', S^{n-2} \setminus \Delta'^{\circ})$$

と分解する．第一項の特異スペクトルは(4.4.2)式と同様に評価され，従って$(0, i\xi dx\infty) \notin \mathrm{S.S.}\, f$という仮定により$\xi$を通る緯線

$$\{(0, i\eta dx\infty) \ ; \ \eta_1/|\eta'| = \xi_1/|\xi'|\}$$

と共通部分を持たないと考えてよい．第二項の特異スペクトルも同様に評価され，こちらは初めから問題の経線と交わっていない．故にこの第一項について証明を継続すればよい．

第二段注16) 1本の緯線が抜けていれば実は赤道が抜けることを示す．ここでは簡単のため Bony 型の曲面 Radon 分解(4.2.10)：

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \int_{S^{n-1}} \frac{1 + ix\omega}{(x\omega + ix^2 + i0)^n} d\omega = \int_{S^{n-1}} B(x, \omega) d\omega$$

を用いよう．ここでωの長さが1であったことを忘れ，この分解成分において$x \mapsto z$, $\omega \mapsto \zeta$という単純なおき換えを行なったものを$B(z, \zeta)$と書くことにする．今，fの台を再びコンパクトにしておき

$$(4.4.5)\qquad \Phi(X_1, x', \zeta_1, \xi') = \int_{R^n} f(t) B(-X_1{}^2 - t_1, x'-t', \zeta_1, \xi')dt$$

という超函数を考えよう．f の台の条件より実質的な積分領域において $-(X_1{}^2+t_1)\leq 0$ であるので，これは $\xi' \neq 0$ のとき $\mathrm{Im}\,\zeta_1<0$ において ζ_1 を正則パラメータとして含む超函数となる．実際，$f(t)$ の境界値表示 $\sum_{j=1}^{N} F_j(t+i\Gamma_j 0)$ を選び，上の積分を $\mathrm{supp}\, f$ に十分近い複素積分路の上で

$$(4.4.6)\qquad \int_{\gamma_j} F_j(\tau) B(-X_1{}^2-\tau_1, z'-\tau', \zeta_1, \xi')d\tau$$

と具体的に書き表わしてみよう．ここに $z'=x'+iy'$，$\tau=t+is$, $\zeta_1=\xi_1+i\eta_1$ である．X_1 および ξ' は実解析パラメータとして含まれることが明らかなので議論を簡単にするため実変数のままにとどめた．これは柏原の補題（系 2.2.7）により正当となる．さて，(4.4.6)の被積分函数において第二因子の分母の因子は

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\{(-X_1{}^2-\tau_1)\zeta_1+(z'-\tau')\xi'+i((-X_1{}^2-\tau_1)^2+(z'-\tau')^2)\}\\ &= -(X_1{}^2+t_1)\eta_1 - s_1\xi_1+(y'-s')\xi'+(X_1{}^2+t_1)^2-s_1{}^2+(x'-t')^2-(y'-s')^2\end{aligned}$$

という虚部を持ち，これは

$$(y'-s')\xi' > s_1{}^2+|s_1\xi_1|+(y'-s')^2+t_1\eta_1$$

において正となる．しかるに，$y'\xi'>y'^2$ ならば，積分路 γ_j を実軸の $\{t_1\geq 0\}$ の部分に十分近づけるとき，この不等式は満たされる．実際，積分路を実軸に近づけることは s を小さくすることを意味し，また $\eta_1<0$ なので $t_1<0$ のときにのみ t_1 の絶対値が小さければよい．故に積分(4.4.6)は ζ_1 につき $\mathrm{Im}\,\zeta_1<0$ で，また z' につき開き $\{y'\xi'>0\}$ の無限小楔で正則となり，その z' に関する境界値を j について加え合わせたものは $\mathrm{Im}\,\zeta_1<0$ なる ζ_1 を正則パラメータとして含む超函数(4.4.5)を与える．

一方

$$(4.4.7)\qquad f(x) \underset{x}{*} B(x, \xi) = \int_{R^n} f(t) B(x-t, \xi)dt$$

という超函数を考えてみよう．核 $B(x, \xi)$ は $W(x, \xi)$ と同様のミクロ解析性を持つので，この超函数は $\xi' \neq 0$ において明らかに x_1 を実解析パラメータとして含む．故に

$$\Psi(X_1, x', \xi) = f \underset{x}{*} B|_{x_1=-X_1{}^2} = \int_{R^n} f(t)B(-X_1{}^2-t_1, x'-t', \xi)dt$$

という代入が可能である．第二段の仮定により S. S. f は $(0, i\xi dx\infty)$ を通る緯線と交わらないので，特異スペクトルの計算規則により超函数(4. 4. 7)は x, ξ につきこの緯線 $x=0, \xi_1/|\xi'|=c$ の近傍で実解析的となる．(ただし，ここでは ξ の長さは 1 である必要はない．) 故に $\Psi(X_1, x', \xi)$ ももちろん $X_1=x'=0$, $\xi_1/|\xi'|=c$ の近傍で実解析的となる．ところで，$\Psi(X_1, x', \xi)$ は超函数 $\Phi(X_1, x', \zeta_1, \xi')$ から正則パラメータ ζ_1 について境界値 $\zeta_1 \mapsto \xi_1 - i0$ をとったものに等しい．これは，Φ を定義した積分(4. 4. 6)と Ψ の定義とから明らかであろう．さて，$\Phi(X_1, x', \xi_1-i0, \xi')$ が $X_1=x'=0$, $\xi_1/|\xi'|=c$ の近傍で実解析的ということから，定理 4. 3. 14 により $\Phi(X_1, x', \zeta_1, \xi')$ 自身この境界 $\mathrm{Im}\,\zeta_1=0$ の近傍で実解析的となるが，更に系 4. 3. 9 によればこの実解析性は ζ_1 について伝播し，従って $\Phi(X_1, x', \zeta_1, \xi')$ は $X_1=x'=0$ の近傍で到るところ実解析的となる．これから再び境界値に戻れば，定理 4. 3. 10 の評価により $\Psi(X_1, x', \xi)=\Phi(X_1, x', \xi_1-i0, \xi')$ は少くとも繊維 $\boldsymbol{S}^{2n-1}$ の赤道 $d\xi_1=0$ の近傍では X_1, x', ξ につきミクロ解析的となることがわかる．故に $\boldsymbol{S}^{n-1}$ の赤道 $\xi_1=0$ の近傍 E を適当に選び，これを ξ につき積分したもの

$$g(X_1, x') = \int_E \Phi(X_1, x', \xi)d\xi \tag{4. 4. 8}$$

は X_1, x' の実解析函数となることがわかる．(実際，上の条件は $d\xi_1$ の係数が消えるときは $dX_1, dx', d\xi'$ の係数もすべて消えることを意味するから，ξ_1 について積分を実行したとき残る特異スペクトル方向は無い．この評価は厳密には，$\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の局所座標を用いてやる必要があるが，結論は同じなので詳細は練習問題とする．)

函数(4. 4. 8)は明らかに X_1 に関して偶であり，従って $g(\sqrt{-x_1}, x')$ という実解析函数が確定する．一方，$x_1<0$ に対しては実解析函数の意味で最初から

$$\Phi(\sqrt{-x_1},\ x', \xi) = f(x) \underset{x}{*} B(x, \xi)$$

となっている．故に実解析パラメータ x_1 を持つ二つの超函数 $\int_E f(x) \underset{x}{*} B(x, \xi) d\xi$ と $g(\sqrt{-x_1}, x')$ とは $x_1<0$ において一致する．それらの差に Holmgren 型の

定理 4.4.1 を対偶の形で適用すれば，両者は原点の近傍で一致しなければならず，従って $\int_E f(x) \underset{x}{*} B(x, \xi)d\xi$ 自身原点の近傍で実解析的となることがわかる．故に

$$f(x) = \int_{S^{n-1}\setminus E} f(x) \underset{x}{*} B(x, \xi)d\xi + \int_E f(x) \underset{x}{*} B(x, \xi)d\xi$$

は E の内部でミクロ解析的となり，赤道が S. S. f から抜けることが示された．

第三段　赤道が抜けたら両極以外すべて抜けることを示す．S. S. f の原点における繊維が赤道 $dx_1=0$ と交わらないことから，y_1 軸の正の部分を含む錐 Γ を適当に選べば，原点のある近傍 Ω において

$$\text{S. S. } f|_\Omega \subset \Omega \times i(\Gamma^\circ \cup -\Gamma^\circ)dx\infty$$

となる．故に定理 3.2.3 により (必要なら Ω, Γ を少し縮めれば)

$$f(x) = F_+(x+i\Gamma 0) - F_-(x-i\Gamma 0) \tag{4.4.9}$$

という境界値表示を持つ．しかも $\operatorname{supp} f \subset \{x_1 \geq 0\}$ だから，$F_\pm(z)$ は $x_1<0$ において系 3.1.11 により正則函数としてつながっている．この共通の正則函数

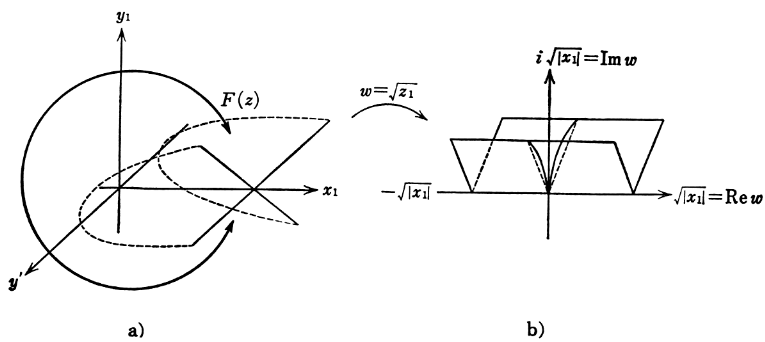


図 4.4

を $F(z)$ と記すことにすれば，$F(z)$ の正則域は図 4.4 a) のようになっている．そこで今 $w=\sqrt{z_1}$ という変換を導入し，

$$G(w, z') = F(w^2, z')$$

という正則函数を考えると，この正則域は図 4.4 b) のようになっており，特に

$$\{|\mathrm{Re}\, w|<\delta\} \times \{|x'|<a\} + i\{0<\mathrm{Im}\, w<\delta,\ y'=0\}$$

という形の集合を含む．故に柏原の補題 (系 2.2.7) により $G(w, z')$ はある楔：

$$\{|\mathrm{Re}\, w|<\delta'\}\times\{|x'|<a'\}+i\{c|y'|<\mathrm{Im}\, w<\delta'\}$$

まで正則に延長される．逆変換で元に戻ったとき，これが $F(z)$ の如何なる延長に対応するかを調べよう．

$$\mathrm{Re}\, w=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}+x_1)},\quad \mathrm{Im}\, w=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}-x_1)}$$

であり，一方

$$\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}-x_1=\frac{|y_1|^2}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}+x_1}\geq\frac{1}{\sqrt{2}+1}|y_1|,\qquad x_1\leq|y_1|\text{ のとき}$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{2}+1}\frac{|y_1|}{x_1}|y_1|,\qquad x_1\geq|y_1|\text{ のとき}$$

従って

$$\mathrm{Im}\, w\geq\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}}\min\left\{\sqrt{|y_1|},\ \frac{|y_1|}{\sqrt{x_1}}\right\}$$

であるから，結局 $F(z)=G(\sqrt{z_1}, z')$ は

$$\left\{c|y'|<\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}}\sqrt{|y_1|}<\delta'\right\}\cap\left\{c|y'|<\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}}\frac{|y_1|}{\sqrt{x_1}}<\delta'\right\}$$

において正則となる．この二つの集合のうち第一のものは半空間 $\{\pm y_1>0\}$ の開きを持つ無限小楔の和であり，また第二のものは全体としては半空間 $\{\pm y_1>0\}$ の開きを持たないけれども，その開きは $x_1\to 0$ とともに限りなくこれらの半空間に近づく．故に，このような領域における正則函数の境界値として得られる超函数(4.4.9)の特異スペクトルは，原点上の繊維で見る限り $\{\pm idx_1\infty\}$ の二方向のみとなる．以上を合わせると西瓜割り定理の証明が完了した．

例 4.4.4　$\boldsymbol{R}^n$ 内の円錐 $x_1\geq|x'|$ に台を持つ超函数 $f(x)$ を考える．$0\in\mathrm{supp}\, f$ とすれば，S. S. f の原点における繊維は $\boldsymbol{S}^{n-1}$ 全体となることが，この節の二つの定理から結論される．実際，この円錐は $\xi_1\geq|\xi'|$ を満たす各ベクトル ξ について半空間 $x\xi\geq 0$ に含まれるから，まず Holmgren 型の定理により $|\xi_1|\geq|\xi'|$ という方向が S. S. f の原点上の繊維に含まれなければならない．しかるに西瓜割り定理により，この情報から実は $\boldsymbol{S}^{n-1}$ が埋め尽されることが知られるのである．

補遺　注 17 参照．

参考 4.5　注 18 参照．

§5　台が超曲面に含まれる超函数

この節では台が実解析的超曲面に含まれる超函数の局所的構造を調べる．同様の考察は台が次元のもっと低い部分多様体に含まれる場合も可能である．座標変換により超曲面を $x_1=0$ としても一般性を失わない．

定理 4.5.1　$\Omega'\subset \boldsymbol{R}^{n-1}$ を開集合とし $\Omega=\{0\}\times\Omega'$ とおく．また $T\subset \boldsymbol{C}$ を原点の複素近傍とする．Ω の近傍で定義され台が Ω に(すなわち $x_1=0$ に)含まれるような n 変数超函数の全体を $\mathscr{B}[\Omega]$ と書くとき，次の同型が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{B}[\Omega] & \cong & '\mathscr{B}\mathscr{O}(\Omega'\times(T\setminus\{0\}))/'\mathscr{B}\mathscr{O}(\Omega'\times T) \\ \Psi & & \Psi \end{array}$$

$$f(x)\longmapsto f(x';\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{R}}\frac{f(x)}{x_1-\tau}dx_1 \tag{4.5.1}$$

ここに $x'=(x_2,\cdots,x_n)$ および τ の超函数で，τ を正則パラメータとして含むものを $'\mathscr{B}\mathscr{O}$ と書いた．この逆の対応は

$$f(x)=f(x';x_1+i0)-f(x';x_1-i0) \tag{4.5.2}$$

で与えられる．

証明　積分(4.5.1)が正則パラメータ $\tau\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ を含む $\Omega'\times(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})$ 上の超函数を与えることは明らかである．また(4.5.2)により右辺から左辺への写像が確定することも明らかである．この写像は定理 4.3.14 により一対一でもある．故に写像(4.5.1)と(4.5.2)を続けて行なえばもとに戻ることを示せば証明が完了する．このため

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j 0) \tag{4.5.3}$$

という表示をとろう．ここで supp f の条件より $F_j(z)$ は $x_1\neq 0$ に実解析的に延長できるとしてよい．この表示を用いて積分(4.5.1)を計算すれば

$$f(x';\tau)=\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F_j(z_1,z')}{z_1-\tau}\right]_{z'\to x'+i\Gamma_j'0} \tag{4.5.4}$$

となる．ここに γ_j は，例えば $-\varepsilon$ から ε に到る積分路であり，両端を除きその上の点 z_1 に対し $z=(z_1,z')\in\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_j 0$ となっているものである．Γ_j' はもちろん Γ_j の y' 座標面への射影像である．

この式から正則パラメータの境界値の定義により

$$f(x';t+i0)-f(x';t-i0)$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F_j(z_1, z')}{z_1-\tau}dz_1\right]_{(z',\tau)\to(x',t)+i(\Gamma_j'\times R^+)0}$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F_j(z_1, z')}{z_1-\tau}dz_1\right]_{(z',\tau)\to(x',t)+i(\Gamma_j'\times R^-)0}$$

であることがわかるが，これは積分の定義により

$$\int_{R} f(x_1, x')\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x_1-t-i0}-\frac{1}{x_1-t+i0}\right)dx_1$$
$$=\int_{R} f(x_1, x')\delta(t-x_1)dx_1 = f(t, x')$$

に等しい．証了.

系 4.5.2　$K'\subset \boldsymbol{R}^{n-1}$ をコンパクト集合とし，$K=\{0\}\times K'$ とおく．また $T\subset \boldsymbol{C}$ を原点の複素近傍とする．n 変数の超函数で台が K に含まれるものの全体 $\mathcal{B}[K]$ に対し，上の定理の同型は次の Fréchet 空間としての同型を誘導する.

$$\mathcal{B}[K] \cong {}'\mathcal{B}[K']\hat{\otimes}\mathcal{O}(T\setminus\{0\})/{}'\mathcal{B}[K']\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)$$

$$\begin{array}{c}\text{⋓}\qquad\qquad\qquad\text{⋓}\end{array}$$

(4.5.5)　$$f(x)\longmapsto f(x';\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{R}\frac{f(x)}{x_1-\tau}dx_1$$

ここで一般に $n-1$ 変数 x' の超函数の空間を表わすのに，区別のため ${}'\mathcal{B}$ という記号を用いている.

証明　写像(4.5.5)が確定することは台を調べれば明らかである．これに対する逆写像(4.5.2)もやはり台を保存する．故に上は代数的同型である．一方

$$\int_{R^{n-1}} f(x';\tau)W(z'-x', \overline{\Gamma_{\sigma'}})dx' = \frac{1}{2\pi i}\int_{R^n} f(x)\frac{W(z'-x', \overline{\Gamma_{\sigma'}})}{x_1-\tau}dx$$

だから，対応(4.5.5)は定理4.3.4の位相の定義により連続である．逆対応(4.5.2)が連続なことも補題4.1.2からわかる．それから特にその核 ${}'\mathcal{B}[K']\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ が閉部分空間となることもわかる．(このことは最大値原理を用いて直接確かめることもできる.) 証了.

定理 4.5.3　$K'\subset \boldsymbol{R}^{n-1}$ をコンパクト集合とし $K=\{0\}\times K'$ とおく．$f(x)\in\mathcal{B}[K]$ は次のように $\mathcal{B}[K]$ において収束する級数に展開される:

(4.5.6)　$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x')\delta^{(k)}(x_1),$$

(4.5.7)　$$f_k(x') = (-1)^k k!\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k} f(x)dx_1 \in {}'\mathcal{B}[K']$$

$'\mathcal{B}[K']$の位相を定める一組のセミノルム系を$\|\cdot\|_l$, $l=1,2,\cdots$とすれば，上の係数は

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!\|f_k(x')\|_l} = 0, \qquad l = 1,2,\cdots \tag{4.5.8}$$

を満たす．逆にこの条件を満たす係数 $f_k(x')$ を用いて和(4.5.6)を作れば，これは $\mathcal{B}[K]$において収束し，与えられた展開係数 $f_k(x')$ を持つ元 $f(x)\in\mathcal{B}[K]$ を定める．

証明　$\mathcal{B}[K]$を系4.5.2により位相も込めて $'\mathcal{B}[K']\hat{\otimes}\mathcal{O}(T\setminus\{0\})/'\mathcal{B}[K']\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ と同一視すれば，$f(x)$ に対応する元 $f(x';\tau)$ は

$$f(x';\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(x')}{\tau^{k+1}} \qquad \mathrm{mod}\ \ '\mathcal{B}[K']\hat{\otimes}\mathcal{O}(T)$$

と位相の意味で展開される．ここに

$$g_k(x') = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\tau|=\varepsilon} f(x';\tau)\tau^k d\tau = \sum_{\sigma'} F_{\sigma',k}(x'+i\Gamma_{\sigma'}0)$$

$$F_{\sigma',k}(z') = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\tau|=\varepsilon} F_{\sigma'}(z';\tau)\tau^k d\tau$$

であり，$F_{\sigma'}(z';\tau)$ は(4.3.6)により $f(x';\tau)$ から定まる正則函数である．級数の非負冪の部分は分母に入るので省略した．この展開を系4.5.2の同型でもとに戻れば，系4.3.11に鑑み(4.5.6)-(4.5.7)が得られる．ただし両展開の係数は

$$f_k(x') = (-2\pi i)\frac{(-1)^k}{k!} g_k(x')$$

という対応になっている．さて，$U_{\sigma'}{}^{K'}$ を(4.1.1)で定義された開集合の $n-1$ 次元版とする．この開集合を内側から近似するコンパクト集合の列 $L_{\sigma',l}$, $l=1,2,\cdots$ を選び，$'\mathcal{B}[K']$のセミノルム系として

$$\|\{F_{\sigma'}(z')\}\|_l = \max_{\sigma'} \sup_{z'\in L_{\sigma',l}} |F_{\sigma'}(z')|, \qquad l = 1,2,\cdots$$

から誘導されるものを採用することにすれば，

$$\|g_k(x')\|_l \le \max_{\sigma'} \sup_{z'\in L_{\sigma',l}, |\tau|=\varepsilon} |F_{\sigma'}(z';\tau)|\varepsilon^{k+1} \le C_\varepsilon \varepsilon^{k+1}$$

となる．ここに C_ε は ε に応じて定まる定数を表わす．故に

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!\|f_k(x')\|_l} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{2\pi\|g_k(x')\|_l} \le \varepsilon$$

となる．$\varepsilon>0$ は任意に選べるから，これより(4.5.8)が得られる．

逆に(4.5.8)を満たす係数 $f_k(x')$ が勝手に与えられたとせよ．

$$F_{k,\sigma'}(z')=\int_{R^{n-1}}f_k(x')W(z'-x',\overline{\Gamma_{\sigma'}})dx'$$

は上で用いたセミノルム系について任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$\|\{F_{k,\sigma'}(z')\}\|_l\leq C_\varepsilon\varepsilon^k/k!$$

を満たしていると仮定してよい．ここに C_ε は ε(及び l) に依存する定数である．この評価から，級数

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k!\,\frac{F_{k,\sigma'}(z')}{\tau^{k+1}}$$

が $U_{\sigma'}{}^{K'}\times\{|\tau|>0\}$ において広義一様収束することがわかる．この級数の和として得られる正則函数の組 $\{F_{\sigma'}(z';\tau)\}$ が同型 $\mathcal{B}[K]\cong{}'\mathcal{B}[K']\hat{\otimes}\mathcal{O}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})/{}'\mathcal{B}[K']\hat{\otimes}\mathcal{O}(\boldsymbol{C})$ を介して求める超函数 $f(x)\in\mathcal{B}[K]$ を与えることは明らかである．証了．

系 4.5.4　$\Omega'\subset\boldsymbol{R}^{n-1}$ を開集合とし，$\Omega=\{0\}\times\Omega'$ とする．$f(x)\in\mathcal{B}[\Omega]$ に対し積分(4.5.7)で定まる係数 $f_k(x')$ を持つ形式的級数(4.5.6)が確定する．対応 $f(x)\mapsto f_k(x')$ は x' について局所的である．逆に，Ω' を有界とし係数 $f_k(x')\in{}'\mathcal{B}(\Omega')$, $k=0,1,2,\cdots$ を勝手に与えたとき，(4.5.6)を形式的級数展開とする $f(x)\in\mathcal{B}[\Omega]$が存在する．ただし級数(4.5.6)の係数 $f_k(x')$ がすべて0でも，もとの超函数 $f(x)$ は0とは限らず，従ってこの形式的展開はもとの超函数の忠実な表現ではない．

証明　前半は台がコンパクトの場合と同様，${}'\mathcal{B}\mathcal{O}(\Omega'\times T)$ の元の Laurent 展開を翻訳したものにすぎない．一般に Laurent 展開の係数が超函数自身を決定できないことから，展開(4.5.6)の一意性も一般には成り立たぬことがわかる．(具体的な反例は参考3.3の $f(x,\tau)$ を用いて $f(x,1/\tau)$ ととれば得られる．)

逆に，$f_k(x')\in{}'\mathcal{B}(\Omega')$, $k=0,1,2,\cdots$ が与えられたとき，まず Ω' を有界と仮定してこれらをまず任意の方法で $\tilde{f}_k(x')\in{}'\mathcal{B}[\overline{\Omega'}]$ に延長する．次に稠密部分集合 ${}'\mathcal{B}[\partial\Omega']$ の元を調節することにより，この延長は

$$\|\tilde{f}_k(x')\|_k\leq\frac{1}{k^k k!}$$

を満たしていると仮定できる．ここに $\|\cdot\|_l$ は前定理で用いたセミノルム系であり，従って $l\leq l'$ のとき $\|f\|_l\leq\|f\|_{l'}$ となっている．故に，任意の l について

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k!\|\tilde{f}_k(x')\|_l} \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k!\|\tilde{f}_k(x')\|_k} \le \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$$

となるから，前定理により

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k(x')\delta^{(k)}(x_1) \in \mathcal{B}[\bar{\Omega}]$$

が確定する．この $f(x)$ を Ω の近傍で考えたものは明らかに題意を満たす．

最後に，一般の Ω' の場合には，x' 空間の適当な座標変換（例えば $\tilde{x}'=x'/\sqrt{1+x'^2}$ など）で Ω' が有界な場合に帰着することができる[注19]．証了．

次に台が超曲面に含まれるような超函数が現われる状況を二,三考察しておこう．

補題 4.5.5　方程式 $x_1{}^m u(x)=0$ の超函数解は $x_1=0$ に台を持つ超函数のうちで

(4.5.9)
$$\sum_{k=0}^{m-1} u_k(x')\delta^{(k)}(x_1)$$

の形のもの全体である．

証明　まず因子 $x_1{}^m$ は $x_1\neq 0$ では可逆なので，$u(x)$ の台は $x_1=0$ に含まれると仮定してよいことに注意せよ．故に定理 4.5.1 の同型によりこの方程式を $'\mathcal{BO}(\Omega'\times(T\setminus\{0\}))/'\mathcal{BO}(\Omega'\times T)$ に移せば，系 4.3.11 に鑑み

$$\tau^m u(x';\tau) \in {}'\mathcal{BO}(\Omega'\times T)$$

という式と同値になる．この元を $v(x';\tau)$ とおけば，Taylor 展開により

$$v(x';\tau) = \sum_{k=0}^{m-1} v_k(x')\tau^k + \tau^m v_m(x';\tau)$$

と書ける．ここに $v_m(x';\tau)\in{}'\mathcal{BO}(\Omega'\times T)$ である．故に $\tau^m u(x';\tau)=v(x';\tau)$ を τ^m で割り算することにより

$$u(x';\tau) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{v_{m-k-1}(x')}{\tau^{k+1}} + v_m(x';\tau)$$

という等式が $\Omega'\times(T\setminus\{0\})$ において成り立つ．これから τ に関する境界値に移れば，(4.5.9)の形の元が得られることは明らかである．逆も同様である．証了．

補題 4.5.6　$g(x)$ を与えられた超函数とするとき，方程式 $x_1{}^m u(x)=f(x)$ は u につき常に解ける．もし f の台が $x_1=0$ に含まれていれば，この解は

$$\int_{\boldsymbol{R}} x_1{}^k u(x)dx_1 = 0, \qquad k=0,\cdots,m-1 \tag{4.5.10}$$

なる付帯条件の下に局所的にも一意となる.

証明　まず $f(x)/x_1{}^m$ は $x_1 \neq 0$ なるところでは一意に定まることに注意せよ. これを $\mathcal{B}$ の脆弱性を用いて $x_1=0$ の上にも延長したものを $v(x)$ とすれば,

$$\operatorname{supp}(f(x)-x_1{}^m v(x)) \subset \{x_1=0\}$$

となる. 故にこのような元に対して $x_1{}^m w=f-x_1{}^m v$ が解 w を持てば, $u=v+w$ はもとの方程式の一つの解となる.

そこで $\operatorname{supp} f \subset \{x_1=0\}$, $f \in \mathcal{B}[\{0\}\times\Omega']$ とし, 定理 4.5.1 の同型により与えられた方程式と同値な式

$$\tau^m u(x';\tau)-f(x';\tau) \in {}'\mathcal{B}\mathcal{O}(\Omega'\times T)$$

を考える. この元を $g(x';\tau)$ とおけば

$$u(x';\tau) = \frac{f(x';\tau)}{\tau^m}+\frac{g(x';\tau)}{\tau^m} = \frac{f(x';\tau)}{\tau^m}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{g_k(x')}{\tau^{k+1}}+g_m(x';\tau) \tag{4.5.11}$$

となる. ここに $g_m(x';\tau) \in {}'\mathcal{B}\mathcal{O}(\Omega'\times T)$ は Taylor の定理の剰余項である. 故に定理 4.5.1 の同型で $f(x';\tau)/\tau^m$ に対応する超函数 $u(x)$ が一つの解である. この場合の解の不定性は(4.5.11)式の右辺第二項より生ずるもので, 従って(4.5.9)の形をしているが, これは条件(4.5.10)を課すことにより一意に決定される. 証了.

系 4.5.7　$\Omega' \subset \boldsymbol{R}^{n-1}$ を開集合とし $\Omega=\{0\}\times\Omega'$ とする. (4.5.10)を満たす $\mathcal{B}[\Omega]$ の元の全体を $\mathcal{B}_{(m)}[\Omega]$ で, また(4.5.9)の形の $\mathcal{B}[\Omega]$ の元の全体を $\mathcal{B}^{(m)}[\Omega]$ で表わせば,

$$\mathcal{B}[\Omega] = \mathcal{B}_{(m)}[\Omega] \oplus \mathcal{B}^{(m)}[\Omega] \tag{4.5.12}$$

と直和に分解され, 掛け算作用素 $x_1{}^m$ は同型

$$x_1{}^m\colon\ \mathcal{B}_{(m)}[\Omega] \simeq \mathcal{B}[\Omega]$$

を引き起こす. コンパクト集合 $K' \subset \boldsymbol{R}^{n-1}$, および $K=\{0\}\times K'$ に対しては, 同様の分解

$$\mathcal{B}[K] = \mathcal{B}_{(m)}[K] \oplus \mathcal{B}^{(m)}[K]$$

$$x_1{}^m\colon\ \mathcal{B}_{(m)}[K] \simeq \mathcal{B}[K]$$

は位相の意味でも成り立つ.

$f\in\mathcal{B}[\Omega]$に対し分解(4.5.12)は

$$f=\left(f-\sum_{k=0}^{m-1}f_k(x')\delta^{(k)}(x_1)\right)+\sum_{k=0}^{m-1}f_k(x')\delta^{(k)}(x_1)$$

により達成される．ここに $f_k(x)=(-1)^k k!\int_R x_1{}^k f(x)dx_1$ は形式的展開(4.5.6)の係数と同じものである．その他の主張は容易に確かめられる．

問 4.5.1 $\varphi_k(x)$, $k=1,\cdots,N$ を $\varphi_k(x)=0$ のとき $d\varphi_k(x)\neq 0$ を満たす実解析函数とするとき，方程式 $\varphi_1(x)\cdots\varphi_N(x)u(x)=f(x)$ は任意の超函数 $f(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対し超函数解 $u(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ を有する．

・**問 4.5.2** $L\subset \boldsymbol{R}^n$ をコンパクト集合，$K=L\cap\{x_1=0\}$ とし，K を $\boldsymbol{R}^{n-1}$ のコンパクト集合と考えたものを K' と書く．$\mathcal{B}^{(m)}[K]$に $\mathcal{B}[K],\mathcal{B}[L]$ から誘導される位相は，ともに(4.5.9)の係数の収束位相 $('\mathcal{B}[K'])^m$ と一致する．

参考 4.6 この他に台が超曲面に含まれる超函数の現われる大切な場として偏微分方程式の境界値問題がある．注 20 参照．

§6 ミクロ函数

一変数のときに行なったように，超函数の特異部分を効率的に取り出して議論する目的でいくつかの商層を導入しよう．まず

定理 4.6.1 商層 $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ は脆弱層となり，開集合 Ω に対し

(4.6.1) $$\mathcal{B}/\mathcal{A}(\Omega)=\mathcal{B}(\Omega)/\mathcal{A}(\Omega)$$

が成り立つ．(すなわち，mod $\mathcal{A}$ で考える際，いつでも考えている領域全体の上で大域的に，超函数の中から代表元を選ぶことができるのである．)

$\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の脆弱性の直接証明は $\mathcal{B}$ の脆弱性の証明よりも易しいが，後者と(4.6.1)式とを用いれば前者が出る，という関係にもなっている．実際，$\bar{f}\in\mathcal{B}/\mathcal{A}(\Omega)$ に対しその代表元 $f\in\mathcal{B}(\Omega)$ を選んでそれを全空間に延長すれば，その延長されたもの $\tilde{f}$ を $\mathcal{A}$ を法として考えたものが $\bar{f}$ の延長となる．

(4.6.1)の証明は本書後半に与える．実は(4.6.1)は実解析多様体上の“大きい”開集合 Ω に対しても一般に正しい．ここで使うのは $\boldsymbol{R}^n$ および $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ であるが，本書後半で与えられる証明はもちろんこれらの場合を含んでいる．

商層 $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ を用いる利点は，台を保たないが特異台を保つような作用素を局所的な作用素として考察できる点にある．例えば $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数 $(x_1{}^2+\cdots+$

$x_n^2)_+^\lambda$ による畳み込みは $\mathscr{B}$ には層準同型としては働かないが，層 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の自己準同型と考えることができる．実際，点 x における $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の切断の芽で，超函数芽 $f(x)$ により代表されるものが与えられたとき，$\mathscr{B}$ の脆弱性を用いて $f(x)$ の台を点 x から離れたところで適当にコンパクトに切り落としておき，

$$f(x)*(x_1^2+\cdots+x_n^2)_+^\lambda \tag{4.6.2}$$

を超函数の意味で計算することができる．この結果は超函数としては $f(x)$ の台を修正した部分の影響が不定性として点 x にも現われるが，$(x_1^2+\cdots+x_n^2)_+^\lambda$ の特異台が原点にしかないのでそのような不定性は点 x のごく近くでは実解析的となる．故に x の近傍において(4.6.2)は上のような f の修正の選び方によらず $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の芽を決定していると考えることができるのである．同様の理由で $\mathscr{A}$ を法とする代表元 f の選び方も $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の切断としての結果には影響しない．この論法は他の多くの積分作用素に対して応用することができる．

問 4.6.1　注 21 参照．

次に不定積分 D_1^{-1} を考えてみる．超函数 $f(x)$ の台が $x_1<0$ のほうに有界なら，積分

$$D_1^{-1}f=\int_{-\infty}^{x_1}f(x)dx_1=\int_{-\infty}^{\infty}f(t,x')Y(x_1-t)dt \tag{4.6.3}$$

は意味を持ち，確かに

$$D_1D_1^{-1}f=\int_{-\infty}^{\infty}f(t,x')\delta(x_1-t)dt=f(x) \tag{4.6.4}$$

が成立する．一般の f に対しては，台を $x_1<0$ のほうで切断したものに公式(4.6.3)を適用すると，その影響が $n-1$ 変数 $x_2,\cdots,x_n$ の超函数だけの不定性として現われて来る．このような不定性は必ずしも実解析的ではない．しかし $n-1$ 変数 $x_2,\cdots,x_n$ の超函数は，n 変数の超函数として $\xi_1\neq 0$ なる方向 $i\xi dx\infty$ にミクロ解析的ではある．このことを考えると多変数の場合に不定積分を定式化すべき舞台が見えて来る．すなわち，一変数の場合にもやったように，超函数芽の，ミクロ解析的な超函数芽の全体による剰余類を考え，$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上のミクロ函数の層というものを導入すれば，このミクロ函数に対しては D_1^{-1} という作用素は，少くとも $\xi_1\neq 0$ なるところでは確定した意味を持つであろう．

定義 4.6.2　$\pi:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}\to\boldsymbol{R}^n$ を自然な射影とする．$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ の上に次のような層たちを定義する．

a) $\pi^{-1}\mathscr{B}$ の部分層 $\mathscr{A}^*$ で次の前層に同伴するもの

$$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}\supset\Omega\times i\Delta dx\infty\longmapsto\{f\in\mathscr{B}(\Omega);\mathrm{S.S.}\,f\cap\Omega\times i\Delta dx\infty=\phi\}$$

b) **ミクロ函数**(微函数あるいは極超函数)の層 $\mathscr{C}=\pi^{-1}\mathscr{B}/\mathscr{A}^*$

また，定義により次は $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の層の完全列となる:

$$0\to\mathscr{A}^*\to\pi^{-1}\mathscr{B}\to\mathscr{C}\to 0$$

つまり，点 $(x, i\omega dx\infty)$ におけるミクロ函数の芽とは，点 x における超函数の芽 $f(x)$ を，$(x, i\omega dx\infty)$ においてミクロ解析的な超函数の芽の全体を法として考えた剰余類のことである．すなわち，超函数の“ミクロ特異性”を取り出して考えようとするものである．次の定理によれば，実は同値類の代表として常に大域的に定義された一定の超函数をとることができるので，この概念はそう難しいものではない．なお，$\boldsymbol{R}^n$ の代わりに一般の実解析多様体 M を考えれば，これらの層は§2で特異スペクトルの座標変換則に関して注意したように，M の余接球束 iS^*M 上の自然な概念となる．

定理 4.6.3 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を開集合とし $\Delta\subset\boldsymbol{S}^{n-1}$ を連結開集合とする．このとき

$$\mathscr{A}^*(\Omega\times i\Delta dx\infty)=\{f\in\mathscr{B}(\Omega);\mathrm{S.S.}\,f\cap\Omega\times i\Delta dx\infty=\phi\} \tag{4.6.5}$$

$$\mathscr{C}(\Omega\times i\Delta dx\infty)=\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}^*(\Omega\times i\Delta dx\infty) \tag{4.6.6}$$

が成り立つ．特に

$$0\to\mathscr{A}(\Omega)\to\mathscr{B}(\Omega)\xrightarrow{\mathrm{sp}}\mathscr{C}(\pi^{-1}(\Omega))\to 0 \tag{4.6.7}$$

は完全列となり，従って

$$0\to\mathscr{A}\to\mathscr{B}\to\pi_*\mathscr{C}\to 0 \tag{4.6.8}$$

という層の完全列が成り立つ．また超函数 $f(x)$ に対し

$$\mathrm{S.S.}\,f=\mathrm{supp\,sp}\,(f) \tag{4.6.9}$$

である．ここに右辺は $\mathscr{C}$ の切断としての台を表わす．

証明 (4.6.5)は層の逆像の定義(定義 1.7.9)の後で述べたことから明らかである．完全列(4.6.7)は(4.6.6)で $\Delta=\boldsymbol{S}^{n-1}$ の場合を言い換えたものに過ぎない．順像の定義(定義 1.7.12)により $\mathscr{C}(\pi^{-1}(\Omega))=\pi_*\mathscr{C}(\Omega)$ だから，(4.6.7)から Ω につき帰納極限をとれば(4.6.8)が得られる．また(4.6.9)は特異スペクトルと層 $\mathscr{C}$ の定義から明らかである．

以上により(4.6.6)を証明すればよいこととなった．このため次の補題を準

備する.

補題 4.6.4　コンパクトな台を持つ超函数 $f(x)$ に対する積分

$$f(x) \longmapsto \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y) W(x-y, \omega) dy \tag{4.6.10}$$

は $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の層の準同型 $h: \mathcal{C} \to \mathcal{B}/\mathcal{A}$ を引き起こす.

以下，混乱を避けるため，$\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の独立変数 x, ω の函数概念 $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ 等に関連した記述の場合には座標 $(x, i\omega dx\infty)$ の代わりに (x, ω) と書くことにしよう.

証明　超函数 $f(x)$ で代表される $\mathcal{C}$ の芽に対し，f の台を適当にコンパクトに切断して積分(4.6.10)を考える．$W(x, \omega)$ のミクロ解析性の知識により，f の台の修正の影響は考えている点 (x, ω) の近傍には実解析的な不定性としてしか現われないことがわかる．次に，代表元 $f(x)$ を取り替えてみる．これは点 $(x, i\omega dx\infty)$ の近傍でミクロ解析的な超函数芽 $g(x)$ を調節することを意味するが，このような g に対して積分(4.6.10)はやはり (x, ω) の近傍で実解析的となることが，第3章で述べた特異スペクトルの計算規則を用いて確かめられる．(例 4.2.7 参照.) 故にこれから層の準同型 $h: \mathcal{C} \to \mathcal{B}/\mathcal{A}$ が導かれる．証了.

定理の証明の続き[注22)]　$\tilde{f} \in \mathcal{C}(\Omega \times i\Delta dx\infty)$ をとる．上の補題の準同型によりある元 $\tilde{g} \in \mathcal{B}/\mathcal{A}(\Omega \times \Delta)$ がこれに対応するが，$\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の脆弱性によりこれを $\mathcal{B}/\mathcal{A}(\Omega \times \boldsymbol{S}^{n-1})$ の元に延長できる．この延長は $\mathcal{B}(\Omega \times \boldsymbol{S}^{n-1})$ の元 $g(x, \omega)$ で大域的に代表される．そこで

$$g(x) = \int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} g(x, \omega) d\omega \in \mathcal{B}(\Omega)$$

とおく．これが求める代表元であることを示そう．点 $(x, i\omega dx\infty) \in \Omega \times i\Delta dx\infty$ を任意に選び，この点の近傍 $\Omega_0 \times i\Delta_0 dx\infty$ で $\tilde{f}$ は $f(x)$ というコンパクトな台を持つ超函数により代表されているとせよ．このとき補題 4.6.4 の与える準同型の定義により $\Omega_0 \times \Delta_0$ において

$$g(x, \omega) - \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y) W(x-y, \omega) dy \in \mathcal{A}(\Omega_0 \times \Delta_0)$$

となる．故にこれを ω につき $\boldsymbol{S}^{n-1}$ の上で積分すれば，例 4.2.7 により $g(x) - f(x)$ は $\Omega_0 \times i\Delta_0 dx\infty$ 内でミクロ解析的となることがわかる．これは g が求める代表元であることを意味している．証了.

次の定理は超函数論の圧巻である.

定理 4.6.5(柏原) ミクロ函数の層 $\mathcal{C}$ は脆弱である.

この定理の証明の方針を簡単に述べよう. 曲面 Radon 分解に類似の積分作用素を用いて $\Phi:\mathcal{C}\to\mathcal{B}/\mathcal{A}$, および $\Psi:\mathcal{B}/\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ という $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の層準同型で $\Psi\circ\Phi=id$ となるものを構成する. すると $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の脆弱性から $\mathcal{C}$ の脆弱性が導かれるであろう. これを実行するためいくつかの補題を準備する. まず, $(x, \omega)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ に対し

$$K_{\lambda,\alpha}(x,\omega)=\frac{1}{(x\omega+i\alpha(x^2-(x\omega)^2)+i0)^\lambda} \tag{4.6.11}$$

とおく. これは x,ω,λ,α の超函数となり, $\lambda\in\boldsymbol{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ を正則パラメータとして含む. ただし, 以下は簡単のため $\alpha>0$ としこれを実解析パラメータとみなしておく.

補題 4.6.6 コンパクトな台を持つ超函数 $f(x)$ に対する積分

$$f(x)\longmapsto\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)K_{\lambda,\alpha}(x-y,\omega)dy \tag{4.6.12}$$

は $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の層の準同型 $\Phi_{\lambda,\alpha}:\mathcal{C}\to\mathcal{B}/\mathcal{A}$ を引き起こす.

積分核 $K_{\lambda,\alpha}(x,\omega)$ は $W_\alpha(x,\omega)$ と全く同じミクロ解析性を示すので, この補題の証明は補題 4.6.4 と同じである.

次に

$$L_{\lambda,\alpha,k}(x,\omega)=(x^2-(x\omega)^2)^kK_{\lambda,\alpha}(x,\omega) \tag{4.6.13}$$

とおこう.

補題 4.6.7 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上のコンパクトな台を持つ超函数 $f(x,\omega)$ に対する積分

$$f(x,\omega)\longmapsto\int_{S^{n-1}}f(x,\omega)\underset{x}{*}L_{\lambda,\alpha,k}(x,\omega)d\omega \tag{4.6.14}$$

は $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の層の準同型 $\Psi_{\lambda,\alpha,k}:\mathcal{B}/\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ を誘導する.

証明 (4.6.14)の被積分函数 $f(x,\omega)\underset{x}{*}L_{\lambda,\alpha,k}(x,\omega)$ の特異台は明らかに $f(x,\omega)$ の特異台に含まれる. 故にそれを ω につき積分して得られる超函数 $f(x)$ の特異スペクトルは,

$$\mathrm{supp\,sp}\,(f)=\mathrm{S.S.}\,f(x)\subset\mathrm{sing\,supp}\,f(x,\omega)$$

を満たすことが，曲面 Radon 分解の場合と同様第3章の計算規則を用いて確かめられる．これから台の分割を用いた標準的論法により層の準同型 $\mathcal{B}/\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ が確定する．証了．

補題 4.6.8（柏原の公式） $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu)>n$ に対し次の公式が成り立つ

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} K_{\lambda,\alpha}(x-t,\omega)K_{\mu,\beta}(t,\omega)dt$$
$$=2(-\pi i)^{(n+1)/2}\frac{\Gamma(\lambda+\mu-(n+1)/2)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}(\alpha+\beta)^{-(n-1)/2}K_{\lambda+\mu-(n+1)/2,\,\alpha\beta/(\alpha+\beta)}(x,\omega) \tag{4.6.15}$$

ここに無限領域 $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数の積分は遠方では実解析函数に対する普通の広義積分の意味で行なうものとする．

証明 座標軸の回転により $\omega=(1,0,\cdots,0)$ としてよい．このとき (4.6.15) は次のような複素積分の結果において $z\mapsto x+i\{y_1>0\}0$ としたものに他ならない：

$$\int_{\gamma\times\boldsymbol{R}^{n-1}}\frac{1}{\{z_1-\tau_1+i\alpha(z'-t')^2\}^\lambda}\frac{1}{(\tau_1+i\beta t'^2)^\mu}d\tau_1dt' \tag{4.6.16}$$

ここに γ は実軸から原点を上半平面に避けた積分路である．

まず $n=1$ の場合を考えよう．$\mathrm{Im}\,z>0$ に対し積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-t-i0)^\lambda}\frac{1}{(t+i0)^\mu}dt=\int_\gamma\frac{1}{(z-\tau)^\lambda\tau^\mu}d\tau$$

を計算する．もしも $\mathrm{Im}\,z>0$, $\mathrm{Re}\,z>0$, $\mathrm{Re}\,\lambda>1$, $0<\mathrm{Re}\,\mu<1$ ならば，$\tau=z\zeta$ という変換により上の積分は

$$\frac{1}{z^{\lambda+\mu-1}}\int_{\gamma'}\frac{1}{(1-\zeta)^\lambda}\frac{1}{\zeta^\mu}d\zeta$$

となる．新しい積分路 γ' については図 4.5 を参照せよ．この積分において γ' をさらに変形し実軸の負の部分を廻るように持ってくれば，積分の絶対収束性

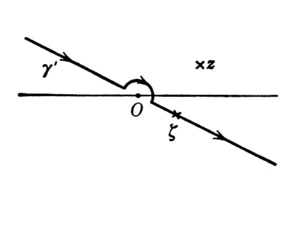


図 4.5

により，遂には実軸上の積分

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(1-\zeta)^{\lambda}}\frac{e^{-\mu\pi i}}{|\zeta|^{\mu}}d\zeta+\int_{0}^{-\infty}\frac{1}{(1-\zeta)^{\lambda}}\frac{e^{\mu\pi i}}{|\zeta|^{\mu}}d\zeta=-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{\mu\pi i}-e^{-\mu\pi i}}{(1+s)^{\lambda}s^{\mu}}ds$$

$$=-2i\sin\mu\pi\int_{0}^{1}(1-t)^{\lambda+\mu-2}t^{-\mu}dt\qquad(t=s/(1+s))$$

$$=-2i\sin\mu\pi\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda)}=-2\pi i\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}$$

を得る．ここで公式 $\int_{0}^{1}(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ および $\Gamma(1-\mu)\cdot\Gamma(\mu)=\pi/\sin\mu\pi$ を用いたのは言うまでもない．こうして

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-t-i0)^{\lambda}}\frac{1}{(t+i0)^{\mu}}dt=-\frac{2\pi i}{z^{\lambda+\mu-1}}\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\tag{4.6.17}$$

という公式が得られた．この式の証明に際し，変数の変域に余分な制限を付したが，最終的に得られた式の両辺は $\mathrm{Im}\,z>0$, $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu)>1$ で z,λ につき正則なので，解析接続の一意性により等式もそこで成り立つ．これで $n=1$ の場合は証明された．

$\mathrm{Re}\,\varepsilon\geq 0$ とし(4.6.17)において積分路を $t+i0$ から $t+i\varepsilon+i0$ に変えることにより

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-t-i0)^{\lambda}}\frac{1}{(t+i\varepsilon+i0)^{\mu}}dt=-\frac{2\pi i}{(z+i\varepsilon)^{\lambda+\mu-1}}\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\tag{4.6.18}$$

という公式が得られる．これを(4.6.16)式の τ_1 に関する積分に応用すれば

$$-2\pi i\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}\frac{dt'}{\{z_1+i\alpha(z'-t')^2+i\beta t'^2\}^{\lambda+\mu-1}}$$

を得る．これを更に変形すれば．

$$=-2\pi i\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}\frac{dt'}{\left\{z_1+i\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z'^2+i(\alpha+\beta)\left(t'-\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}z'\right)^2\right\}^{\lambda+\mu-1}}$$

$$=-2\pi i\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}\frac{dt'}{\left\{z_1+i\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z'^2+i(\alpha+\beta)t'^2\right\}^{\lambda+\mu-1}}$$

となる．この変形は z が $\mathrm{Im}\{z_1+i\alpha z'^2\}>0$, $\mathrm{Im}\{z_1+i\beta z'^2\}>0$ および $\mathrm{Im}\left\{z_1+i\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z'^2\right\}>0$ を満たす領域にあれば正当である．積分は普通の意味で絶対収束しているから $t'=\rho\omega'$ と極座標に直せば $\boldsymbol{S}^{n-2}$ の表面積が $2\pi^{(n-1)/2}/\Gamma((n-1)/2)$

であることに注意して

$$= -2\pi i \frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \frac{1}{\{i(\alpha+\beta)\}^{\lambda+\mu-1}} \int_0^\infty \frac{\rho^{n-2}d\rho}{(\rho^2+A)^{\lambda+\mu-1}}$$

を得る．ここに $A=\dfrac{-i}{\alpha+\beta}\left(z_1+i\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z'^2\right)$ は $\mathrm{Re}\,A>0$ を満たす複素量である．故に先ほどの計算と同様

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{n-2}d\rho}{(\rho^2+A)^{\lambda+\mu-1}} = \frac{1}{2A^{\lambda+\mu-(n+1)/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^{\lambda+\mu-1}s^{-(n-3)/2}} \qquad (s=\rho^2/A)$$

$$= \frac{1}{2A^{\lambda+\mu-(n+1)/2}} \frac{\Gamma\left(\lambda+\mu-\dfrac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+\mu-1)}$$

となる．これを上の式に代入すれば，最終的に

$$2(-\pi i)^{(n+1)/2} \frac{\Gamma(\lambda+\mu-(n+1)/2)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} (\alpha+\beta)^{-(n-1)/2} \frac{1}{\left\{z_1+i\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z'^2\right\}^{\lambda+\mu-(n+1)/2}}$$

が得られる．これは $\omega=(1, 0, \cdots, 0)$ の場合の(4.6.15)式の右辺の定義函数に他ならない．証了．

系 4.6.9　$\lambda+\mu-(n+1)/2$ が 0 以下の整数値と異なるとき，$\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の積分の意味で公式(4.6.15)が成り立つ．さらに詳しく言えば，原点を含む有界領域 D を任意に選んで(4.6.15)の左辺の積分を $\boldsymbol{R}^n$ の代わりにこの D の上で行えば，結果として得られる $D\times\boldsymbol{S}^{n-1}\times\{\alpha>0\}\times\{\beta>0\}$ 上の x, ω, α, β の超函数と(4.6.15)の右辺とはこの定義域内において実解析函数を除き等しい．

証明　上のような D を一つ選んで固定し(4.6.15)の左辺の積分をこの上で考えると，結果は $D\times\boldsymbol{S}^{n-1}\times\{\alpha>0\}\times\{\beta>0\}$ 上の超函数となり $\lambda, \mu\in\boldsymbol{C}$ を正則パラメータとして含むことは明らかである．一方，(4.6.15)の右辺は $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}\times\{\alpha>0\}\times\{\beta>0\}$ 上の超函数であり，λ, μ を上記除外集合の外で正則パラメータとして含む．故に正則パラメータに関する実解析性の伝播に鑑み(系 4.3.9)，これら二つの超函数の差が，例えば $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu)>n$ のとき実解析的となることを示せば十分である．(系 4.3.9 では唯一つの正則パラメータの場合を扱ったが，それを λ, μ それぞれについて独立に適用すればよい．) さて，$\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu)>n$ の場合には(4.6.15)が超函数の等式として成り立つ．故にこの左辺の積分領域を $\boldsymbol{R}^n$ から D に変えたとき，その差が $D\times\boldsymbol{S}^{n-1}\times\{\alpha>0\}\times\{\beta>0\}\times\{\mathrm{Re}$

$(\lambda+\mu)>n\}$において，$x, \omega, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ の実解析函数となることを見ればよい．この差は実解析函数に対する普通の意味で絶対収束する $\boldsymbol{R}^n\setminus D$ 上の積分となるのでその実解析性は明らかである．証了．

補題 4.6.10 定数 $c_{\lambda,k}$, $\lambda=1,\cdots,n$, $k=0,\cdots,\lambda-1$ を適当に選ぶと，補題 4.6.6–4.6.7 で与えた $\Phi_{\lambda,\alpha}$, $\Psi_{\lambda,\alpha,k}$ を用いて次のように定義される層の準同型

$$\Phi=\Phi_{(n+1)/2,2}:\mathscr{C}\to\mathscr{B}/\mathscr{A},\ \ \Psi=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{k=0}^{\lambda-1}c_{\lambda,k}\Psi_{\lambda,2,k}:\mathscr{B}/\mathscr{A}\to\mathscr{C}$$

が $\Psi\circ\Phi=id:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ を満たすようにできる．

証明 まず曲面 Radon 分解核が次のように書けることに注意しよう．

$$W(x,\omega)=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{k=0}^{\lambda-1}b_{\lambda,k}L_{\lambda,1,k}(x,\omega)$$

ここで $b_{\lambda,k}$ は具体的には与えないが普遍定数である．実際，$W(x,\omega)$ の分子に含まれる $x\omega$ を

$$x\omega=\{x\omega+i(x^2-(x\omega)^2)\}-i(x^2-(x\omega)^2)$$

と変形して展開すれば上の形になる．((2.3.25)式を見よ．) 次に

$$L_{\lambda,\alpha,k}(x,\omega)=(-i)^k\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-k)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^kK_{\lambda-k,\alpha}(x,\omega)\qquad(k<\lambda)$$

という公式に注意する．これと(4.6.15)とから

$$\begin{aligned}&\int L_{\lambda,\alpha,k}(x-y,\omega)K_{\mu,\beta}(y,\omega)dy\\&=(-i)^k\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-k)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k\int K_{\lambda-k,\alpha}(x-y,\omega)K_{\mu,\beta}(y,\omega)dy\\&=(-i)^k\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-k)}2(-\pi i)^{(n+1)/2}\frac{\Gamma(\lambda+\mu-k-(n+1)/2)}{\Gamma(\lambda-k)\Gamma(\mu)}\\&\qquad\times\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k\left\{(\alpha+\beta)^{-\frac{n-1}{2}}K_{\lambda+\mu-k-(n+1)/2,\,\alpha\beta/(\alpha+\beta)}(x,\omega)\right\}\end{aligned}$$

という公式が得られる．ここの積分および等号も系 4.6.9 と同じ意味で $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ に対するものである．$\lambda>0$, $\mu=\dfrac{n+1}{2}$ と選んで最後の微分を実行し，然る後に $\alpha=\beta=2$(従って $\alpha\beta/(\alpha+\beta)=1$) とおけば，結果は $L_{\lambda-k+j,1,j}(x,\omega)$, $j=0,\cdots,k$ の一次結合となる．故に未定係数法を用い，三角型の連立一次方程式を解くことにより $L(x,\omega)=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{k=0}^{\lambda-1}c_{\lambda,k}L_{\lambda,2,k}(x,\omega)$, および $K(x,\omega)=K_{(n+1)/2,2}(x,\omega)$ に対し

(4.6.19)
$$\int L(x-y,\omega)K(y,\omega)dy = W(x,\omega)$$

が $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の意味で成り立つようにできる．このときの係数 $c_{\lambda,k}$ が求めるものであることを示そう．$\Psi\circ\Phi=id$ をいうには，コンパクトな台を持つ超函数 $f(x)$ から定まる $\mathscr{C}$ の切断 $\mathrm{sp}(f)$ について $\Psi\circ\Phi(\mathrm{sp}(f))=\mathrm{sp}(f)$ が $\mathrm{supp}\, f\times \boldsymbol{S}^{n-1}$ の近傍で成り立つことを示せば十分である．さて，$\mathrm{supp}\, f$ の近傍として有界領域 D をとろう．$\Phi(\mathrm{sp}(f))$ は補題4.6.6により $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の超函数

(4.6.20)
$$f(x,\omega) = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)K(x-y,\omega)dy$$

を $\mathscr{A}$ を法として考えたものである．次に $\Psi(f(x,\omega) \bmod \mathscr{A})$ は補題4.6.7により $\mathrm{Int}(D)\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ の上では

(4.6.21)
$$\int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} d\omega \int_D f(z,\omega)L(x-z,\omega)dz$$

を $\mathscr{C}$ の元とみなしたもの（準同型 sp を施したもの）に等しい．(4.6.20)をこれに代入すれば，これは

(4.6.22)
$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} d\omega \int_D L(x-z,\omega)dz \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)K(z-y,\omega)dy \\ &\qquad = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)dy \int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} d\omega \int_D L(x-z,\omega)K(z-y,\omega)dz\end{aligned}$$

となる．(4.6.19)によれば，z に関する最後の積分は，おおよそ $W(x-y,\omega)$ を与え，従って全体は

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)dy \int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} W(x-y,\omega)d\omega = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)\delta(x-y)dy = f(x)$$

を与えるはずである．剰余項を正確に調べるため，$\mathrm{supp}\, f$ の閉近傍 $E\Subset D$ を新たにとり原点の近傍 F を

$$F \supset D-E = \{z\in\boldsymbol{R}^n\,;\exists x\in D,\ \exists y\in E,\ z=x-y\}$$

を満たすように選んで，z に関する積分を次のように変形しよう．

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{R}^n} \chi_D(z)L(x-z,\omega)K(z-y,\omega)dz = \int_{\boldsymbol{R}^n} \chi_D(y+z)L(x-y-z,\omega)K(z,\omega)dz \\ &\quad = \int_{\boldsymbol{R}^n\setminus F} \chi_D(y+z)L(x-y-z,\omega)K(z,\omega)dz + \int_F L(x-y-z,\omega)K(z,\omega)dz \\ &\qquad + \int_F (\chi_D(y+z)-1)L(x-y-z,\omega)K(z,\omega)dz\end{aligned}$$

この変形は $z\in\partial F$ の近傍で被積分函数がいずれも z を実解析パラメータとして含むから合法的である．さて，最後の辺の第一項は，積分領域上で被積分函数が通常の函数として0に等しいことから0となる．実際 $\chi_D(y+z)=1$，かつ y が E の近傍を動くとき，$z=(y+z)-y$ は F に属さねばならぬからである．また第二項は(4.6.19)により $x-y$ が $\mathrm{Int}(F)$ を動くとき

$$W(x-y,\omega)+\varphi(x-y,\omega),\qquad \varphi(x,\omega)\in\mathscr{A}(\mathrm{Int}(F)\times\boldsymbol{S}^{n-1})$$

の形となる．最後に第三項は x が D を，y が E の近傍を動くときやはり実解析函数 $\psi(x,y,\omega)$ を与えることがわかる．以上を総合すれば，(4.6.22)は結局 $x\in\mathrm{Int}(D)$ において

$$\int_E f(y)dy\int_{S^{n-1}}d\omega\int_D L(x-z,\omega)K(z-y,\omega)dz$$
$$=f(x)+\int_E dy\int_{S^{n-1}}\{\varphi(x-y,\omega)+\psi(x,y,\omega)\}d\omega$$

に等しいことがわかる．最後の辺の剰余項は明らかに $\mathrm{Int}(D)$ 内の実解析函数となるから，これで $\Psi\circ\Phi(\mathrm{sp}(f))=\mathrm{sp}(f)$ が確かめられた．証了．

定理 4.6.5 の証明を蛇足ながら完結しておこう．$U\subset\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ を任意の開集合とし $\bar{f}\in\mathscr{C}(U)$ とする．$\Phi(\bar{f})\in\mathscr{B}/\mathscr{A}(U)$ となるが，$\mathscr{B}/\mathscr{A}$ は定理 4.6.1 により脆弱だから，この全空間への延長 $\widetilde{\Phi(\bar{f})}$ が存在する．$\bar{g}=\Psi(\widetilde{\Phi(\bar{f})})$ は $\mathscr{C}(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1})$ の元となるが，層の準同型の定義と上の補題より $\bar{g}|_U=\Psi(\Phi(\bar{f}))=\bar{f}$ となり，求める延長が得られた．証了[注23)]．

以上の結果を用いて第3章の始めの方に超函数の演算の基礎として掲げた諸定理を究極の形にまで改良しておこう．まず，脆弱性の言い換えとして

系 4.6.11 $f\in\mathscr{B}(\Omega)$ とし $\mathrm{S.S.}\,f=E_1\cup\cdots\cup E_N$ を $\Omega\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ の閉集合の有限和への分解とすれば，$\mathrm{S.S.}\,f_j\subset E_j$ なる $f_j\in\mathscr{B}(\Omega)$，$j=1,\cdots,N$ で

(4.6.23) $$f=f_1+\cdots+f_N$$

となるものが存在する．同様の分解は sing supp f に関しても成り立つ．

実際，層 $\mathscr{C}$ の脆弱性により $\mathrm{sp}(f)=\bar{f}_1+\cdots+\bar{f}_N$ と，$\mathrm{supp}\,\bar{f}_j\subset E_j$ を満たす $\mathscr{C}(\Omega\times\boldsymbol{S}^{n-1})$ の元により分解される．（補題 1.4.4 参照．）定理 4.6.3 によれば，$\mathrm{sp}(f_j)=\bar{f}_j$ となる元 $f_j\in\mathscr{B}(\Omega)$ が存在するが，このとき $\mathrm{sp}(f-(f_1+\cdots+f_N))=0$ だから $f-(f_1+\cdots+f_N)\in\mathscr{A}(\Omega)$ となる．この実解析函数を，例えば f_1 に繰り

込めば，分解(4.6.23)を与える元たちが求まった．(4.6.9)によれば S.S. $f_j=$ supp sp (f_j) だから，これは求める答となる．

これを用いると定理3.2.3は次のように改良される．

系 4.6.12　$f(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ とし S.S. $f\subset\Omega\times i(\Gamma_1{}^\circ\cup\cdots\cup\Gamma_N{}^\circ)dx\infty$ とする．このとき $F_j(z)\in\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_j0)$ を適当に選べば，$f(x)$ の境界値表示

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j0)$$

で，S.S. $f\cap\{x\}\times i\Gamma_j{}^\circ dx\infty=\phi$ なる点 x の近傍へは $F_j(z)$ が実軸まで解析接続されるようなものが存在する．

実際，系4.6.11により S.S. $f_j\subset$S.S. $f\cap\Omega\times i\Gamma_j{}^\circ dx\infty$ なる f_j を用いてまず f を分解し，各 f_j に対し定理3.1.7と補題3.1.3を適用すればよい．

さらに，補題3.2.7も同じ趣旨で拡張される．

系 4.6.13 (Martineau 型の局所的楔の刃定理)　$\mathcal{B}(\Omega)$ において

$$\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j0)=0$$

とせよ．このとき，$H_{jk}(z)\in\mathcal{O}(\Omega+i(\Gamma_j+\Gamma_k)0)$，$j,k=1,\cdots,N$ で，$H_{kj}(z)=-H_{jk}(z)$ かつ

$$F_j(z)=\sum_{k=1}^{N}H_{jk}(z),\qquad j=1,\cdots,N$$

を共通の定義域で成り立たせるようなものが存在する．さらに $H_{jk}(z)$ は $F_j(z)$ あるいは $F_k(z)$ のいずれか一方が実軸まで解析接続できるような点ではそれ自身も実軸まで解析接続できるように選べる．

実際，第3章§3に述べた補題3.2.7の証明と同様の論法を，定理3.2.3の代わりに系4.6.12を用いて行なえばよい．あるいはむしろその基となった系4.6.11を直接 $f(x)=F_N(x+i\Gamma_N0)=-\sum_{j=1}^{N-1}F_j(x+i\Gamma_j0)$ に適用すれば，最後の付帯条件は見易いであろう．

参考 4.7　準同型 $\Phi:\mathcal{C}\to\mathcal{B}/\mathcal{A}$ はもちろん単射だが，その像は $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ よりもずっと小さい．実際，Φ の像は変数 ω を実解析パラメータとして含む超函数により代表されるものばかりである．実用的に $\mathcal{C}$ の芽を表現するには次の二通りの方法がある．第一の方法は点 x^0,ω^0 の近傍で定義され，特異スペクトルが $i(\omega dx+\boldsymbol{R}^{n-1}d\omega)\infty$ という方向しか含まぬような変数 x,ω の超函数芽(で代表される $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の芽) $f(x,\omega)$ に対し，ω^0 の近傍 Δ

を選んで

$$f(x)=\int_{\Delta}f(x,\omega)d\omega \tag{4.6.24}$$

とおき sp(f) を考えるものである．これは点 $(x^0, i\omega^0 dx\infty)$ の近傍では Δ の選び方によらぬことが容易に確かめられる．ここで積分記号は理論上の必要で付いていることに気付けば，わざわざ計算しなくても

$$f(x,\omega)d\omega \ \text{mod 完全形式} \tag{4.6.25}$$

という第二の表現法に思い到る．この二つの表現法は de Rham の定理により同値であることが証明できる注24)．

この節を終えるにあたってミクロ函数の演算について少し述べておこう．本書で我々がとってきた立場は，iS^*M 上のミクロ函数の層というわかり難いものを始めから考えるのではなく，函数概念の拡張として理解し得る超函数とそのミクロ解析性という概念をまず習得してしまえば，ミクロ函数というのは超函数のミクロ解析的なものに関する剰余類としてかなり容易に把えることができるという点にあった．故に応用上はわざわざミクロ函数を持ち出さなくても，剰余類の代表として常に具体的な超函数を念頭においていれば足りるわけである．しかしながら，この節の始めに $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ について述べたように，あるいは $\mathscr{C}$ の脆弱性を主張する定理 4.6.5 とそこからたった今導かれた諸結果を見ればわかるように，ミクロ函数の層というものを新しい実体として認識することは，理論を代数的にきれいに整理するという意味もさることながら，次の段階への飛躍を準備することにつながるのである．そういう訳であるから，第3章において得られた超函数の演算とその特異スペクトルとの関係に関する諸結果を，ミクロ函数の演算規則としてここに翻訳再掲しておくこととしよう．なお，これらの結果は，本書後半で与えられる層の演算に関するより進んだ諸概念を用いれば，もっと代数的にきれいな形に定式化することができる．

命題 4.6.14（繊維に沿う積分） $[f(x,t)]$ は

$$\{(x,t,i(\xi dx+\theta dt)\infty)\ ;\ x=x^0,\ t\in T,\ \xi=\xi^0\neq 0,\ \theta=0\}$$

という集合の近傍で定義された x, t のミクロ函数とし，t についてはコンパクトな台を持つとする．このとき積分

$$\int f(x,t)dt \tag{4.6.26}$$

は点 $(x^0, i\xi^0 dx\infty)$ における x のミクロ函数の芽を定める.

証明　まずミクロ函数の層の脆弱性により，$[f(x,\tau)]$ の台を最小に保った全空間への延長 $[\tilde{f}(x,t)]$ をとる. 従って台は相変わらず t についてコンパクトとしてよい. 次にこの延長を大域的に代表する超函数 $\tilde{f}(x,t)$ をとる. このとき定義により S.S. $\tilde{f}(x,t)$ は t につきコンパクトだから，t に関する適当な積分領域 $K\subset T$ の定義函数 $\chi(t)$ をとり

$$\int_K \tilde{f}(x,t)dt = \int \tilde{f}(x,t)\chi(t)dt$$

を超函数の積分として計算することができる. ∂K の近傍で $\tilde{f}(x,t)\chi(t)$ は $i\theta dt\infty$ 方向の特異スペクトルしか含まないから，K の選び方は積分の結果に実解析的な不定性しか与えない(定理 3.4.1). 同じ理由で超函数の代表元 $\tilde{f}(x,t)$ の選び方も結果に実解析的な不定性しか与えない. また，$[f]$ から $[\tilde{f}]$ への延長の不定性は，超函数の代表元の言葉で言えば $dt=0$ の近傍でミクロ解析的なものとなるわけだから，やはり定理 3.4.1 により t で積分すれば実解析的となってしまう. 以上で積分 (4.6.26) が x のミクロ函数として確定することがわかった. 証了.

命題 4.6.15 (制限)　$[f(x,t)]$ は

$$\{(x,t\,;i(\xi dx+\theta dt)\infty)\,;x=x^0,t=0,\xi=\xi^0\mp 0\}$$

という集合の近傍で定義された x, t のミクロ函数とし，θ につきコンパクトな台を持つとする. このとき制限

$$f(x,t)|_{t=0} \tag{4.6.27}$$

が点 $(x^0, i\xi^0 dx\infty)$ における x のミクロ函数の芽として確定する.

証明は上と同様である. すなわち，まず台を最小に保った延長をとり，次にその超函数による代表元を選んで，制限演算を超函数の意味で実行し，最後に定理 3.2.10 を用いて結果がミクロ函数としては確定することを確かめればよい. 制限演算の対象となるミクロ函数は θ については大域的に定義されている必要があることに注意せよ. この点でも制限は積分ときれいな双対関係になっている.

命題 4.6.16(積) $[f(x)]$, $[g(x)]$ はそれぞれ点 $(x^0, i\xi^0 dx\infty)$ および $(x^0, i\eta^0 dx\infty)$ におけるミクロ函数の芽とし, ξ^0, η^0 のそれぞれ十分小さい任意の近傍 $\varDelta_0, E_0$ に対して, x^0 上の繊維において ξ^0, η^0 を通る最短大円弧は集合

$$(\{x^0\}\times i\partial\varDelta_0 dx\infty\cap \mathrm{supp}[f])\vee(\{x^0\}\times i\partial E_0 dx\infty\cap \mathrm{supp}[g])$$

と交わらないとする.(ここの supp はミクロ函数の意味のものである.)このとき積$[f(x)][g(x)]$が集合

$$(\{(x^0, i\xi^0 dx\infty)\}\vee\{(x^0, i\eta^0 dx\infty)\})\setminus\{(x^0, i\xi^0 dx\infty), (x^0, i\eta^0 dx\infty)\}$$

の近傍で定義されたミクロ函数として確定する.

証明は読者に委ねる. これは定理 3.2.5 を翻訳すればよい[注25].

問 4.6.2 変数 x のミクロ函数芽$[f(x)]$と変数 y のミクロ函数芽$[g(y)]$の積は上の意味で常に確定し, この積$[f(x)][g(y)]$に続けて $x-y=0$ への制限演算が,(命題 4.6.15 の意味での)その可能性も込めて積$[f(x)][g(x)]$に等しくなることを確かめよ.

命題 4.6.17 $\varOmega$ を $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ の開集合とし, $\varOmega^a$ をその対蹠集合とする. $K(x, y)$ を $\varOmega\times\varOmega^a$ 上で定義された x, y のミクロ函数で, 集合

$$\{(x, y\,; i(\xi dx+\eta dy)\infty)\,; x=y, \xi=-\eta\}$$

にその台が含まれるようなものとする. このとき, 積分

$$\int K(x, y)f(y)dy \tag{4.6.28}$$

は $\varOmega$ 上のミクロ函数の層の準同型を定める.

実際, 命題 4.6.16 の意味で積 $K(x, y)f(y)$ が $dy=0$ の近傍で定まり, 次いで y に関する積分が命題 4.6.14 により x のミクロ函数として確定するのである. 詳しい検証は読者に委ねる.

(4.6.28)の形の $\mathscr{C}$ の自己準同型を**超局所作用素**(あるいはミクロ局所作用素)と言い, $K(x, y)$ をその**核函数**と言う. 特にこの核函数 $K(x, y)$ が, 更に超函数として, その台が集合 $x=y$ に含まれているようなものからきているときは, (4.6.28)は $\mathscr{B}$ の自己準同型をも誘導する. このようなものは**局所作用素**と呼ばれる. 微分作用素 $P(x, D)$ は局所作用素であり, その核函数は $P(x, D)\delta(x-y)$ で与えられる. 特に恒等作用素の核函数は $\delta(x-y)$ である. ただし, これを方向 $\xi=\xi^0$ のある近傍 $\varDelta$ 内で考えるときは, 核函数として $W_0(x-y, \varDelta)$ をとっ

てもよいことに注意せよ．ここに

$$W_0(x,\varDelta)=\int_{\varDelta}W_0(x,\omega)d\omega$$

であった．局所作用素でないミクロ局所作用素の代表的な例としては，不定積分 D_1^{-1} がある．これの核函数としては，$\varDelta\Subset\{\omega_1\neq 0\}$ なる方向領域においては，例えば

$$-\frac{(n-2)!}{(-2\pi i)^n}\int_{\varDelta}\frac{1}{\omega_1(x\omega+i0)^{n-1}}d\omega$$

を採用することができる．この被積分函数は実際に $W_0(x,\omega)$ を x_1 につき一回不定積分したものである．D_1^{-1} と $D'=(D_2,\cdots,D_n)$ の冪を組み合わせて一変数のときのように無限級数を考えれば，**擬微分作用素**(ミクロ微分作用素)が得られる．

K としてもっと一般な核を採用すれば，命題 4.6.14 以下を統一して扱うこともできる．作用素に関する詳しいことは稿を改めて述べよう．

問 4.6.3 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ に対し

$$\delta^{(\alpha)}(t)=\frac{\Gamma(\alpha)}{(-2\pi i)^{\alpha+1}}\left\{\frac{1}{(t+i0)^{\alpha+1}}-\frac{1}{(t-i0)^{\alpha+1}}\right\}$$

という一変数超函数を導入する．ただし $\alpha=-1,-2,\cdots$ に対しては極限をとったものを採用する．このとき

$$D_1^{\alpha}f(x)=f(x)*\delta^{(\alpha)}(x_1)$$

は $\xi_1\neq 0$ 上の超局所作用素として確定し，$D_1^{\alpha}D_1^{\beta}=D_1^{\alpha+\beta}$ が成り立つ．これは $\alpha=0,1,2,\cdots$ については x_1 に関する通常の偏微分と一致し，また $\alpha=-1,-2,\cdots$ については上で定義した x_1 に関する $(-\alpha)$ 回の不定積分と一致する．

参考 4.8 注 26 参照.

付記 §1 超函数の空間の位相の議論は従来の文献では華々しい場所を占めていた．$\mathscr{B}[K]$ はいわゆる FS 空間，$\mathscr{A}(K)$ は DFS 空間ということで，これらの一般論が展開されていた．(例えば小松[3]，森本[1]等，さらに Schapira[1]のようにそれを完全に理論の根拠にしたものもある．) この双対性は佐藤自身が既に原論文で注意していたものだが，彼はコホモロジーのほうが好きだったようで，その意を汲んでいると思われる柏原-河合[1]にも位相の話は取り上げられていないようである．ここでの位相の扱い方は筆者の創意によるいわば手仕事であり，位相線型空間論に習熟した読者には却って読み

づらいかもしれないが，一般の読者にはわかり易くなっていると思う．一般論との関係を知りたい方は森本[1]，小松[2]等と比較されるとよい．もちろん超函数論は位相の概念なしでも最後まで展開できるが，本章では証明を短くするためこの程度の位相の概念は適宜用いる立場をとった．これは本書の後半で $\mathcal{B}$ の脆弱性の証明に用いる Malgrange の定理を原論文からの引用で済ますのを避けるための準備でもある．

§2 で用いた幾何の用語については松島[1]等を見よ．本書で述べた程度の解析学はいわゆる無限小解析，すなわち局所解析なので，多様体にしてもそう変わったことはない．

§3 正則パラメータの概念は佐藤の原論文[3]にあるが，その諸性質が深く極められたのは柏原-河合による偏微分方程式の最近の研究の副産物としてであった．ここの記述および次の §4 の諸証明はいずれも著者により初等化されたものである．§4 西瓜割り定理は因果律に関する森本の一連の仕事を基に佐藤により立てられた予想で，柏原(未発表)，片岡[1]により証明された．なお因果律の定式化にあたっては物理学者も独立に特異スペクトルと同値な概念を使用し始めていた．この辺の事情については森本[2]を見られたい．

§5 の内容は新しいものではないが，きちんと書いた出版物がないのでまとめておいた．Schwartz の分布については対応する事実は大概の教科書に載っている．(もちろん，その場合は法線方向に有限階のものしか現われない．)

§6 ミクロ函数の理論は佐藤の新理論の核心であるが，従来，導来圏あるいは一般化された相対コホモロジーの壮大な準備の後で導入されていた(佐藤-河合-柏原[1]，柏原-河合[1])．特異スペクトルの理論の正当化もその後で行なわれたのである．本書のように特異スペクトルを先に説明してしまい，定理 4.6.3 をかくも簡単に証明できたのは曲面 Radon 分解のお蔭である．なお，$\mathcal{C}$ の脆弱性の証明は柏原による大きな貢献であり，ここで与えた証明も彼により簡略化されたものの全くの引き写しである．(注 37)

第 4 章の問題

問題 1　$K \subsetneq L$ を二つのコンパクト集合とする．$f_k \in \mathcal{B}[K]$ が $\mathcal{B}[L]$ において $f_k \to 0$ と収束していても $\mathcal{B}[K]$ において $f_k \to 0$ とは限らぬことを示せ．[台が $L \setminus K$ に含まれる f を $\mathcal{B}[K]$ の元の列により $\mathcal{B}[L]$ において近似してみよ．]

問題 2　a)　円周 $\boldsymbol{S}^1$ を $\{z \in \boldsymbol{C}; |z|=1\}$ と同一視するとき $\mathcal{B}(S^1) \cong \mathcal{O}_\infty(\boldsymbol{P}^1 \setminus \boldsymbol{S}^1)$ となることを示せ．b)　$z=e^{i\theta}$ により $\boldsymbol{S}^1$ 上の局所座標 θ を導入する．$\boldsymbol{S}^1$ 上の超函数 $f(\theta)$ に対し

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta$$

は上の同型により $f(\theta)$ を表現する正則函数 $F_0(z) \in \mathcal{O}(\{|z|<1\})$，$F_\infty(z) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{P}^1 \setminus \{|z| \le 1\})$

と如何なる関係にあるか？ c) $\sum_{k\in Z} a_k e^{ik\theta}$ が $\mathcal{A}(S^1)$, $\mathcal{B}(S^1)$ において収束する条件をそれぞれ求めよ. d) $\theta=0$ を台とする超函数 $\delta(\theta)$ の Fourier 展開を求めよ. e) 定数係数常微分作用素 $P(d/d\theta)$ が周期 2π の基本解 $E(\theta)$ (すなわち $P(d/d\theta)E(\theta)=\delta(\theta)$ の解) を持つための必要十分な条件は何か？

問題3 複素1次元多様体 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z}+i\boldsymbol{Z})$ を2次元実解析多様体とみなす.

a) $\boldsymbol{T}$ 上の有理型函数

$$F(z,a)=\frac{1}{\pi}\sum_{\omega\in Z+iZ}\left(\frac{1}{z-\omega}-\frac{1}{z-a-\omega}+\frac{a}{\omega^2}\right)$$

は, 一意的な方法で正則パラメータ $a\in\boldsymbol{C}$ を含む $\boldsymbol{T}$ 上の超函数とみなされ, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)F(z,a)=\delta(z)-\delta(z-a)$ を満たすことを確かめよ.

b) Cauchy-Riemann 作用素

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right):\mathcal{B}(\boldsymbol{T})\to\mathcal{B}(\boldsymbol{T})$$

の核の次元, および像の余次元を求めよ.

問題4 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^1$ 上の超函数 $f(x,\theta)$ について

$$f_k(x)=\int_{S^1}f(x,\theta)e^{-ik\theta}d\theta$$

と定める. a) f の台がコンパクトのとき, Fourier 級数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f^k(x)e^{ik\theta}$$

は位相の意味で収束し $f(x,\theta)$ を再現する. b) $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を有界開集合とする. 任意の列 $f_k(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対し, これを Fourier 展開係数とする超函数 $f(x,\theta)\in\mathcal{B}(\Omega\times\boldsymbol{S}^1)$ が存在する. c) 一般に展開係数 $f_k(x)$ は $f(x,\theta)$ を決定できないことを示せ. [定理4.5.3-系4.5.4を真似せよ]

問題5 一階偏微分方程式 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\pm ix_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u(x_1,x_2)=0$ の超函数解について

$$\mathrm{S.S.}\,u\subset\{(x,\pm idx_2\infty);x_1=0\}$$

を示せ.

問題6 Levi-溝畑の作用素に関して第3章問題3の初期値問題の考察を続行する.

c) $u(x)$ が初期値 $v(x_2)=0$ に対するこの Cauchy 問題の解なら $Y(x_1)u(x)$ も同じ初期値に対する解であることを示し, Cauchy 問題の一意性を証明せよ. [後半は問題5と Holmgren 型の定理]

d) $u(x)$ をこの初期値問題の解, $\tilde{u}$ を $\mathrm{supp}\,\tilde{u}\subset\{x_1\geq 0\}\times\{|x_2|\leq\varepsilon\}$ なる u の修正とし $\{x_1=0,|x_2|=\varepsilon\}$ の外では $\tilde{u}(x)=Y(x_1)Y(\varepsilon^2-x_2{}^2)u(x)$ とする. これに対し十分小さい $\delta>0$ について Green の公式

$$\int \tilde{v}(x_2)e(0, x_2-t)dx_2 = \int e(\delta, x_2-t)\tilde{u}(\delta, x_2)dx_2 + \iint \tilde{w}(x_1, x_2)e(x_1, x_2-t)dx_1dx_2$$

を示せ．ここに $\tilde{v}(x_2)\in{}'\mathcal{B}[\{|x_2|\leq\varepsilon\}]$ は $v(x_2)$ の修正であり，$\tilde{w}\in\mathcal{B}[\{0\leq x_1\leq\delta\}\times\{|x_2|=\varepsilon\}]$ は適当に選ぶものとする．$\left[\iint P(x,D)\{Y(\delta-x_1)e(x_1,x_2-t)\tilde{u}(x)\}dx_1dx_2\right.$ を計算せよ．$\left.\right]$

e)　条件 S. S. $v(x_2)\subset \boldsymbol{R}\times\{idx_2\infty\}$ は Cauchy 問題が解けるための必要条件でもあることを示せ．

f)　問題 5 の評価は S. S. $u\subset\{(x, idx_2\infty); x_1=0\}$ に改良されることを示せ．

g)　注 27 参照．

問題 7　$\boldsymbol{R}^3=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R}$ において H. Lewy の作用素

$$P^{\pm} = \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \pm iz\frac{\partial}{\partial t}$$

を考える．ここに $z=x+iy$ とし，(x, y, t) を $\boldsymbol{R}^3$ の座標と考えている．

$$E^{\pm}(z, w, t, s) = -\frac{1}{2\pi^2 i}\frac{1}{z-w}\frac{1}{t-s\pm i(|z|^2+|w|^2-2z\bar{w})\pm i0}$$

とおく．

a)　$E^{\pm}(z, w, t, s)$ は $\boldsymbol{R}^6$ 上の超函数として確定することを示し，その台，特異台，特異スペクトルを求めよ．

b)
$$P_{z,t}{}^{\mp}E^{\pm}(z, w, t, s) = \delta(z-w)\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t-s\pm i0}\right)$$

を示し，これから S. S. $f\subset\mathrm{Int}(D^{\pm})$, $D^{\pm}=\boldsymbol{R}^3\times\{i(\xi dx+\eta dy+\theta dt)\infty; \pm\theta\geq 0\}$ なる f に対し $P^{\pm}u=f$ は局所的に解けることを示せ．

c)
$$\int E^{\pm}(z, w, t, s)P_{w,s}{}^{\pm}\delta(w-\xi)\delta(s-r)dudvds = \delta(z-\zeta)\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t-r\pm i0}\right)$$

(ここに $w=u+iv$) を示し，これを用いて $P^{\pm}u=0$ の解は S. S. $u\subset D^{\mp}$ を満たすことを示せ．この評価はどのように改良されるか？

d)　$P_{z,t}{}^{\pm}E^{\pm}(z, w, t, s)=\delta(z-w)\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t-s\pm i0}\right)+K_{\pm}(z, w, t, s)$ を示せ．ここに

$$K_{\pm}(z, w, t, s) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{z-w}\frac{z}{(t-s+i(|z|^2+|w|^2-2z\bar{w})+i0)^2}$$

である．これを用いて任意の超函数 $u(z, t)$ に対し $D^{\pm}$ 上で次の等式を示せ．

$$\int K_{\pm}(z, w, t, s)P_{w,s}{}^{\pm}u(w, s)dudvds = 0$$

e)　方程式 $P^{\pm}u=f$ は必ずしも超函数の局所解を持たぬことを示せ．

問題 8　注 28 参照．

問題 9　注 29 参照．

第5章　層係数のコホモロジー

この節では層に係数を持つコホモロジーの理論の必要事項を解説する．超函数論に使うのが目的であるから，一般性よりは簡潔性に重点を置いた記述の仕方を選んである．また，簡単のため本節で扱う層は，第1章§2で定義したように$\boldsymbol{C}$-線型空間の層としてある．層の圏に働く導来函手として$\mathscr{H}_S{}^k$とR^kf_*を平行して取り上げた．前者は超函数の層の定義に直接関わるものである．後者は本書の叙述法によれば超函数論の基礎付けに是非とも必要なものでは無いが，超函数の文献で良く使われるし，前者と双対的な関係が見易いので並べて解説することとした．

層のコホモロジーを学ぶには，当然のことながらホモロジー代数が必要となる．ホモロジー代数に限らず，新しい概念は少しでも学習の経験のある方が受け入れ易いではあろうが，必要な予備知識は第2節にまとめておいたので，敢えてホモロジー代数の教科書から始める必要は無いであろう．

§1　脆　弱　層

層係数コホモロジーを定義するため，この節ではまずその基礎となる脆弱層の性質をもう少し調べておく．脆弱層の定義自身は第1章§4で与えられたのであった．

定義 5.1.1　Xを位相空間，$\mathscr{F}$をその上の層とする．SをXの**局所閉集合**(即ち開集合と閉集合の交わりとして書けるもの)とするとき，Sの**近傍**(すなわちSを閉部分集合として含む開集合)Uを選んで，

$$\varGamma_S(X,\mathscr{F}) = \{s\in\mathscr{F}(U); \mathrm{supp}\, s\subset S\} \tag{5.1.1}$$

とおき，台が S に含まれるような $\mathscr{F}$ の**切断**の作る $\boldsymbol{C}$–線型空間と言う．

この定義が U の選び方によらぬことを確かめておこう．U_1, U_2 をいずれも S の近傍とすれば，$U_1\cap U_2$ もまた S の近傍となる．後者を仲介として考えれば，$U_1\supset U_2$ のときに

$$\{s\in\mathscr{F}(U_1); \mathrm{supp}\, s\subset S\}\to\{s\in\mathscr{F}(U_2); \mathrm{supp}\, s\subset S\}$$

という制限写像が同型になることを言えばよいことがわかる．しかしこれは明らかである．

上で用いた開集合 U に対し，$\varGamma_S(X,\mathscr{F})$ のことをまた $\varGamma_S(U,\mathscr{F})$ とも書く．これは U を全空間と考え，その上の層 $\mathscr{F}|_U$ に対し $\varGamma_S(U,\mathscr{F}|_U)$ を考えるのに等しい（$\mathscr{F}|_U$ については第4章 p.159 参照）．この記号はまた U が単に S を含む開集合の場合にも意味を持ち，要するに同じものを与える．S が全体の閉部分集合となっているときは，その一つの近傍として全空間がとれるので気持が良い．逆に $S=U$ が X の開集合の場合には，$\varGamma_U(X,\mathscr{F})=\mathscr{F}(U)$ となることがわかる．以後は記号の統一のためこれを $\varGamma(U,\mathscr{F})$ とも記すことにする．これは台に制限のない U 上の切断全体が作る空間というわけである．$\varGamma$ は一般に切断を表わす**函手**の記号である．函手とは一般に一つの**圏**（すなわち，一定の数学的対象の集まり）からもう一つの圏への“写像”（すなわち翻訳手続き）のようなものであり，ここの例では，一定の位相空間 X の上のいろいろな層 $\mathscr{F}$ が第一の圏を，また $\boldsymbol{C}$–線型空間の全体が第二の圏をなしており，“写像”は $\mathscr{F}\mapsto\varGamma_S(X,\mathscr{F})$ 等で定義されている．

命題と定義 5.1.2　$\mathscr{F}$ を X 上の層，$S\subset X$ を局所閉集合とする．対応 $X\supset U\mapsto\varGamma_{S\cap U}(X,\mathscr{F})$ は X 上の層をなす．これを $\mathscr{T}_S(\mathscr{F})$ で表わす．これは S 上の層とも見做される．（$\mathscr{T}$ は T ではなく $\varGamma$ のスクリプト体のつもりである．）

層の公理 F I, F II の験証は難しくないので省略する．S の開集合は X の開集合 U を用いて $S\cap U$ の形に書けるものであるが，これに対し $S\cap U\mapsto\varGamma_{S\cap U}(X,\mathscr{F})$ という対応は上で注意したように $S\cap U$ のみで定まり，U の選び方には依らない．これにより $\mathscr{T}_S(\mathscr{F})$ を S 上の層と見なすことができる．U が S と交わらなければ $\varGamma_{S\cap U}(X,\mathscr{F})=\{0\}$ だから，これは直観的にも自然である．

$S=U$ が X の開集合のとき $\mathscr{T}_U(\mathscr{F})$ は $\mathscr{F}$ の U への制限 $\mathscr{F}|_U$ に他ならないこ

とに注意せよ.

補題 5.1.3　$\mathscr{F}$ が脆弱なら $\mathscr{T}_S(\mathscr{F})$ も脆弱である.

証明　S の近傍を一つ選ぶ. 議論をその中で済ませれば良いから, 証明を見易くするためそれを全空間と同じ文字 X で表わそう. 任意の開集合 U に対し $X\cap U$ は $S\cap U$ の一つの近傍である. 故に

$$\mathscr{T}_S(\mathscr{F})(U) = \Gamma_{S\cap U}(X, \mathscr{F}) = \{s \in \mathscr{F}(X\cap U); \operatorname{supp} s \subset S\cap U\}$$

となる. この切断空間の任意の元 s に対し

$$s' = \begin{cases} s, & X\cap U \text{の上で}, \\ 0, & X\setminus\overline{\operatorname{supp} s} \text{の上で} \end{cases}$$

とおこう. この定義は共通部分 $(X\cap U)\cap(X\setminus\overline{\operatorname{supp} s})=(X\cap U)\setminus\operatorname{supp} s$ の上で一致しており, 従って和集合 $(X\cap U)\cup(X\setminus\overline{\operatorname{supp} s})=X\setminus(\overline{\operatorname{supp} s}\setminus\operatorname{supp} s)$ の

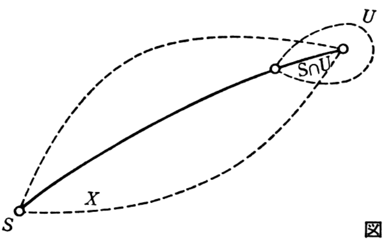


図 5.1

上の $\mathscr{F}$ の切断 s' が確定する. さて $\mathscr{F}$ は脆弱だからこの延長 $\tilde{s}\in\mathscr{F}(X)$ が存在する. $\operatorname{supp}\tilde{s}\subset\overline{\operatorname{supp} s}\subset S$ だから $\tilde{s}\in\mathscr{T}_S(\mathscr{F})(X)$ となり, これが求める延長であることがわかる. 証了.

ここで第1章§7に与えた層の完全列の概念を思い出し, 脆弱性との関連を調べよう.

補題 5.1.4　$\mathscr{F}', \mathscr{F}, \mathscr{F}''$ を X 上の層とし, $U\subset X$ を開集合, $S\subset X$ を局所閉集合とする.

a)　$0\to\mathscr{F}'\xrightarrow{h'}\mathscr{F}\xrightarrow{h}\mathscr{F}''$ が層の完全列ならば次の各々は $\boldsymbol{C}$-線型空間の完全列となる.

(5.1.2)　$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'(U) \xrightarrow{h'_U} \mathscr{F}(U) \xrightarrow{h_U} \mathscr{F}''(U),$$

(5.1.3)　$$0 \to \Gamma_S(X, \mathscr{F}') \to \Gamma_S(X, \mathscr{F}) \to \Gamma_S(X, \mathscr{F}'')$$

b)　$0\to\mathscr{F}'\xrightarrow{h'}\mathscr{F}\xrightarrow{h}\mathscr{F}''\to 0$ が層の完全列であり, 更に $\mathscr{F}'$ が脆弱層ならば, 次の

各々は$\boldsymbol{C}$-線型空間の完全列となる.

(5.1.4)　　$0 \to \mathscr{F}'(U) \xrightarrow{h'_U} \mathscr{F}(U) \xrightarrow{h_U} \mathscr{F}''(U) \to 0$

(5.1.5)　　$0 \to \Gamma_S(X, \mathscr{F}') \to \Gamma_S(X, \mathscr{F}) \to \Gamma_S(X, \mathscr{F}'') \to 0$

証明　a), b) いずれの場合も第一の列は既に注意したように第二の列の特別な場合である. そこで以下UをSの近傍とする.

a)　$s' \in \mathscr{F}'(U)$が$h'_U(s')=0$を満たすとせよ. h'の単射性によりs'がUの各点に定める芽s'_xは0に等しい. 故に層の性質FIにより$s'=0$となる. 同様の論法で$h_U \circ h'_U=0$も確かめられる. 最後に$s \in \mathscr{F}(U)$が$h_U(s)=0$を満たすとせよ. 層の列の完全性により各点$x \in U$において茎の間の列$0 \to \mathscr{F}'_x \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}''_x$は完全だから, 芽$s'_x \in \mathscr{F}'_x$で$h'(s'_x)=s_x$となるものが一意に存在する. 故に$s'_x$は相互にはり合わされ$\mathscr{F}'(U)$の元$s'$を定める. s'_xの一意性により, $\operatorname{supp} s' \subset \operatorname{supp} s \subset S$もわかる. これが$h'_U(s')=s$の答となる.

b)　h_Uが全射であることを示すのが残っている. $s'' \in \Gamma_S(U, \mathscr{F}'')$を与えられた元とし, これに対して次のような集合を考える:

$$\mathfrak{M} = \{(s, V);\ V \subset U \text{は開集合で } s \in \Gamma_{S \cap V}(V, \mathscr{F}), h_V(s) = s''|_V\}$$

自然な順序

$$(s_1, V_1) \succ (s_2, V_2) \Longleftrightarrow V_1 \supset V_2,\ \ s_1|_V = s_2$$

により$\mathfrak{M}$は所謂帰納的順序集合となる. $\mathfrak{M}$が空でないことを示そう. $x \in U$を任意に選ぶ. 茎での完全性から$s_x \in \mathscr{F}_x$で$h(s_x)=s''_x$なるものが存在する. これを言い換えれば, xの近傍V_xとその上の切断$s_x \in \mathscr{F}(V_x)$を適当に選べば$h_{V_x}(s_x)=s''|_{V_x}$となる. s_xの台がSに含まれるように修正しなければならない. $s_x|_{V_x \setminus S} \in \operatorname{Ker} h$なのでa)より$s' \in \mathscr{F}'(V_x \setminus S)$で$h'(s')=s_x|_{V_x \setminus S}$となるものがある. $\mathscr{F}'$の脆弱性によりs'を$\tilde{s}' \in \mathscr{F}'(V_x)$に延長すれば, $s_x - h'(\tilde{s}')$は求める修正で, $(s_x - h'(\tilde{s}'), V_x) \in \mathfrak{M}$となる.

故にZornの補題により$\mathfrak{M}$には極大元(s, V)が存在する. このとき$V=U$であることを示せば証明が終わる. もし$\exists x \in U \setminus V$なら, 上のように$x$の近傍$V_x$と$s_x \in \Gamma_{S \cap V_x}(V_x, \mathscr{F})$を選べば$(s_x, V_x) \in \mathfrak{M}$となる. $h(s|_{V \cap V_x} - s_x|_{V \cap V_x}) = s'|_{V \cap V_x} - s'|_{V \cap V_x} = 0$だから, a)により$s' \in \Gamma_{S \cap V \cap V_x}(V \cap V_x, \mathscr{F}')$で$h'(s')=s|_{V \cap V_x} - s_x|_{V \cap V_x}$となるものが存在する. $\mathscr{F}'$の脆弱性により補題5.1.3を用いてこの

s' を $\tilde{s}'\in\Gamma_{S\cap V_x}(V_x,\mathscr{F}')$ に延長し

$$\tilde{s}=\begin{cases} s, & V\text{の上で},\\ s_x+h'(\tilde{s}'), & V_x\text{の上で}\end{cases}$$

とおく．このとき $(\tilde{s}, V\cup V_x)$ は (s, V) より真に大きい $\mathfrak{M}$ の元となり不合理である．証了．

上の補題の a) に述べられた性質は通常，函手 Γ_S の**左完全性**という言葉で表わされているものである．$\mathscr{F}'$ が脆弱でない場合には列 $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ の完全性を仮定しても一般には(5.1.3)の完全性までしかわからない．実はこの最後の部分の不完全性を表現するために導入されたのが§3以下で解説される層のコホモロジーの概念なのである．

系 5.1.5 $0\to\mathscr{F}'\xrightarrow{h'}\mathscr{F}\xrightarrow{h}\mathscr{F}''\to 0$ を位相空間 X 上の層の完全列とする．このとき

a) $\mathscr{F}',\mathscr{F}$ が脆弱ならば $\mathscr{F}''$ も脆弱となる．

b) $\mathscr{F}',\mathscr{F}''$ が脆弱なら $\mathscr{F}$ も脆弱となる．

証明 $U\subset X$ を任意の開集合とする．いずれの場合も $\mathscr{F}'$ は脆弱だから，上の補題により次の可換図式の各行は完全となる

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{F}'(X) & \xrightarrow{h'_X} & \mathscr{F}(X) & \xrightarrow{h_X} & \mathscr{F}''(X) & \to & 0\\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho'_{UX}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{UX}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho''_{UX}} & & \\ 0 & \to & \mathscr{F}'(U) & \xrightarrow{h'_U} & \mathscr{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathscr{F}''(U) & \to & 0 \end{array}$$

さて a) の場合には h_U の他に ρ_{UX} が全射となる．故に $s''\in\mathscr{F}''(U)$ が与えられたとき $\mathscr{F}(X)$ の元 s で $h_U\circ\rho_{UX}(s)=s''$ となるものが存在する．可換性により $s''=\rho''_{UX}\circ h_X(s)$ でもあるから，$h_X(s)\in\mathscr{F}''(X)$ が求める s'' の延長となり，従って $\mathscr{F}''$ も脆弱である．

次に b) の場合には h_X の他に ρ''_{UX} が全射となる．故に $s\in\mathscr{F}(U)$ が与えられたとき $h_U(s)\in\mathscr{F}''(U)$ に対して $\tilde{s}\in\mathscr{F}(X)$ を適当に選べば $\rho''_{UX}\circ h_X(\tilde{s})=h_U(s)$ となる．故に可換性により $h_U\circ\rho_{UX}(\tilde{s})=h_U(s)$ となる．従って $\rho_{UX}(\tilde{s})-s\in\operatorname{Ker} h_U$ であるからこれはある $s'\in\mathscr{F}'(U)$ の h'_U による像となる．$\tilde{s}'\in\mathscr{F}'(X)$ をこの一つの延長とすれば，結局

$$\begin{aligned} s &= \rho_{UX}(\tilde{s})+(s-\rho_{UX}(\tilde{s})) = \rho_{UX}(\tilde{s})-h'_U(s') = \rho_{UX}(\tilde{s})-h'_U\circ\rho'_{UX}(\tilde{s}')\\ &= \rho_{UX}(\tilde{s}-h'_X(\tilde{s}')) \end{aligned}$$

となり，求める延長が見出された．証了．

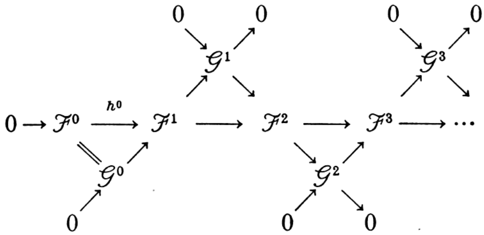
系 5.1.6　$0\to\mathscr{F}^0\xrightarrow{h^0}\mathscr{F}^1\xrightarrow{h^1}\cdots\to\mathscr{F}^r\xrightarrow{h^r}\mathscr{G}\to 0$ を X 上の層の完全列とする．もし $\mathscr{F}^j$，$0\leq j\leq r$ がすべて脆弱ならば，$\mathscr{G}$ も脆弱となる．更に，このとき次の列はいずれも完全となる．

$$0\to\mathscr{F}^0(U)\to\cdots\to\mathscr{F}^r(U)\to\mathscr{G}(U)\to 0$$

$$0\to\Gamma_S(X,\mathscr{F}^0)\to\cdots\to\Gamma_S X,\mathscr{F}^r)\to\Gamma_S(X,\mathscr{G})\to 0$$

証明　与えられた完全列は次のように斜めの短完全列に分解される．

(5.1.6)



ここに $\mathscr{G}^j=\mathrm{Image}\,h^j=\mathrm{Ker}\,h^{j+1}$ である．系 5.1.5 a) を斜めの短完全列に左の方から順番に適用してゆけば，各 $\mathscr{G}^j$ が脆弱であることがわかる．故に補題 5.1.4 により切断空間の短完全列

$$0\to\Gamma_S(X,\mathscr{G}^{j-1})\to\Gamma_S(X,\mathscr{F}^j)\to\Gamma_S(X,\mathscr{G}^j)\to 0$$

もすべて完全となる．これを (5.1.6) 図と逆の手順で一つに繋げれば上記の長完全列が得られる．証了．

定義 5.1.7　$\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層とする．$\mathscr{F}$ の一つの**脆弱分解**とは脆弱層 $\mathscr{L}^j$ を項とする完全列 $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots$ のことを言う．$j>r$ のとき $\mathscr{L}^j=0$ であるような最小の整数 r（がもしあればそれ）をこの分解の長さと言う．$\mathscr{F}$ の脆弱分解をすべて考えたとき，その長さの最小値を $\mathscr{F}$ の**脆弱次元**と呼び $\mathrm{fl.\,dim}\,\mathscr{F}$ で表わす．

この量は層 $\mathscr{F}$ の非脆弱性の度合を表わすものであり，具体的な層に対しては幾何学との結びつきにおいて重要な意味を持っている．

問 5.1.1　$\mathrm{fl.\,dim}\,\mathscr{F}=0\Longleftrightarrow\mathscr{F}$ は脆弱

補題 5.1.8 (Godement)　任意の層は脆弱分解を持つ．

証明　層 $\mathscr{F}$ が与えられたとき $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}$ が完全となるような脆弱層 $\mathscr{L}$ をまず作ろう．$C^0(\mathscr{F})$ を層 $\mathscr{F}$ の**不連続切断**の芽の作る層とする．すなわち

$$U\mapsto C^0(\mathscr{F})(U)=\{\text{写像 } s\colon U\to\coprod_{x\in U}\mathscr{F}_x \text{ で } s(x)\in\mathscr{F}_x \text{ を満たすもの}\}$$

"連続" な切断，すなわち普通の切断 $s\in\mathscr{F}(U)$ に対しては $s\colon U\ni x\mapsto s_x\in\coprod_{x\in U}\mathscr{F}_x$ により確かに $C^0(\mathscr{F})(U)$ の元が定まり，これより層の準同型 $\mathscr{F}\to C^0(\mathscr{F})$ が定義される．これが単射なことは $\mathscr{F}$ が FI を満たしていることから明らかである．$C^0(\mathscr{F})$ が脆弱なことも明らかであろう．

これで $0\to\mathscr{F}\to C^0(\mathscr{F})$ まで構成できた．次は商層 $C^0(\mathscr{F})/\mathscr{F}$ に対して上と同じ方法により $C^0(C^0(\mathscr{F})/\mathscr{F})$ を構成し，これを $C^1(\mathscr{F})$ で表わす．可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & 0\\
 & & & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & & & C^0(\mathscr{F})/\mathscr{F} & & \\
 & & & & & \nearrow & & \searrow & \\
0 & \to & \mathscr{F} & \longrightarrow & C^0(\mathscr{F}) & & \longrightarrow & & C^1(\mathscr{F})\\
 & & \| & \nearrow & & & & & \\
 & & \mathscr{F} & & & & & & \\
 & \nearrow & & & & & & & \\
0 & & & & & & & &
\end{array}$$

により $0\to\mathscr{F}\to C^0(\mathscr{F})\to C^1(\mathscr{F})$ は完全となる．以下これを繰り返せば良い．証了．

定義 5.1.9　上で構成した $\mathscr{F}$ の脆弱分解のことを $\mathscr{F}$ の**標準脆弱分解**と呼ぶ．

標準脆弱分解はとても具体的計算に役立つような物では無いが，その構成法が明快なため理論的にこれを用いると大変見通しが良くなることがある．例えば，二つの層の間に準同型 $h\colon\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ が存在するとき，これは明らかに不連続切断の写像 $h^0\colon C^0(\mathscr{F})\to C^0(\mathscr{G})$ を一意的に引き起こし，従って以下帰納的に

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathscr{F} & \longrightarrow & C^0(\mathscr{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathscr{F}) & \to & \cdots\\
 & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h^0} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} & & \\
0 & \to & \mathscr{G} & \longrightarrow & C^0(\mathscr{G}) & \longrightarrow & C^1(\mathscr{G}) & \to & \cdots
\end{array}$$

という可換図式が得られる．すなわち準同型が標準脆弱分解に一意的に持ち上げられる．

補題 5.1.10　$0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ を層の完全列をするとき，上のようにして誘導される列 $0\to C^j(\mathscr{F}')\to C^j(\mathscr{F})\to C^j(\mathscr{F}'')\to 0$ はすべて完全となる．従って完全可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{F}' & \longrightarrow & C^0(\mathcal{F}') & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}') & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{F} & \longrightarrow & C^0(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & C^0(\mathcal{F}'') & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}'') & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\tag{5.1.7}
$$

が得られる．

実際，$j=0$ のときの完全性を調べれば十分であるが，それももとの層の列の完全性から直ちに従う．

問 5.1.2 $\boldsymbol{R}^n$ 上の任意の不連続な函数が作る層 $\mathcal{F}$ は脆弱である．$\boldsymbol{R}^n$ 上の連続函数の作る層 C に対し $0\to C\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}/C\to 0$ は一つの脆弱分解となり，これより fl. dim $C=1$ がわかる．C の代わりに $\mathcal{E}$, $L_{1,loc}$ 等の層についても同様である．($\mathcal{F}/C$ 等の脆弱性については §5，例 5.5.14 をも参照せよ．) 層 $\mathcal{F}$ は層 C の標準脆弱分解の初項 $C^0(C)$ と同じか？

標準脆弱分解以外に自然な脆弱分解を得るのは大変困難なことである．特に具体的計算に役立つような脆弱分解は超函数の層 $\mathcal{B}$ を用いるもの以外殆ど知られていない．この意味で超函数の層 $\mathcal{B}$ が重要性を持って来るのである．ここではとりあえず脆弱層ではないがかなり性質の良い層を用いた分解として代表的なものを集めておこう (§7 参照)．なお本書ではこれらを超函数の基礎付けに用いる下心は無いので安心して読み飛ばされたい．

例 5.1.11 a) **de Rham 分解** $\boldsymbol{R}^n$ 上の定数層 $\boldsymbol{C}$ に対し

$$
0\to \boldsymbol{C}\longrightarrow \mathcal{E}^{(0)}\xrightarrow{d^0}\mathcal{E}^{(1)}\xrightarrow{d^1}\cdots\longrightarrow\mathcal{E}^{(n)}\to 0 \tag{5.1.8}
$$

ここに $\mathcal{E}^{(k)}$ は C^∞-係数 k 次微分形式の作る層であり d^k はそれに働く外微分作用素を表わしている．特に $\mathcal{E}^{(0)}=\mathcal{E}$ である．各 $\mathcal{E}^{(k)}$ は $\mathcal{E}$ と同様かなり柔軟性を持った層なので，この分解は層 $\boldsymbol{C}$ の性質を調べるのに役立つ．$\mathcal{E}$ の代わりに Schwartz の分布の層 $\mathcal{D}'$ を用いても良い．同様に $\boldsymbol{C}^n$ 上の定数層の正則微分形式による de Rham 分解

$$(5.1.9)\qquad 0\to \boldsymbol{C}\longrightarrow \mathcal{O}^{(0)}\xrightarrow{d^0}\mathcal{O}^{(1)}\xrightarrow{d^1}\cdots\longrightarrow\mathcal{O}^{(n)}\to 0$$

およびこれを $\boldsymbol{R}^n$ に制限した実解析係数の微分形式による de Rham 分解

$$(5.1.10)\qquad 0\to \boldsymbol{C}\longrightarrow \mathscr{A}^{(0)}\xrightarrow{d^0}\mathscr{A}^{(1)}\xrightarrow{d^1}\cdots\longrightarrow\mathscr{A}^{(n)}\to 0$$

も用いられる．正則函数の層はかなり融通の利かぬものだが，それでも定数層よりはずっとましである．これらの列の完全性は Poincaré の補題として知られている．要するに微分方程式系の局所存在定理である．微分形式の概念は座標不変なので，これらの分解はそれぞれ n 次元 C^∞(複素，或は実解析的)多様体の上でも同様に成り立つ．なお，後に我々は実解析多様体の上ではこれが超函数係数でも成り立つことを示すが(定理 7.3.3)，そうすれば $\boldsymbol{C}$ の脆弱分解の具体的な例が得られることになる．その証明法は次に述べるような形に一般化して行うもので，$\mathcal{E}$ や $\mathscr{A}$ に対しても通用する．

b)　**相対 de Rham 分解**　(x,t) を $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の座標とし，$\mathcal{E}$ を $\boldsymbol{R}^{n+m}$ 上の C^∞ 級函数の作る層，$\mathcal{E}_x,\mathcal{E}_t$ をそれぞれ変数 x，或は t のみに依存するその部分層とする．記号 $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{E}_t}\mathcal{E}_t{}^{(k)}$ により $\boldsymbol{R}^{n+m}$ 上の C^∞ 係数微分形式のうちで

$$\sum f_{j_1\cdots j_k}(x,t)dt_{j_1}\wedge\cdots\wedge dt_{j_k}$$

の形のもののみより成る層を表わそう．(ここではテンソル積の記号は気にするには及ばない．)このとき，

$$(5.1.11)\quad 0\to\mathcal{E}_x\longrightarrow\mathcal{E}\xrightarrow{d_t{}^0}\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{E}_t}\mathcal{E}_t{}^{(1)}\xrightarrow{d_t{}^1}\cdots\longrightarrow\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{E}_t}\mathcal{E}_t{}^{(m)}\to 0$$

は完全となる．ここに $d_t{}^k$ は変数 t に関する外微分である．同様の分解は $\mathcal{O}$ 及び $\mathscr{A}$ についても成り立つ．参考の為に述べておくと，これを座標不変な形に表わせば次のようになる．$\Phi: M\to N$ を二つの C^∞ 級多様体の間の C^∞ 級写像で，各点での Jacobi 行列が全射な線型写像となるようなものとする．(このような写像を滑らか(smooth)な射とも言う．)$\mathcal{E}_M{}^{(k)},\mathcal{E}_N{}^{(k)}$ をそれぞれ M,N 上の k 次微分形式とする．$\mathcal{E}_M{}^{(k)}=\overset{k}{\wedge}\mathcal{E}_M{}^{(1)}$ 等である．さらに，$\Phi^*\mathcal{E}_N{}^{(1)}=\mathcal{E}_M\otimes_{\Phi^{-1}(\mathcal{E}_N)}\Phi^{-1}\mathcal{E}_N{}^{(1)}$ は写像 Φ の繊維に沿って定数の 1 次微分形式，すなわち余接ベクトル場の層であり，$\mathcal{E}_\Phi{}^{(1)}=\mathcal{E}_M{}^{(1)}/\Phi^*\mathcal{E}_N{}^{(1)}$，より一般に $\mathcal{E}^{(k)}=\mathcal{E}_M{}^{(k)}/\Phi^*\mathcal{E}_N{}^{(1)}\wedge\mathcal{E}_M{}^{(k-1)}$ は写像 Φ に関する相対 k 次微分形式の層と呼ばれる．このとき M 上の通常の de Rham 分解から自然に商空間に移ることにより

$$(5.1.12)\quad 0 \to \Phi^{-1}\mathcal{E}_N \longrightarrow \mathcal{E}_M \xrightarrow{d_{\Phi}^0} \mathcal{E}_{\Phi}^{(1)} \xrightarrow{d_{\Phi}^1} \cdots \longrightarrow \mathcal{E}_{\Phi}^{(m)} \to 0$$

という完全列が得られる．ここに $m=\dim M-\dim N$ である．

同様の完全列は $\mathcal{O}$ や $\mathcal{A}$，更に $\mathcal{B}$ に対しても成り立つ．

c) **Dolbeault 分解** $\boldsymbol{C}^n$ を $\boldsymbol{R}^{2n}$ とみなし余接ベクトルの基底として $dz_1, \cdots, dz_n, d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_n$ を用いる．記号 $\mathcal{E}^{(0,k)}$ により $\boldsymbol{R}^{2n}$ 上の C^∞ 級 $(0,k)$-形式，すなわち

$$\sum f_{j_1,\cdots,j_k}(z,\bar{z})d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_k}$$

の形の局所表示を持つ微分形式の芽が作る層を表わす．また $\bar{\partial}^k$ により k 次の反正則外微分：

$$(5.1.13)\quad \bar{\partial}^k(f_{j_1\cdots j_k}(z,\bar{z})d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_k}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{j_1\cdots j_k}(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_k}$$

を表わす．このとき，次のような層の完全列が得られる：

$$(5.1.14)\quad 0 \to \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E}^{(0,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}^0} \mathcal{E}^{(0,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}^1} \cdots \longrightarrow \mathcal{E}^{(0,n)} \to 0$$

$\mathcal{E}$ を $\mathcal{D}'$ や $\mathcal{A}$ に変えても同様である．後にわれわれはそれを $\mathcal{B}$ に変えて，正則函数の層 $\mathcal{O}$ の長さ n の脆弱分解を構成する．これらのことは $\boldsymbol{C}^n$ の代わりに一般の n 次元複素多様体の上でも成立する．

§2 ホモロジー代数の準備

この節では複素数体上のホモロジー代数に関する必要最小限の事項をまとめておく．長くなるので証明を細部まできちんと書かなかったところもあるが，省略したところはホモロジー代数の教科書に頼らなくとも再現できる易しい部分である．最初は細部にこだわらずに概念把握に主眼を置いて通読し，後で興味に応じて細部を補ってみるのも一法であろう．なお本書で用いるのは主にコホモロジーなので，複体の矢印が次数の増大する向きについたものについて解説を述べる．

定義 5.2.1 $\boldsymbol{C}$-線型空間の列 $K^n, n\in\boldsymbol{Z}$，およびそれらの間の $\boldsymbol{C}$-線型写像 $d^n:K^n\to K^{n+1}, n\in\boldsymbol{Z}$，で $d^n\circ d^{n-1}=0$ を満たすものが与えられたとき，これを $\boldsymbol{C}$-線型空間の**余鎖複体**と呼び $K^\cdot$ あるいは$(K^\cdot, d^\cdot)$ と記す．K^n の元を **n 次余鎖**と呼ぶ．特に断らぬ限り以下においては常に $n<0$ に対し $K^n=0$ と仮定し，従

って実質的な対象としては $n\geq 0$ の部分のみを考える:

$$(5.2.1)\qquad 0\to K^0\xrightarrow{d^0}K^1\xrightarrow{d^1}\cdots\xrightarrow{d^{n-1}}K^n\xrightarrow{d^n}\cdots$$

各 n について Ker d^n を n 次元余輪体の空間, その元を **n 次元余輪体**と呼ぶ. また Image d^{n-1} を n 次元余境界の空間, その元を **n 次元余境界** と呼ぶ. 複体の条件 $d^n\circ d^{n-1}=0$ より Image $d^{n-1}\subset$ Ker d^n であるから商空間 Ker d^n/Image d^{n-1} が作れるが, これを複体 $K^{\cdot}$ の **n 次コホモロジー**と呼び $H^n(K^{\cdot})$ で表わす. $H^n(K^{\cdot})$ は我々にとっては線型空間であるが, 慣例に倣って以下我々はこれをコホモロジー“群”とも呼ぶことにしよう.

以上の定義は K^n を一定の位相空間 X 上の $\boldsymbol{C}$-線型空間の層で, また d^n を層の準同型でおき換えても意味を持つ. 実際, 準同型写像の核や像, さらには商空間を作る形式的操作について両者の間に差は無いからである. 同じ理由によりこれから述べる諸結果も両者に共通である. 故に以下においては $\boldsymbol{C}$-線型空間の場合に限って話をすることにする.

定義から明らかなように, $H^n(K^{\cdot})=0$ とは, 列(5.2.1)が項 K^n において完全なことを意味する. すなわち, コホモロジーとは写像の列の不完全性の度合を測る概念である.

定義 5.2.2 $K^{\cdot}, K'^{\cdot}$ を二つの複体とする. 複体の射 $h:K^{\cdot}\to K'^{\cdot}$ とは, $\boldsymbol{C}$-線型写像 $h^n:K^n\to K'^n$ の族で次の図式を可換にするもののことを言う.

$$(5.2.2)\qquad \begin{array}{ccccccc} 0\to & K^0 & \xrightarrow{d^0} & K^1 & \xrightarrow{d^1} & K^2 & \to\cdots \\ & h^0\downarrow & & h^1\downarrow & & h^2\downarrow & \\ 0\to & K'^0 & \xrightarrow{d'^0} & K'^1 & \xrightarrow{d'^1} & K'^2 & \to\cdots \end{array}$$

二つの複体射の結合は各次数における対応成分の結合として自然に定義できる. また複体の射の列

$$(5.2.3)\qquad 0\to K'^{\cdot}\xrightarrow{h'}K^{\cdot}\xrightarrow{h}K''^{\cdot}\to 0$$

が完全とは, 各 n について $0\to K'^n\xrightarrow{h'^n}K^n\xrightarrow{h^n}K''^n\to 0$ が $\boldsymbol{C}$-線型写像の完全列となることを云う. すなわち, 可換図式

$$
(5.2.4) \qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots \to & & K'^{n-1} & \xrightarrow{d'^{n-1}} & K'^{n} & \xrightarrow{d'^{n}} & K'^{n+1} & \to \cdots \\
 & & \downarrow h'^{n-1} & & \downarrow h'^{n} & & \downarrow h'^{n+1} & & \\
\cdots \to & & K^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & K^{n} & \xrightarrow{d^{n}} & K^{n+1} & \to \cdots \\
 & & \downarrow h^{n-1} & & \downarrow h^{n} & & \downarrow h^{n+1} & & \\
\cdots \to & & K''^{n-1} & \xrightarrow{d''^{n-1}} & K''^{n} & \xrightarrow{d''^{n}} & K''^{n+1} & \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

において各縦列が完全であるようなものを言う.

補題 5.2.3 複体の射 $h:K^{\cdot}\to K'^{\cdot}$ から，コホモロジーの間の C-線型写像 $h^n{}_*:H^n(K^{\cdot})\to H^n(K'^{\cdot})$ が自然に誘導される.

証明 $K^{\cdot}$ の n 次余輪体 $z^n\in\ker d^n$ に対し $h^n(z^n)$ は $K'^{\cdot}$ の余輪体となる. 実際(5.2.2)の可換性から

$$d'^n\circ h^n(z^n)=h^{n+1}\circ d^n(z^n)=h^{n+1}(0)=0$$

同様に $K^{\cdot}$ の n 次余境界も $K'^{\cdot}$ の n 次余境界に写ることがわかるから，商空間の間の写像 $h^n{}_*:H^n(K^{\cdot})\to H^n(K'^{\cdot})$ が誘導される. 証了.

補題 5.2.4(蛇の補題) 複体射の完全列(5.2.3)から，C-線型写像の長完全列

$$
(5.2.5) \qquad
\begin{aligned}
&0\to H^0(K'^{\cdot})\xrightarrow{h'^0{}_*}H^0(K^{\cdot})\xrightarrow{h^0{}_*}H^0(K''^{\cdot})\\
&\xrightarrow{\delta^0}H^1(K'^{\cdot})\xrightarrow{h'^1{}_*}H^1(K^{\cdot})\xrightarrow{h^1{}_*}H^1(K''^{\cdot})\\
&\xrightarrow{\delta^1}\cdots
\end{aligned}
$$

が得られる. ここに $h'^n{}_*, h^n{}_*$ は h', h から前補題により誘導される写像であり，δ^n は以下の証明中において定義される.

証明 $z''^n\in\mathrm{Ker}\,d''^n$ で代表されるコホモロジーの元 $[z''^n]\in H^n(K''^{\cdot})$ に対し(5.2.4)の第 n 縦列の完全性により $c^n\in K^n$ で $h^n(c^n)=z''^n$ となるものを選ぶ.

$$h^{n+1}\circ d^n(c^n)=d''^n\circ h^n(c^n)=d''^n(z''^n)=0$$

だから，第 $n+1$ 縦列の完全性により $c'^{n+1}\in K'^{n+1}$ で $h'^{n+1}(c'^{n+1})=d^n(c^n)$ となるものが存在する.

$$h'^{n+2}\circ d'^{n+1}(c'^{n+1})=d^{n+1}\circ h'^{n+1}(c'^{n+1})=d^{n+1}\circ d^n(c^n)=0$$

だから，第 $n+2$ 縦列の完全性より $d'^{n+1}(c'^{n+1})=0$. すなわち $c'^{n+1}\in \mathrm{Ker}\, d'^{n+1}$ である．この余輪体の剰余類として定まるコホモロジーの元 $[c'^{n+1}]\in H^{n+1}(K'^{\cdot})$ を $\delta^n([z''^n])$ と定めると良い．δ^n の定義が途中の元の選び方によらぬこと，及び (5.2.5) が完全列になることの検証は省略する．

問 5.2.1 可換図式 (5.2.4) に選んだ元を次々に書き込むやり方で上の補題の証明の残りを遂行せよ．

系 5.2.5 (九補題) 次のような可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & K^0 & \longrightarrow & K^1 & \longrightarrow & K^2 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & L^0 & \longrightarrow & L^1 & \longrightarrow & L^2 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M^0 & \longrightarrow & M^1 & \longrightarrow & M^2 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

各列は完全，また各行は複体をなし，且つ一つを除き完全と仮定すれば，実はその一つも完全となる．

証明 前補題により次の長完全列が存在する．

$$0\to H^0(K^{\cdot})\to H^0(L^{\cdot})\to H^0(M^{\cdot})\to H^1(K^{\cdot})\to\cdots\to H^2(L^{\cdot})\to H^2(M^{\cdot})\to 0$$

故に例えば第一，二行が完全なら $H^j(K^{\cdot})=H^j(L^{\cdot})=0$, $j=0,1,2$, 従ってこれから $H^j(M^{\cdot})=0$, $j=0,1,2$ を得る等々．

補題 5.2.6 (五補題) 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^1 & \longrightarrow & K^2 & \longrightarrow & K^3 & \longrightarrow & K^4 & \longrightarrow & K^5\\
h^1\downarrow & & h^2\downarrow & & h^3\downarrow & & h^4\downarrow & & h^5\downarrow\\
L^1 & \longrightarrow & L^2 & \longrightarrow & L^3 & \longrightarrow & L^4 & \longrightarrow & L^5
\end{array}$$

において二つの行は完全とする．もし h^2, h^4 が同型で，かつ h^1 が全射，h^5 が単射ならば，h^3 は同型となる．

証明は図式追跡で長いが，やれば必ずできるので省略する．

補題 5.2.7 (Weil) 次のような可換図式を考える．

$$
(5.2.6)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L^0 & \xrightarrow{d^0} & L^1 & \xrightarrow{d^1} & L^2 & \xrightarrow{d^2} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda^0} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda^1} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda^2} & & \\
0 \to M^0 & \xrightarrow{\mu^0} & K^{00} & \xrightarrow{d^{00}} & K^{01} & \xrightarrow{d^{01}} & K^{02} & \xrightarrow{d^{02}} & \cdots \\
{\scriptstyle\delta^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta^{00}} & & \downarrow{\scriptstyle\delta^{01}} & & \downarrow{\scriptstyle\delta^{02}} & & \\
0 \to M^1 & \xrightarrow{\mu^1} & K^{10} & \xrightarrow{d^{10}} & K^{11} & \xrightarrow{d^{11}} & K^{12} & \xrightarrow{d^{12}} & \cdots \\
{\scriptstyle\delta^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta^{10}} & & \downarrow{\scriptstyle\delta^{11}} & & \downarrow{\scriptstyle\delta^{12}} & & \\
0 \to M^2 & \xrightarrow{\mu^2} & K^{20} & \xrightarrow{d^{20}} & K^{21} & \xrightarrow{d^{21}} & K^{22} & \xrightarrow{d^{22}} & \cdots \\
{\scriptstyle\delta^2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta^{20}} & & \downarrow{\scriptstyle\delta^{21}} & & \downarrow{\scriptstyle\delta^{22}} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

この図式の各行と各列は複体を成し，列は第1列を除きすべて完全とする．このとき各nについて

$$(5.2.7)\qquad H^n(M^\cdot)\to H^n(L^\cdot)$$

という写像が自然に定まる．さらに，もし図式(5.2.6)の行が第一行を除いて完全ならば，この写像は同型となる．

証明　$z^n\in M^n$で$\delta^n(z^n)=0$を満たすものをとる．$\delta^{n0}\circ\mu^n(z^n)=\mu^{n+1}\circ\delta^n(z^n)=0$だから，項$K^{n0}$における第一列の完全性により$x^{n-1,0}\in K^{n-1,0}$で$\delta^{n-1,0}(x^{n-1,0})=\mu^n(z^n)$となるものが存在する．次に$\delta^{n-1,1}\circ d^{n-1,0}(x^{n-1,0})=d^{n,0}\circ\delta^{n-1,0}(x^{n-1,0})=d^{n,0}\circ\mu^n(z^n)=0$より項$K^{n-1,1}$における第2列の完全性を用いて$x^{n-2,1}\in K^{n-2,1}$で$\delta^{n-2,1}(x^{n-2,1})=d^{n-1,0}(x^{n-1,0})$を満たすものが選べる．この操作を繰返せば，遂にある元$y^n\in L^n$で$d^n(y^n)=0$を満たすものに到達する．y^nの定めるコホモロジーの元$[y^n]\in H^n(L^\cdot)$が途中の選び方に依存しないことは，今たどった道より一次低い道による図式追跡で容易に証明される．更に，行の方にも同様の完全性があれば，今と逆の操作が可能となり，従って(5.2.7)は同型となる．証了．

上の補題の適用に関して，予め次のことを注意しておくのは後に役に立つであろう．すなわち，写像(5.2.7)をある次元nについて得るには，証明を見ればわかるように列全体の完全性は必要ではなく，少くとも$j+k=n-1, n$なる項$K^{j,k}$における完全性があれば十分である．さらに，同型を得るための条件

についても，行の完全性をこれらの項についてのみ要求しておけば足りる．

次に複体の帰納系 $\{K_\lambda^\cdot\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考えよう．これは，有向集合 Λ を添字に持つ複体の族で，$\lambda\leq\mu$ なる対に対して複体の射 $h_{\mu\lambda}: K_\lambda^\cdot\to K_\mu^\cdot$ が定義され，$\lambda\leq\mu\leq\nu$ のとき鎖の条件 $h_{\nu\lambda}=h_{\nu\mu}\circ h_{\mu\lambda}$ が満たされているようなものである．このとき帰納極限をとることにより $\varinjlim K_\lambda^n$ を項に持つ新しい複体 $K^\cdot=\varinjlim K_\lambda^\cdot$ が得られる．(帰納極限の概念の定義は，第1章 p. 9，参考 1. 1 にある．そこでは添え字集合の有向系として Ω の複素近傍の全体 $\mathfrak{U}=\{U\}$ が用いられており順序 $U\leq V$ は $U\supset V$ で定義されているが，一般化は容易である．) 一方 $h_{\mu\lambda}$ は写像 $h_{\mu\lambda*}$: $H^n(K_\lambda^\cdot)\to H^n(K_\mu^\cdot)$ を引き起こし，これにより $\{H^n(K_\lambda^\cdot)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は $\boldsymbol{C}$-線型空間の帰納系となる．

補題 5.2.8 上の状況において $\varinjlim_\lambda H^n(K_\lambda^\cdot)=H^n(\varinjlim_\lambda K_\lambda^\cdot)$ が成り立つ．

証明 まず始めに $0\to K_\lambda^0\to K_\lambda^1\to K_\lambda^2\to 0$ という短い列がすべての λ について完全という特別の場合を考える．このときは良く知られているように帰納極限函手の完全性(即ち，完全列を再び完全列に写す性質)により

$$0\to \varinjlim_\lambda K_\lambda^0\to \varinjlim_\lambda K_\lambda^1\to \varinjlim_\lambda K_\lambda^2\to 0 \qquad (5.2.8)$$

も完全となる．一般の場合には，もとの複体

$$\cdots\to K_\lambda^{n-1}\xrightarrow{d_\lambda^{n-1}} K_\lambda^n\xrightarrow{d_\lambda^n} K_\lambda^{n+1}\to\cdots$$

を短完全列

$$0\to \mathrm{Ker}\, d_\lambda^n\longrightarrow K_\lambda^n\xrightarrow{d_\lambda^n}\mathrm{Image}\, d_\lambda^n\to 0 \qquad (5.2.9)$$

に分解する．ところで帰納極限複体を

$$\cdots\to K^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}} K^n\xrightarrow{d^n} K^{n+1}\to\cdots$$

で表わすとき，$\varinjlim_\lambda \mathrm{Ker}\, d_\lambda^n=\mathrm{Ker}\, d^n$ および $\varinjlim_\lambda \mathrm{Image}\, d_\lambda^n=\mathrm{Image}\, d^n$ が成り立つことがわかる．実際，帰納極限の意味とその函手としての完全性から，

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to \varinjlim_\lambda \mathrm{Ker}\, d_\lambda^n & \longrightarrow & K^n & \xrightarrow{d^n} & \varinjlim_\lambda \mathrm{Image}\, d_\lambda^n & \to 0 \\ & & & \searrow^{d^n} & \cap\downarrow & \\ & & & & K^{n+1} & \end{array}$$

という完全な行を持つ可換図式を得るからである．故にもう一つの完全列

(5.2.10) $$0 \to \mathrm{Image}\, d_\lambda{}^{n-1} \to \mathrm{Ker}\, d_\lambda{}^n \to H^n(K_\lambda^\cdot) \to 0$$

から帰納極限に移って

$$0 \to \mathrm{Image}\, d^{n-1} \to \mathrm{Ker}\, d^n \to \varinjlim_\lambda H^n(K_\lambda^\cdot) \to 0$$

という完全列を得る．すなわち，$H^n(\varinjlim_\lambda K_\lambda^\cdot) \cong \varinjlim_\lambda H^n(K_\lambda^\cdot)$ を得る．証了．

問 5.2.2 帰納極限函手の完全性を帰納極限の定義に戻って証明してみよ．

§3 脆弱分解によるコホモロジー

ホモロジー代数の一般論を層の準同型の複体に適用してみよう．Xを位相空間，$S \subset X$をその局所閉集合とする．$\mathscr{F}$をX上の層とする．補題5.1.8の証明で作られた$\mathscr{F}$の標準脆弱分解から項$\mathscr{F}$を取り除いて得られる層の準同型の複体

(5.3.1) $$0 \to C^0(\mathscr{F}) \to C^1(\mathscr{F}) \to C^2(\mathscr{F}) \to \cdots$$

を前節の記号法に従い$C^\cdot(\mathscr{F})$と略記しよう．(簡単のため分解自身に対しても以後$0 \to \mathscr{F} \to C^\cdot(\mathscr{F})$という略記法を用いることにする.）これから切断空間の複体

(5.3.2) $\Gamma_S(X, C^\cdot(\mathscr{F}))$:

$$0 \to \Gamma_S(X, C^0(\mathscr{F})) \to \Gamma_S(X, C^1(\mathscr{F})) \to \Gamma_S(X, C^2(\mathscr{F})) \to \cdots$$

が得られるが，補題5.1.4の後で注意したようにこの列はもとの(5.3.1)が完全な項においても完全とは限らない．

定義 5.3.1 複体(5.3.2)のn次コホモロジーを

(5.3.3) $$H^n{}_S(X, \mathscr{F}) = H^n(\Gamma_S(X, C^\cdot(\mathscr{F}))), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

と記し，対$(X, X \setminus S)$の$\mathscr{F}$-係数n次**相対コホモロジー**，あるいは位相空間Xの部分空間Sに台を持つ$\mathscr{F}$-係数n次**局所コホモロジー**と呼ぶ．特に$S=U$が開集合のときは単に

(5.3.4) $$H^n(U, \mathscr{F}) = H^n(\Gamma(U, C^\cdot(\mathscr{F})))$$

と記し，開集合Uの$\mathscr{F}$-係数n次(絶対，あるいは大域)コホモロジーと呼ぶ．

これらは函手Γ_S，或はΓの不完全性の度合を表わすものであり，一般にそれらの**右n次導来函手**と呼ばれるものに相当する．定義から直ちに計算でき

るのは，

系 5.3.2 任意の層 $\mathscr{F}$ について，$H^0{}_S(X,\mathscr{F})=\Gamma_S(X,\mathscr{F})$ となる．また $\mathscr{F}$ が脆弱ならば $H^n{}_S(X,\mathscr{F})=0$，$n\geq 1$ となる．

実際，補題 5.1.4 により

$$0\to\Gamma_S(X,\mathscr{F})\to\Gamma_S(X,C^0(\mathscr{F}))\xrightarrow{d^0}\Gamma_S(X,C^1(\mathscr{F}))$$

まではいつでも完全だから，0 次コホモロジーの定義により

$$H^0{}_S(X,\mathscr{F}) = \mathrm{Ker}\, d^0 = \Gamma_S(X,\mathscr{F})$$

となる．また $\mathscr{F}$ が脆弱ならば，その標準脆弱分解を任意の長さで

$$0\to\mathscr{F}\to C^0(\mathscr{F})\to C^1(\mathscr{F})\to\cdots\to C^{n+1}(\mathscr{F})\to\mathrm{Image}\, d^{n+1}\to 0$$

と切断したとき，系 5.1.6 により最後の項も脆弱層で，対応する切断空間の列

$$0\to\Gamma_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathscr{F})\to\Gamma_S(X,C^0(\mathscr{F}))\to\Gamma_S(X,C^1(\mathscr{F}))\to\cdots\to\Gamma_S(X,C^n(\mathscr{F}))$$
$$\to\Gamma_S(X,C^{n+1}(\mathscr{F}))$$

も完全となる．故に $H^n{}_S(X,\mathscr{F})=0$ となる．

一般に S を含む任意の開集合 U に対し $\Gamma_S(X,\mathscr{F})=\Gamma_S(U,\mathscr{F})=\Gamma_S(U,\mathscr{F}|_U)$ であったこと，及び $C^\cdot(\mathscr{F})|_U=C^\cdot(\mathscr{F}|_U)$ が明らかに成り立つことに注意すれば，ここでも $H^n{}_S(X,\mathscr{F})=H^n{}_S(U,\mathscr{F}|U)$ となることが直ちにわかる．従ってこれを $H^n{}_S(U,\mathscr{F})$ と書いても良いであろう．

層の準同型 $h:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ は，§1 で述べたようにこれらの層の標準脆弱分解の間の複体の射に一意的に持ち上げられ，従って補題 5.2.3 によりコホモロジー間の線型写像 $h^n{}_*:H^n{}_S(X,\mathscr{F})\to H^n{}_S(X,\mathscr{G})$ が確定する．もとの写像 h が同型ならこの誘導された写像も同型となることは明らかであろう．

問 5.3.1 $f:X\to Y$ を位相同型，$\boldsymbol{C}_X$，$\boldsymbol{C}_Y$ をそれぞれの空間上の茎 $\boldsymbol{C}$ を持つ定数層とすれば，$H^n(X,\boldsymbol{C}_X)\cong H^n(Y,\boldsymbol{C}_Y)$ がすべての n について成り立つことを示せ．

次に標準脆弱分解を他の分解でおき換えることを考えよう．

定理 5.3.3 $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^\cdot$ を $\mathscr{F}$ の任意の**分解**(即ち，$\mathscr{F}$ を初項とする層の長完全列) とする．もし固定した局所閉集合 $S\subset X$ について

(5.3.5) $$H^n{}_S(X,\mathscr{L}^j) = 0,\qquad n\geq 1, \forall j$$

が成り立っていれば，この S に関して

$$H^n{}_S(X,\mathscr{F}) = H^n(\Gamma_S(X,\mathscr{L}^{\cdot})), \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{5.3.6}$$

即ち，コホモロジーの計算をこの分解を用いて計算することができる．特に，各 $\mathscr{L}^j$ が脆弱層ならば，任意の S について(5.3.5)が成り立つので，相対コホモロジーは任意の脆弱分解を用いて計算できる．

証明 各 $\mathscr{L}^j$ に対しその標準脆弱分解 $0\to\mathscr{L}^j\to C^{\cdot}(\mathscr{L}^j)$ を構成する．完全列 $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^{\cdot}$ を短完全列に分解したものに補題5.1.10を適用し再び貼り合わせれば，次のような完全可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathscr{F} & \longrightarrow & C^0(\mathscr{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathscr{F}) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathscr{L}^0 & \longrightarrow & C^0(\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & C^1(\mathscr{L}^0) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathscr{L}^1 & \longrightarrow & C^0(\mathscr{L}^1) & \longrightarrow & C^1(\mathscr{L}^1) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array} \tag{5.3.7}$$

これから切断の空間に移ることにより，次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & \longrightarrow & \Gamma_S(X,C^0(\mathscr{F})) & \longrightarrow & \Gamma_S(X,C^1(\mathscr{F})) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \Gamma_S(X,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_S(X,C^0(\mathscr{L}^0)) & \longrightarrow & \Gamma_S(X,C^1(\mathscr{L}^0)) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \Gamma_S(X,\mathscr{L}^1) & \longrightarrow & \Gamma_S(X,C^0(\mathscr{L}^1)) & \longrightarrow & \Gamma_S(X,C^1(\mathscr{L}^1)) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array} \tag{5.3.8}$$

ここで第1列を除く各縦列は系5.1.6により完全，また第1行を除く各行は仮定(5.3.5)より完全となる．故にWeilの補題により

$$H^n(\Gamma_S(X,\mathscr{L}^{\cdot})) \to H^n{}_S(X,\mathscr{F}) \tag{5.3.9}$$

という自然な同型写像が存在する．証了．

注意 上の定理において，もし $\mathscr{L}^{\cdot}$ が条件(5.3.5)を満たしていなくても(5.3.8)の第1列を除く各縦列は常に完全である．故にWeilの補題によれば，(5.3.9)という自然な写像は如何なる完全列 $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^{\cdot}$ に対しても存在することがわかる．このことは後にしばしば用いられるであろう．また，Weilの補題の後で述べた注意により，(5.3.9)がある次元 n について同型となるためには，

例えば $H^k{}_S(X, \mathcal{L}^j)=0$ が $j+k=n-1, n$ なる j, k について成り立っていれば十分であることがわかる.

次にコホモロジーの概念を層化することを考えよう.

定義 5.3.4 $\mathcal{F}$ を位相空間 X 上の層, $S \subset X$ を局所閉集合とする. $\mathcal{F}$ の **n 次導来層** $\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F})$ を次の準層に同伴する層として定義する:

$$X \supset U \longmapsto H^n{}_{S \cap U}(U, \mathcal{F}) \tag{5.3.10}$$

(佐藤の用語法ではこれを $\mathcal{F}$ の n 次 (**解析的**) **分布**と呼び, $\mathcal{D}ist^n(S, \mathcal{F})$ と記す.)

$\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F})$ は定義によれば X 上の層だが, 先に注意した様に $H^n{}_{S \cap U}(U, \mathcal{F})$ は $S \cap U$ のみにより定まるので, これを

$$S \cap U \longmapsto H^n{}_{S \cap U}(U, \mathcal{F})$$

と考え, S 上の層とみなすこともできる. $S \cap U = \phi$ なる $U \subset X$ に対しては, 容易にわかる様に $\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F})(U)=0$ であるから, この方が自然でもある.

上の定義は切断空間を径由せず層の圏の内だけで述べることもできる. すなわち, $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}^{\cdot}$ を一つの脆弱分解とすれば, 各項に $\mathcal{T}_S(\cdot)$ を施すことにより

$$\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^{\cdot}) : 0 \to \mathcal{T}_S(\mathcal{L}^0) \xrightarrow{d^0} \mathcal{T}_S(\mathcal{L}^1) \xrightarrow{d^1} \cdots \tag{5.3.11}$$

という層の複体が得られる. このとき $\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F}) = H^n(\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^{\cdot}))$ である. 実際, 前層の層化の定義により

$$\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F})_x = \varinjlim_{U \ni x} H^n{}_{S \cap U}(U, \mathcal{F})$$

であるが, 帰納極限函手の完全性 (補題 5.2.8) によりこの最後のものは

$$\varinjlim_{U \ni x} H^n(\Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^{\cdot})) = H^n(\varinjlim_{U \ni x} \Gamma_{S \cap U}(U, \mathcal{L}^{\cdot})) = H^n(\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^{\cdot})_x)$$

に等しい. つまり $\mathcal{H}^n{}_S$ は $\mathcal{T}_S$ の n 次右導来函手に相当している.

問 5.3.2 $S=U$ が開集合のときは任意の層 $\mathcal{F}$ に対し U 上の層として常に $\mathcal{H}^n{}_U(\mathcal{F})=0$, $n \geq 1$, となることを示せ.

$\mathcal{H}^0{}_S(\mathcal{F}) = \mathcal{T}_S(\mathcal{F})$ については既に注意したように前層 (5.3.10) がいつでも層となっているが, 一般の $\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F})$, $n \geq 1$ については必ずしもそうでは無い. 次の補題で一つの十分条件を与えよう. $\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F})$ の切断の空間を具体的に知るこ

とはしばしば必要となるので，これは重要である．

補題 5.3.5　もし $\mathscr{H}^j{}_S(\mathscr{F})=0$ が $0\leq j\leq n-1$ について成り立てば，前層(5.3.10)は層となり，従って $\mathscr{H}^n{}_S(\mathscr{F})(U)=H^n{}_{S\cap U}(U,\mathscr{F})$ となる．

証明　仮定により層の複体(5.3.11)は第 $n-1$ 項まで完全である．そこで $\mathscr{I}=\mathrm{Image}\,d^{n-1}$ とおこう．

$$0\to\mathscr{T}_S(\mathscr{L}^0)\to\mathscr{T}_S(\mathscr{L}^1)\to\cdots\to\mathscr{T}_S(\mathscr{L}^{n-1})\to\mathscr{I}\to 0$$

という完全列が得られるが，補題 5.1.3 により各 $\mathscr{T}_S(\mathscr{L}^j)$ は脆弱，従って系 5.1.6 により $\mathscr{I}$ も脆弱となり，更にこの開集合 $U\subset X$ 上の切断空間の列

$$0\to\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^0)\to\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^1)\to\cdots\to\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^{n-1})\to\mathscr{I}(U)\to 0$$

も完全となる．図式

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^{n-1}) & & \xrightarrow{d^{n-1}} & & \Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^n)\\
& \searrow & & \nearrow & \\
& & \mathscr{I}(U) & & \\
& \nearrow & & \searrow & \\
0 & & & & 0
\end{array}$$

の可換性によりこれは $\mathscr{I}(U)=d^{n-1}(\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^{n-1}))$ であることを示す．

次に(5.3.11)において $\mathscr{Z}=\mathrm{Ker}\,d^n$ とおこう．$0\to\mathscr{Z}\to\mathscr{T}_S(\mathscr{L}^n)\to\mathscr{T}_S(\mathscr{L}^{n+1})$ は完全だから，補題 5.1.4 a)により

$$0\to\mathscr{Z}(U)\to\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^n)\xrightarrow{d^n}\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^{n+1})$$

も完全となる．故に $\mathscr{Z}(U)=\mathrm{Ker}\,\{d^n:\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^n)\to\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^{n+1})\}$ である．そこで最後に $0\to\mathscr{I}\to\mathscr{Z}\to\mathscr{H}^n{}_S(\mathscr{F})\to 0$ という完全列を考察しよう．上に注意した様に $\mathscr{I}$ は脆弱だから，補題 5.1.4 b)により

$$0\to\mathscr{I}(U)\to\mathscr{Z}(U)\to\mathscr{H}^n{}_S(\mathscr{F})(U)\to 0$$

が完全となる．故に $\mathscr{H}^n{}_S(\mathscr{F})(U)=\mathscr{Z}(U)/\mathscr{I}(U)=H^n{}_{S\cap U}(U,\mathscr{F})$ となる．証了．

以上に述べて来た層のコホモロジーは所謂コホモロジー公理を満たす．これを定理の形にまとめておこう．

定理 5.3.6(コホモロジー論)　$\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層，$S\subset X$ を局所閉集合，$F\subset S$ を S の閉部分集合とする．

a)　(切除定理)　開集合 $U\supset S$ に対し $H^n{}_S(X,\mathscr{F})=H_S{}^n(U,\mathscr{F}|_U)$

b)　$H^0{}_S(X,\mathscr{F})=\Gamma_S(X,\mathscr{F})$

c)　脆弱層 $\mathscr{F}$ に対し　$H^n{}_S(X,\mathscr{F})=0,\quad n\geq 1.$

d) (基本長完全列)

(5.3.12)
$$0 \to H^0{}_F(X, \mathcal{F}) \to H^0{}_S(X, \mathcal{F}) \to H^0{}_{S\setminus F}(X, \mathcal{F}) \to H^1{}_F(X, \mathcal{F}) \to H^1{}_S(X, \mathcal{F}) \to H^1{}_{S\setminus F}(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

特に $S=U$ が開集合の場合には，この列は

(5.3.13)
$$0 \to H^0{}_F(U, \mathcal{F}) \to H^0(U, \mathcal{F}) \to H^0(U\setminus F, \mathcal{F}) \to H^1{}_F(U, \mathcal{F}) \to H^1(U, \mathcal{F}) \to H^1(U\setminus F, \mathcal{F}) \to \cdots$$

となる．

e) $0\to\mathcal{F}'\xrightarrow{h'}\mathcal{F}\xrightarrow{h}\mathcal{F}''\to 0$ を X 上の層の完全列とすれば，次のコホモロジー長完全列が成り立つ：

(5.3.14)
$$0 \to H^0{}_S(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{h'_*{}^0} H^0{}_S(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{h_*{}^0} H^0{}_S(X, \mathcal{F}'') \to H^1{}_S(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{h'_*{}^1} H^1{}_S(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{h_*{}^1} H^1{}_S(X, \mathcal{F}'') \to \cdots$$

同様に

(5.3.15)
$$0 \to \mathcal{H}^0{}_S(\mathcal{F}') \xrightarrow{h'_*{}^0} \mathcal{H}^0{}_S(\mathcal{F}) \xrightarrow{h_*{}^0} \mathcal{H}^0{}_S(\mathcal{F}'') \to \mathcal{H}^1{}_S(\mathcal{F}') \xrightarrow{h'_*{}^1} \mathcal{H}^1{}_S(\mathcal{F}) \xrightarrow{h_*{}^1} \mathcal{H}^1{}_S(\mathcal{F}'') \to \cdots$$

証明 a)～c)については既に示した．d)を示すため近傍 $U\supset S$ を一つ選ぼう．$U\setminus F$ は $S\setminus F$ の近傍となる．$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{L}^{\cdot}$ を一つの脆弱分解とすれば，可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & & \Gamma_F(U, \mathcal{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_F(U, \mathcal{L}^1) & \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & & \Gamma_S(U, \mathcal{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_S(U, \mathcal{L}^1) & \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & & \Gamma_{S\setminus F}(U\setminus F, \mathcal{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S\setminus F}(U\setminus F, \mathcal{L}^1) & \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

が得られる．各 $\mathcal{L}^j$ は脆弱だから補題 5.1.3 に注意すれば各縦列が完全となる

ことが容易にわかる.（脆弱性は最後の全射性に必要なだけである.）故に蛇の補題（補題 5.2.4）により一つのコホモロジー長完全列が得られるが，それはまさに証明すべき列に他ならない.

次に e)を示すため各層の脆弱分解を取ろう．補題 5.1.10 より完全可換図式 (5.1.7) が得られる．これに $\Gamma_S(X,\cdot)$ を施せば，第1列を取り去った後

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & \Gamma_S(X, C^0(\mathscr{F}')) & \longrightarrow & \Gamma_S(X, C^1(\mathscr{F}')) & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & \Gamma_S(X, C^0(\mathscr{F})) & \longrightarrow & \Gamma_S(X, C^1(\mathscr{F})) & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & \Gamma_S(X, C^0(\mathscr{F}'')) & \longrightarrow & \Gamma_S(X, C^1(\mathscr{F}'')) & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

という可換図式を得る．ここで各縦列は補題 5.1.4 b) により完全である．故に再び蛇の補題を適用することができ，コホモロジー長完全列が得られる．それが証明すべき第1の列 (5.3.14) となる．第2の列 (5.3.15) は補題 5.2.8 と $\mathscr{H}^n{}_S(\mathscr{F})_x = \varinjlim_{U \ni x} H^n{}_{S \cap U}(U, \mathscr{F})$ に注意し，今得た列から帰納極限に移行すれば得られる．証了.

問 5.3.3　X が一点より成る位相空間のとき $H^n(X, \mathscr{F})$ を計算せよ.

今度は層 $\mathscr{F}$ の逆向きの分解が与える情報について検討しよう.

系 5.3.7　$0 \leftarrow \mathscr{F} \leftarrow \mathscr{L}_0 \overset{h_1}{\leftarrow} \mathscr{L}_1 \overset{h_2}{\leftarrow} \cdots \leftarrow \mathscr{L}_n \leftarrow 0$ を位相空間 X 上の層の完全列とし，$S \subset X$ を局所閉集合とする．もし

(5.3.16)　$H^k{}_S(X, \mathscr{L}_j) = 0, \quad r+j \leq k \leq N+j, \quad j = 0, \cdots, n$

が成り立っていれば，

$$H^k{}_S(X, \mathscr{F}) = 0, \quad r \leq k \leq N$$

となる.

証明　Weil の補題の様に大きな可換図式の追跡でもできるが，ここでは短完全列に分解してその各々にコホモロジー長完全列を適用する方法を用いてみよう．与えられた層の完全列を

$$0 \leftarrow \mathscr{F} \leftarrow \mathscr{L}_0 \leftarrow \mathrm{Image}\, h_1 \leftarrow 0$$
$$0 \leftarrow \mathrm{Image}\, h_1 \leftarrow \mathscr{L}_1 \leftarrow \mathrm{Image}\, h_2 \leftarrow 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$0 \leftarrow \mathrm{Image}\, h_{n-1} \leftarrow \mathscr{L}_{n-1} \leftarrow \mathscr{L}_n \leftarrow 0$$

と分解する．各々に定理 5.3.6 e)を適用して得られる長完全列において，真中の項に条件(5.3.16)を適用すれば，次のような単射が順に得られる：

$$H^k{}_S(X, \mathscr{F}) \hookrightarrow H^{k+1}{}_S(X, \mathrm{Image}\, h_1), \qquad r \leq k \leq N$$
$$H^k{}_S(X, \mathrm{Image}\, h_1) \hookrightarrow H^{k+1}{}_S(X, \mathrm{Image}\, h_2), \qquad r+1 \leq k \leq N+1$$
$$\cdots\cdots$$
$$H^k{}_S(X, \mathrm{Image}\, h_{n-1}) \hookrightarrow H^{k+1}{}_S(X, \mathscr{L}_n), \qquad r+n-1 \leq k \leq N+n-1$$

故にこれらをつなげて

$$H^k{}_S(X, \mathscr{F}) \hookrightarrow H^{k+n}{}_S(X, \mathscr{L}_n) = 0, \qquad r \leq k \leq N$$

を得る．証了．

次の定理は集合の基本演算とコホモロジーとの関係を述べる重要なものである．

定理 5.3.8 (Mayer-Vietoris) $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層，$S \subset X$ を局所閉集合とする．

a) $U, V \subset X$ を開集合とするとき，次の列は完全である．

$$(5.3.17) \qquad 0 \to H^0{}_{S\cap(U\cup V)}(U \cup V, \mathscr{F}) \xrightarrow{\iota} H^0{}_{S\cap U}(U, \mathscr{F}) \oplus H^0{}_{S\cap V}(V, \mathscr{F}) \xrightarrow{s} H^0{}_{S\cap(U\cap V)}(U \cap V, \mathscr{F}) \to H^1{}_{S\cap(U\cup V)}(U \cup V, \mathscr{F}) \xrightarrow{\iota} \cdots$$

ここに ι は $f \mapsto (f, f)$ という包含写像と，また s は $(f, g) \mapsto f-g$ という差をとる写像と然るべき制限写像とを組み合わせたものから自然に誘導される写像である．

b) $E, F \subset X$ を閉集合とするとき，次の列は完全である．

$$(5.3.18) \qquad 0 \to H^0{}_{S\cap(E\cap F)}(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\iota} H^0{}_{S\cap E}(X, \mathscr{F}) \oplus H^0{}_{S\cap F}(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{s} H^0{}_{S\cap(E\cup F)}(X, \mathscr{F}) \to H^1{}_{S\cap(E\cap F)}(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\iota} \cdots$$

ここに ι, s は上と同様の仕方で定義されるものとする．

証明　a)脆弱分解 $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^\cdot$ を一つ取り，この各項に $\Gamma_{S\cap(U\cup V)}(U\cup V,\cdot)$, $\Gamma_{S\cap U}(U,\cdot)\oplus\Gamma_{S\cap V}(V,\cdot)$, $\Gamma_{S\cap(U\cap V)}(U\cap V,\cdot)$ をそれぞれ施せば，次のような可換図式が得られる．

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & \Gamma_{S\cap(U\cup V)}(U\cup V,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S\cap(U\cup V)}(U\cup V,\mathscr{L}^1) & \to\cdots \\
 & \downarrow\iota & & \downarrow\iota & \\
0\to & \Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^0)\oplus\Gamma_{S\cap V}(V,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^1)\oplus\Gamma_{S\cap V}(V,\mathscr{L}^1) & \to\cdots \\
 & \downarrow s & & \downarrow s & \\
0\to & \Gamma_{S\cap(U\cap V)}(U\cap V,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S\cap(U\cap V)}(U\cap V,\mathscr{L}^1) & \to\cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

$\mathscr{L}^j$ の脆弱性により各縦列は完全となる．（補題 5.1.3. 参照．脆弱性が要るのは最後の項での全射性だけである．）故に蛇の補題によりコホモロジー長完全列が作られ，それが求める列となる．

b)同様にして次の可換図式が得られる：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & \Gamma_{S\cap(E\cap F)}(X,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S\cap(E\cap F)}(X,\mathscr{L}^1) & \to\cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & \Gamma_{S\cap E}(X,\mathscr{L}^0)\oplus\Gamma_{S\cap F}(X,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S\cap E}(X,\mathscr{L}^1)\oplus\Gamma_{S\cap F}(X,\mathscr{L}^1) & \to\cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & \Gamma_{S\cap(E\cup F)}(X,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S\cap(E\cup F)}(X,\mathscr{L}^1) & \to\cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

この場合も $\mathscr{L}^j$ の脆弱性により各縦列は完全となる．（最後の項での全射性は第1章の補題 1.4.4. による．）故に蛇の補題が適用でき求める長完全列が得られる．証了．

§4　層の次元と集合の余次元

層の脆弱次元 fl. dim $\mathscr{F}$ の定義は既に§1で与えたが，ここでそのコホモロジー的意味を調べよう．

定理 5.4.1　$\mathscr{F}$ を X 上の層とするとき，次の諸命題はすべて同値である：

a) fl. dim $\mathscr{F} \leq n$.

b) 任意の閉部分集合 $S \subset X$ に対し $H^{n+1}{}_S(X, \mathscr{F})=0$.

b′) 任意の局所閉部分集合 $S \subset X$ と任意の $j \geq n+1$ に対し $H^j{}_S(X, \mathscr{F})=0$.

c) 任意の閉部分集合 $S \subset X$ に対し $\mathscr{H}^{n+1}{}_S(\mathscr{F})=0$.

c′) 任意の局所閉部分集合 $S \subset X$ と任意の $j \geq n+1$ に対し $\mathscr{H}^j{}_S(\mathscr{F})=0$.

d) 任意の開集合 $U \subset X$ に対し $H^n(X, \mathscr{F}) \to H^n(U, \mathscr{F})$ は全射である.

証明 a)⇒b′)⇒b), a)⇒c′)⇒c) は脆弱次元の定義と定理 5.3.3 などから直ちにわかる. そこで b)⇒d)⇒c)⇒a) の順で証明を完成させよう.

b)⇒d) 定理 5.3.6 d) の完全列 (5.3.13) において U に X, $U \setminus F$ に U を代入すれば

$$\cdots \longrightarrow H^n(X, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(U, \mathscr{F}) \longrightarrow H_{X \setminus U}{}^{n+1}(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

という完全列を得るから, b)⇒d) は明らかである.

d)⇒c) 同じ完全列 (5.3.13) において今度は S を与えられた閉集合とし, 点 $x \in S$ を固定して U をその近傍とすれば,

$$\cdots \longrightarrow H^n(U, \mathscr{F}) \longrightarrow H^n(U \setminus S, \mathscr{F}) \longrightarrow H_{S \cap U}{}^{n+1}(U, \mathscr{F}) \longrightarrow H^{n+1}(U, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

という完全列が得られるが, 仮定により第一の写像が全射だから, これは

$$0 \longrightarrow H_{S \cap U}{}^{n+1}(U, \mathscr{F}) \longrightarrow H^{n+1}(U, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

という完全列に切れる. ここで $\varinjlim_{U \ni x}$ をとれば

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}_S{}^{n+1}(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{H}_X{}^{n+1}(\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

という完全列が得られるが, 一般に $\mathscr{H}_X{}^{n+1}(\mathscr{F})=0$ である (問 5.3.2) から $\mathscr{H}_S{}^{n+1}(\mathscr{F})=0$ が得られた.

c)⇒a) まず $n=0$ の場合を考える. これは任意の閉集合 S に対し $\mathscr{H}_S{}^1(\mathscr{F})=0$ を仮定して $\mathscr{F}$ が脆弱であることを示すことに相当する. 開集合 $U \subset X$ と $s \in \mathscr{F}(U)$ をとろう. これを全空間に拡張するため次のような順序集合を考える:

$$\mathfrak{M} = \{(\tilde{s}, \tilde{U}); \tilde{U} \supset U, \tilde{s} \in \mathscr{F}(\tilde{U}), \tilde{s}|_U = s\}$$
$$(\tilde{\tilde{s}}, \tilde{\tilde{U}}) \succ (\tilde{s}, \tilde{U}) \Longleftrightarrow \tilde{\tilde{U}} \supset \tilde{U} \text{ かつ } \tilde{\tilde{s}}|_{\tilde{U}} = \tilde{s}$$

$\mathfrak{M}$ は明らかに帰納的順序集合であり, (s, U) を含むから空でない. 故に Zorn の補題により極大元 $(\tilde{s}, \tilde{U})$ が存在する. $\tilde{U}=X$ を示そう. $S=X \setminus \tilde{U} \neq \phi$ と仮

定し，点 $x\in S$ をとる．V を x の近傍とするとき，完全列

$$\cdots\to H^0(V,\mathscr{F})\to H^0(V\setminus S,\mathscr{F})\to H^1{}_{S\cap V}(V,\mathscr{F})\to\cdots$$

により $\tilde{s}|_{V\setminus S}$ は $H^1{}_{S\cap V}(V,\mathscr{F})$ の元を定め，従って極限に行って $\mathscr{H}^1{}_S(\mathscr{F})_x=\varinjlim_{V\ni x} H^1{}_{S\cap V}(V,\mathscr{F})$ の元を定めるが，この空間は仮定により0だから，帰納極限の定義により実はある V について $H^1{}_{S\cap V}(V,\mathscr{F})$ において $\tilde{s}|_{V\setminus S}=0$ となっている．故に上の完全列により $s'\in\mathscr{F}(V)$ で $s'|_{V\setminus S}=\tilde{s}|_{V\setminus S}$ となるものが存在する．これをもとの $\tilde{s}$ とつなげれば，$\tilde{U}\cup V\supsetneqq\tilde{U}$ 上の $\mathscr{F}$ の切断で $\tilde{s}$ の真の拡張となっているものが得られたことになりその極大性に反する．

次に一般の場合を考えよう．$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^\cdot$ を任意の脆弱分解とし，$\mathscr{I}=\operatorname{Ker} d^n$ とおいてこれを長さ n のところで切断する:

$$(5.4.1)\qquad 0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots\to\mathscr{L}^{n-1}\to\mathscr{I}\to 0$$

$$(5.4.2)\qquad 0\to\mathscr{I}\to\mathscr{L}^n\to\mathscr{L}^{n+1}\to\mathscr{L}^{n+2}\to\cdots$$

(5.4.2)は $\mathscr{I}$ の一つの脆弱分解を与えていることに注意せよ．仮定 $\mathscr{H}^{n+1}{}_S(\mathscr{F})=0$ によりこれは函手 $\Gamma_S(\cdot)$ を施したとき項 $\mathscr{L}^{n+1}$ のところで完全である．故に $\mathscr{H}^1{}_S(\mathscr{I})=0$ である．従って上に示したところにより $\mathscr{I}$ は脆弱となる．故に(5.4.1)は $\mathscr{F}$ の長さ n の脆弱分解を与えることになる．証了.

次元とコホモロジーの関係は上の定理で説明し尽されているが，我々はもう少し精密に，閉集合 S を一つ固定したときの議論が必要となる．

定義 5.4.2　$\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層，$S\subset X$ を閉集合とする．もし $j<n$ に対して $\mathscr{H}^j{}_S(\mathscr{F})=0$ が成り立つなら，S は層 $\mathscr{F}$ に関して余次元 $\geq n$ であるという．更にもし $j\neq n$ に対して $\mathscr{H}^j{}_S(\mathscr{F})=0$ となっているとき，S は $\mathscr{F}$ に関して**純 n 余次元的**であるという．

補題 5.4.3　閉集合 $S\subset X$ は層 $\mathscr{F}$ に関して余次元 $\geq n$ であり，かつ任意の閉部分集合 $F\subset S$ に対し $H^{n+1}{}_F(X,\mathscr{F})=0$ が成り立っているとする．このとき $\mathscr{H}^n{}_S(\mathscr{F})$ は脆弱層となる．

証明　補題 5.3.5 により $\mathscr{H}^n{}_S(\mathscr{F})(U)=H^n{}_{S\cap U}(U,\mathscr{F})$ 等であるから，脆弱性は基本長完全列

$$\cdots\to H^n{}_S(X,\mathscr{F})\to H^n{}_{S\cap U}(U,\mathscr{F})\to H^{n+1}{}_{S\setminus U}(X,\mathscr{F})\to\cdots$$

に仮定 $H^{n+1}{}_{S\setminus U}(X,\mathscr{F})=0$ を代入することにより直ちに得られる．証了.

我々は $\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F})$ を X 上の層とみなしたり S 上の層とみなしたりした．一般に X 上の層 $\mathcal{G}$ が閉集合 $S\subset X$ に対し $\mathcal{G}|_{X\setminus S}=0$ を満たすとき，同じ理由でこれを S 上の層とみなすことができる．このような場合，$\mathcal{G}$ のコホモロジーを計算するのに X の上でやっても S の上でやっても同じ結果が得られることを注意しておこう．実際．$\mathcal{G}$ の標準脆弱分解の各項もまた明らかに $C^j(\mathcal{G})|_{X\setminus S}=0$ を満たすからである．このことを考慮に入れて，函手 $\Gamma_S(\cdot)$ の合成をある特別な場合について計算してみよう．

定理 5.4.4　$S\subset X$ を $\mathcal{F}$ に関し純 n 余次元的な閉集合，$F\subset S$ を閉部分集合とするとき，任意の k について

(5.4.3)　$H^k{}_F(X,\mathcal{F})=H^{k-n}{}_F(S,\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F}))$,　$\mathcal{H}^k{}_F(\mathcal{F})=\mathcal{H}^{k-n}{}_F(\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F}))$

上の注意により第１式の右辺は $H^{k-n}{}_F(X,\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F}))$ と書いても良い．

証明　第２の式は，第１の式をある固定した点 $x\in F$ の近傍にそれを全空間とみなして適用したものから帰納極限にゆけば得られるから，専ら第１式を考えよう．$\mathcal{F}$ の脆弱分解 $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{L}^\cdot$ を任意に選び，これに函手 $\mathcal{T}_S(\cdot)$ を施して得られる複体

$$0\to\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^0)\xrightarrow{d_S{}^0}\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^1)\xrightarrow{d_S{}^1}\cdots$$

を考察しよう．$\mathcal{H}^k{}_S(\mathcal{F})$ はこの複体の k 次コホモロジーだから，仮定によりこれは n 次以外の項において完全である．故にまず $\mathcal{I}=\mathrm{Image}\,d_S{}^{n-1}$ とおけば

$$0\to\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^0)\to\cdots\cdots\to\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^{n-1})\to\mathcal{I}\to 0$$

という完全列が得られる．補題 5.1.3 により $\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^j)$ は脆弱，従って系 5.1.6 により $\mathcal{I}$ も脆弱となり，また切断空間の完全列

(5.4.4)　$0\to\Gamma_F(X,\mathcal{L}^0)\to\cdots\to\Gamma_F(X,\mathcal{L}^{n-1})\to\Gamma_F(S,\mathcal{I})\to 0$

も得られる．ここに自明なおき換え $\Gamma_F(S,\mathcal{T}_S(\mathcal{F}))=\Gamma_F(X,\mathcal{F})$ を用いた．この完全列から $H^k{}_F(X,\mathcal{F})=0\ (0\leq k\leq n-1)$，および $\Gamma_F(S,\mathcal{I})=d^{n-1}\Gamma_F(X,\mathcal{L}^{n-1})$ が得られる．最後のところは

$$\begin{array}{ccccc}\cdots\to\Gamma_F(S,\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^{n-1})) & & \longrightarrow & & \Gamma_F(S,\mathcal{T}_S(\mathcal{L}^n))\to\cdots\\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \Gamma_F(S,\mathcal{I}) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & & & & 0\end{array}$$

の整合性による．

他方，$\mathcal{Z}=\mathrm{Ker}\, d_S{}^n$ とおけば

$$0\to\mathcal{I}\to\mathcal{Z}\to\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F})\to 0$$

$$0\to\mathcal{Z}\to\Gamma_S(\mathcal{L}^n)\to\Gamma_S(\mathcal{L}^{n+1})\to\cdots$$

という完全列が得られる．第1の列からは定理5.3.6 e)により

$$\cdots\to H^k{}_F(S,\mathcal{I})\to H^k{}_F(S,\mathcal{Z})\to H^k{}_F(S,\mathcal{H}^n(\mathcal{F}))\to H^{k+1}{}_F(S,\mathcal{I})\to\cdots$$

という長完全列が得られ，従って $\mathcal{I}$ の脆弱性により

$$H^0{}_F(S,\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F}))=\Gamma_F(S,\mathcal{Z})/\Gamma_F(S,\mathcal{I})$$

$$H^k{}_F(S,\mathcal{H}^n{}_S(\mathcal{F}))=H^k{}_F(S,\mathcal{Z}),\qquad k\geq 1$$

と計算される．一方，第2の完全列は層 $\mathcal{Z}$ の脆弱分解を与えているから，

$$\Gamma_F(S,\mathcal{Z})=\mathrm{Ker}\,\{d^n:\Gamma_F(X,\mathcal{L}^n)\to\Gamma_F(X,\mathcal{L}^{n+1})\}$$

$$H^k{}_F(S,\mathcal{Z})=H^k(\Gamma_F(X,\mathcal{L}^{n+\cdot}))=H^{n+k}{}_F(X,\mathcal{F})$$

これらを合わせれば(5.4.3)が得られる．証了．

上の定理において $k-n<0$ のとき，(5.4.3)の右辺は一般に0とみなす約束になっている．(5.4.4)の完全性により $k<n$ について $H^k{}_F(X,\mathcal{F})=0$ が言えているから，そのような場合でも等式(5.4.3)は成立しているのである．

問 5.4.1 F を $\boldsymbol{R}^n$ の内点を持たぬ閉集合とするとき，F は $\boldsymbol{R}^n$ 上の連続函数の層 C (或いは $\mathcal{E}, L_{1,loc}$)に関して純1余次元的である．

§5 Čech のコホモロジー

層のコホモロジーの定義は前節で一応完全なものが与えられたけれども，この節では幾何学的直観とより多く結びついたもう一つの導入法を紹介する．直観的超函数をコホモロジーに翻訳するときもこの方法を通して行なうのである．以下しばらく定義が続くが，長くなるので地の文で書くことにする．X を位相空間，$\mathfrak{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をその被覆とする．以下特に断らぬ限り被覆の元は開集合と仮定する．すなわち．開被覆のみを考える．$\mathcal{F}$ を X 上の層とする．整数 $n\geq 0$ を一つ固定したとき，次のような形の形式的記号

$$(5.5.1)\qquad \sum_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)}\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n},\quad U_{\lambda_j}\in\mathfrak{U},\quad \varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}\in\mathcal{F}(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n})$$

を被覆 $\mathfrak{U}$ に関する $\mathcal{F}$-係数の n 次**余鎖**という．ここに記号 $U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n}$ は共通部分の記号 $U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}$ において因子の順序を変えて得られるものを次の

規則により二種に類別したときの同値類を表わす：

(5.5.2) $$U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}\sim \operatorname{sgn}\sigma U_{\lambda_{\sigma(0)}}\cap\cdots\cap U_{\lambda_{\sigma(n)}}$$

σ は $\{0,\cdots,n\}$ の置換であり $\operatorname{sgn}\sigma$ はその符号である．従って特に $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ の中に同じものがあれば

$$U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}\sim -U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}$$

となるから，これを $0U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}$，すなわち0と同一視する．このようにすると形式的記号(5.5.1)の全体は，係数毎の自然な線型演算により一つの $\boldsymbol{C}$-線型空間を成すことがわかる．これを $C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ で表わし，被覆 $\mathfrak{U}$ に関する $\mathscr{F}$-係数 n 次余鎖の空間と呼ぶ．

上の計算は形式的には微分形式の計算と同じである．上の規則を適用すると n 次余鎖(5.5.1)に対し

$$\check{\varphi}_{\lambda_0\cdots\lambda_n}=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\,\varphi_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\lambda_{\sigma(n)}}$$

で新しい係数を導入すれば，

(5.5.3) $$\sum\check{\varphi}_{\lambda_0\cdots\lambda_n}U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n}$$

はもとと同じ余鎖を表わし，しかも係数の組 $\{\check{\varphi}_{\lambda_0\cdots\lambda_n}\}$ は添え字に反対称に依存する(すなわち添え字の置換によりその符号分だけ変わる)ような $\mathscr{F}$ の切断の族となる．このような係数の組 $\{\check{\varphi}_{\lambda_0\cdots\lambda_n}\}$ は φ に対して一意に定まるので，普通は余鎖を表わすのにこれを用いるのであるが，ここでは具体的計算の便を考慮して主に(5.5.1)の形を用い，必ずしも反対称化にはこだわらないこととする．

次に $\mathfrak{U}'=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ を $\mathfrak{U}$ の部分被覆とする．すなわち $\Lambda'\subset\Lambda$ とする．$\mathfrak{U}'$ は X のある開部分集合を覆っているわけである．後の便を考え．それをある閉集合 S の補集合 $X\setminus S$ としておこう．このとき $\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}'$ は対 $(X, X\setminus S)$ の**相対被覆**であるともいう．上に倣って，相対被覆 $\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}'$ に関する $\mathscr{F}$-係数 n 次相対余鎖の作る空間を次のように定義する．

$$C^n(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{F})$$
$$=\{\sum\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n}\in C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F});\,U_{\lambda_0},\cdots,U_{\lambda_n}\in\mathfrak{U}' \text{ のとき } \varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}=0\}$$

これは，定義により $C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ の線型部分空間となる．相対余鎖に関しても，もちろん上と同様の反対称な係数による表現が考えられる．

最後に余境界作用素 $\delta=\delta^n:C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to C^{n+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ を次の式により定義する：

(5.5.4)
$$\delta^n\Bigl(\sum_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)}\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n}\Bigr)=\sum_{(\mu,\lambda_0,\cdots,\lambda_n)}\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}|_{U_\mu\cap U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}}U_\mu\wedge U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n}$$

この δ^n の定義が表示(5.5.1)の選び方に依存せず，従って線型写像として確定することは明らかであろう．係数を成す $\mathscr{F}$ の切断に対する制限写像は甚だ煩わしいので，以下しばしばこれを $\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}|_{U_\mu}$ と略記するか，或いは何も書かずに $\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}$ のまま記す．すると(5.5.4)は形式的には次のように簡明な形に書くことができる：

$$\delta^n:C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})\ni\varphi\longmapsto\Bigl(\sum_{\mu\in\Lambda}U_\mu\Bigr)\wedge\varphi\in C^{n+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$$

この計算規則は微分形式のそれと甚だ類似していることに注意されたい．

反対称な係数を持つ余鎖(5.5.3)に対し余境界作用素を施した結果を再び反対称な係数を持つ形に書き直したとき，その係数 $\check{\varphi}_{\lambda_0\cdots\lambda_{n+1}}$ は次式で表わされる：

(5.5.5)
$$\check{\varphi}_{\lambda_0\cdots\lambda_{n+1}}=\frac{1}{n+2}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\check{\varphi}_{\lambda_0\cdots\lambda_{j-1}\lambda_{j+1}\cdots\lambda_{n+1}}|_{U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_{n+1}}}$$

余鎖の表記に $\{\check{\varphi}_{\lambda_0\cdots\lambda_n}\}$ を用いる普通の方法では，この式の右辺の因子 $1/(n+2)$ を省いた定義を採用している．ここでも(5.5.4)の定義式の右辺に因子 $(n+2)$ を掛けておけば，(5.5.5)式の段階で余分な因子が現われず普通と同じ定義が得られるわけだが，我々の表記法にとってはそれは却って面倒になる．

問 5.5.1　(5.5.5)式を確かめよ．

補題 5.5.1　$\delta^{n+1}\circ\delta^n=0$

証明
$$\delta^{n+1}\circ\delta^n\Bigl(\sum_{(\lambda_0\cdots\lambda_n)}\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n}\Bigr)=\delta^{n+1}\Bigl(\sum_{(\mu,\lambda_0,\cdots,\lambda_n)}\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}|_{U_\mu}U_\mu\wedge U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n}\Bigr)=\sum_{(\nu,\mu,\lambda_0,\cdots,\lambda_n)}\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}|_{U_\mu\cap U_\nu}U_\nu\wedge U_\mu\wedge U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n}$$

ここで $U_\nu\wedge U_\mu=-U_\mu\wedge U_\nu$ であり，制限写像の順番は可換だから，最後の式は2項ずつが打ち消し合って0に帰する．証了．

δ^n が $C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ の部分空間 $C^n(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{F})$ を $C^{n+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ の部分空間 $C^{n+1}(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{F})$ の中に写すことは明らかである．故に上の補題と合わせて $C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$, $C^{\cdot}(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{F})$ という二つの複体が得られ，従って次の定義が意味を持つ．

定義 5.5.2　$H^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})=H^n(C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathscr{F}))$, $H^n(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{F})=H^n(C^{\cdot}(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',$

$\mathcal{F}$))とおき，それぞれ被覆 $\mathfrak{U}$ に関する $\mathcal{F}$-係数 n 次コホモロジー，相対被覆 $\mathfrak{U}$ mod $\mathfrak{U}'$ に関する $\mathcal{F}$-係数 n 次相対コホモロジーと呼ぶ．(区別のため前者を絶対コホモロジーと呼ぶこともある.)

この新しい定義によるコホモロジーが層の分解を用いて定義した先のコホモロジーと似た性質を持っていることを順番に調べてゆこう．

補題 5.5.3　次の完全列が存在する．

$$0 \to H^0(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{F}) \xrightarrow{\iota_*} H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\rho_*} H^0(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$$
$$\to H^1(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{F}) \to \cdots$$

これは短完全列

$$0 \to C^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{F}) \xrightarrow{\iota} C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\rho} C^n(\mathfrak{U}', \mathcal{F}) \to 0, \qquad n = 0, 1, \cdots$$

と蛇の補題から直ちに従う．ただしここで $C^{\cdot}(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ は $\mathfrak{U}$ の部分被覆 $\mathfrak{U}'$ が被覆する X の開部分集合(例えば $X \setminus S$)を始めから全空間と思って $C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ と同様の構成法を適用して得られる複体のことであり，$H^n(\mathfrak{U}', \mathcal{F}) = H^n(C^{\cdot}(\mathfrak{U}', \mathcal{F}))$ である．(厳密に言えば，ここの $\mathcal{F}$ には制限記号 $\mathcal{F}|_{X \setminus S}$ が必要であろう.) 写像 ι は既に注意したように自然な埋め込み，また写像 ρ は $\mathfrak{U}'$ 以外の被覆因子を含む項を捨て去るもので，一種の制限写像である．

補題 5.5.4　$S \subset X$ を閉集合とし $\mathfrak{U}'$ はその補集合 $X \setminus S$ を覆っているとする．このとき $H^0(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{F}) = \Gamma_S(X, \mathcal{F})$ である．特に $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, $H^0(\mathfrak{U}', \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X \setminus S)$ が成り立つ．

証明　$\varphi \in H^0(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{F})$ は定義により次の形をしている：

$$\varphi = \sum_{\lambda} \varphi_\lambda U_\lambda, \qquad \delta^0 \varphi = \sum_{(\mu, \lambda)} \varphi_\lambda|_{U_\mu \cap U_\lambda} U_\mu \wedge U_\lambda = 0$$

これは任意の組 λ, μ について $\varphi_\lambda|_{U_\mu \cap U_\lambda} - \varphi_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu} = 0$ を意味するから，層の性質 FII により $\{\varphi_\lambda\}$ は X 上の $\mathcal{F}$ の切断 φ につながる．一方 $U_\lambda \in \mathfrak{U}'$ ならば $\varphi_\lambda = 0$ であるから，$\operatorname{supp} \varphi \subset S$ となる．逆対応は $\varphi \in \Gamma_S(X, \mathcal{F})$ に対し

$$\sum_{\lambda} \varphi|_{U_\lambda} U_\lambda$$

で与えられる．層の性質 FI によりこの対応は一対一である．証了．

補題 5.5.5　$\mathcal{F}$ が脆弱層ならば，$n \geq 1$ に対し $H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{F}) = 0$ となる．

証明　特別な場合として，任意の位相空間 X とその被覆 $\mathfrak{U}$ に関し，脆弱層 $\mathcal{F}$ に対して $n \geq 1$ のとき $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ となることを証明しておこう．そうすれ

ば $H^n(\mathfrak{U}',\mathscr{F})=0$ でもあるから，補題 5.5.3 の完全列より少なくとも $n\geq 2$ について $H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}',\mathscr{F})=0$ がわかる．ところで同じ完全列の写像 $H^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to H^0(\mathfrak{U}',\mathscr{F})$ は補題 5.5.4 により制限写像 $\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X\setminus S)$ に等しく，従って脆弱層に対しては常に全射である．故に $H^1(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}',\mathscr{F})=0$ もわかる．

そこで以下絶対コホモロジーの場合を考える．任意の $X,\mathfrak{U}$ について次の列が脆弱層 $\mathscr{F}$ に対して完全となることを n に関する帰納法で証明することにしよう．

$$0\to\Gamma(X,\mathscr{F})\to C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to\cdots\to C^{n+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$$

こうすれば補題 5.5.4 は帰納法の第一段階（$n=0$ の場合）とみなすことができる．$\varphi\in C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ で $\delta^n\varphi=0$ を満たすものを任意にとる．次のような集合を考えよう．

$$\mathfrak{M}=\{(\psi,U);U\subset X \text{ は開集合}，\psi\in C^{n-1}(\mathfrak{U}|_U,\mathscr{F}) \text{ は } \delta^{n-1}\psi=\varphi|_U \text{ を満たす}\}$$

ここに $\mathfrak{U}|_U$ は被覆 $\mathfrak{U}$ の各元を U に制限して得られる U の被覆 $\{U_\lambda\cap U\}_{\lambda\in\Lambda}$ を表わし，$\varphi|_U=\sum\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}|_U(U_{\lambda_0}\cap U)\wedge\cdots\wedge(U_{\lambda_0}\cap U)$ である．自然な順序（すなわち U に関する包含関係と ψ に関する制限関係）により $\mathfrak{M}$ は帰納的順序集合になる．$\mathfrak{M}$ の自明でない元を構成しよう．いま添え字 μ を固定し $\varphi=U_\mu\wedge\varphi_\mu+\varphi'$ と書く．ここに φ' は φ の項のうちで因子 U_μ を含まぬものを集めたもの，φ_μ は U_μ をくくり出した残りを形式的に書いたものである．余境界作用素の定義から明らかに

$$\delta^n\varphi=U_\mu\wedge(-\delta'^{n-1}\varphi_\mu)+U_\mu\wedge\varphi'+\delta'^n\varphi'$$

という形式的計算が成り立つ．ここに δ' は $\mathfrak{U}$ から U_μ を取り除いた被覆に関する余境界作用素を表わす．これより係数比較により

$$\delta'^n\varphi'=0,\qquad \delta'^{n-1}\varphi_\mu|_{U_\mu}=\varphi'|_{U_\mu}$$

が得られる．そこで $U=U_\mu$ ととり，$C^{n-1}(\mathfrak{U}|_{U_\mu},\mathscr{F})$ の元として $\psi_\mu=\varphi_\mu|_{U_\mu}$ を選べば

$$\delta^{n-1}\psi_\mu=U_\mu\wedge\varphi_\mu|_{U_\mu}+\delta'^{n-1}\varphi_\mu|_{U_\mu}=U_\mu\wedge\varphi_\mu|_{U_\mu}+\varphi'|_{U_\mu}=\varphi|_{U_\mu}$$

となる．すなわち $(\psi_\mu,U_\mu)\in\mathfrak{M}$ である．

Zorn の補題により $\mathfrak{M}$ には極大元 (ψ,U) が存在する．$U=X$ を示せば帰納法が次へ進む．そこで $\exists x\in X\setminus U$ とし，x を含む元 U_μ を選ぶ．上に構成したように $(\psi_\mu,U_\mu)\in\mathfrak{M}$ となるものが存在するが，これについて

$$\delta^{n-1}\psi|_{U\cap U_\mu}=\varphi|_{U\cap U_\mu}=\delta^{n-1}\psi_\mu|_{U\cap U_\mu}$$
$$\therefore\quad \delta^{n-1}(\psi|_{U\cap U_\mu}-\psi_\mu|_{U\cap U_\mu})=0$$

が成り立っている．故に帰納法の仮定 $H^{n-1}(\mathfrak{U}|_{U\cap U_\mu},\mathscr{F})=0$ により $\chi\in C^{n-2}(\mathfrak{U}|_{U\cap U_\mu},\mathscr{F})$ で $\delta^{n-2}\chi=\psi|_{U\cap U_\mu}-\psi_\mu|_{U\cap U_\mu}$ を満たすものが存在する．（$n=1$ のときは $C^{-1}(\mathfrak{U}|_{U\cap U_\mu},\mathscr{F})=\Gamma(U\cap U_\mu,\mathscr{F})$ 等と解釈するのである．）$\mathscr{F}$ の脆弱性によりこれを係数毎に延長し，$\tilde{\chi}\in C^{n-2}(\mathfrak{U}|_{U_\mu},\mathscr{F})$ で $\tilde{\chi}|_{U\cap U_\mu}=\chi$ となるものをとる．さて，$\tilde{\psi}\in C^{n-1}(\mathfrak{U}|_{U\cup U_\mu},\mathscr{F})$ を

$$\tilde{\psi}=\begin{cases}\psi, & U\text{ の上で},\\ \psi_\mu+\delta^{n-2}\tilde{\chi}, & U_\mu\text{ の上で}\end{cases}$$

で定めれば，上の構成法により定義は整合しており，しかも

$$\delta^{n-1}\tilde{\psi}|_U=\delta^{n-1}\psi=\varphi|_U,\qquad \delta^{n-1}\tilde{\psi}|_{U_\mu}=\delta^{n-1}\psi_\mu=\varphi|_{U_\mu}$$

が成り立っている．すなわち $(\tilde{\psi},U\cup U_\mu)$ は (ψ,U) よりも真に大きな $\mathfrak{M}$ の元となる．これは極大性に反する．証了．

次に分解によるコホモロジーとの関係を調べよう．まず，

定理 5.5.6 (Leray)　X を位相空間，$S\subset X$ を閉集合とする．また $\mathfrak{U}$ は X の被覆で，その一部分 $\mathfrak{U}'$ は $X\setminus S$ の被覆となっているとする．このとき X 上の層 $\mathscr{F}$ に対し，次のような標準的写像が存在する．

(5.5.6) $$\check{c}_{\mathfrak{U}}{}^n: H^n(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{F})\to H^n{}_S(X,\mathscr{F})$$

さらに，もし

(5.5.7) $$H^k(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_N},\mathscr{F})=0,\qquad k\geq 1,$$

が任意の添え字の組に対して成り立っているならば，上の写像は同型となる．条件 (5.5.7) を満たすような被覆 $\{U_\lambda\}$ は層 $\mathscr{F}$ に対する **Leray 被覆** と呼ばれる．

証明　脆弱分解 $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^\cdot$ を一つとり，この各項に対して被覆による余鎖の複体を作れば

(5.5.8)
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & \to & & \Gamma_S(X,\mathscr{L}^0) & \xrightarrow{d^0} & \Gamma_S(X,\mathscr{L}^1) & \xrightarrow{d^1}\cdots\\
 & \downarrow & & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & \\
0\to & C^0(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{F}) & \xrightarrow{\iota} & & C^0(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{L}^0) & \xrightarrow{d^0} & C^0(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{L}^1) & \to\cdots\\
 & \downarrow{\scriptstyle\delta^0} & & & \downarrow{\scriptstyle\delta^0} & & \downarrow{\scriptstyle\delta^0} & \\
0\to & C^1(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{F}) & \xrightarrow{\iota} & & C^1(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{L}^0) & \xrightarrow{d^0} & C^1(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathscr{L}^1) & \to\cdots\\
 & \downarrow{\scriptstyle\delta^1} & & & \downarrow{\scriptstyle\delta^1} & & \downarrow & \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

という可換図式が得られる．ここで d^n は $C^k(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{L}^n)$ の各元の係数に対して作用している．第1列を除く各縦列は補題 5.5.5 により完全だから，Weil の補題により標準的な写像

$$H^n(C^{\cdot}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F})) \to H^n(\Gamma_S(X, \mathscr{L}^{\cdot}))$$

が定まる．脆弱分解として標準脆弱分解をとれば求める写像(5.5.6)が得られる．さらに，条件(5.5.7)があれば図式(5.5.8)の第1行を除く各横行も完全となるから，(5.5.6)は同型となる．証了．

問 5.5.2　標準的写像により構成される次の図式の可換性を示せ：

$$\begin{array}{ccc} H^n(C^{\cdot}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F})) & \longrightarrow & H^n(\Gamma_S(X, \mathscr{L}^{\cdot})) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & H^n(\Gamma_S(X, C^{\cdot}(\mathscr{F}))) & \end{array}$$

問 5.5.3　$\varepsilon_{\mathfrak{U}}{}^1$ は常に単射であることを示せ．

被覆というのは位相空間 X に対してより上部の構造であるから，これを取り替えたとき $H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F})$ がどう変わるかを $H^n{}_S(X, \mathscr{F})$ との比較の前に調べておく必要がある．$\mathfrak{V} = \{V_\mu\}_{\mu \in M}$ を X の他の被覆とする．$\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ の**細分**である(記号で $\mathfrak{V} \succ \mathfrak{U}$)とは，各 $V_\mu \in \mathfrak{V}$ に対し $U_\lambda \in \mathfrak{U}$ で $V_\mu \subset U_\lambda$ となるものが存在することをいう．次に $\mathfrak{V}' = \{V_\mu\}_{\mu \in M'}$ を $\mathfrak{V}$ の一部分とするとき，相対被覆 $\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}'$ が相対被覆 $\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}'$ の細分である(記号で $\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}' \succ \mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}'$)とは，上の状況において更に $\mathfrak{V}'$ が $\mathfrak{U}'$ の細分となっていること，すなわち $V_\mu \in \mathfrak{V}'$ に対しては $U_\lambda \in \mathfrak{U}'$ で $V_\mu \subset U_\lambda$ となるものが選べることをいう．(この他にわれわれは部分被覆 $\mathfrak{V}'$ が $\mathfrak{U}'$ と同じ一定の開部分集合 $X \setminus S$ を覆っていることを暗黙の了解として仮定することにする.)このとき Zermelo の選出公理により細分写像 $\tau: M \to \Lambda$ を上の条件 $V_\mu \subset U_{\tau(\mu)}$ により一つ選ぶことができる．相対被覆の細分の場合にはこれを更に $\tau(M') \subset \Lambda'$ となるように選ぶ．この細分写像を用いると

$$\tau^{*n}: C^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F}) \to C^n(\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}', \mathscr{F})$$

という写像を次の式により定義することができる：

$$\tau^{*n}\{\sum_{(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)} \varphi_{\lambda_0 \cdots \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \cdots \wedge U_{\lambda_n}\} = \sum_{(\mu_0, \cdots, \mu_n)} \varphi_{\tau(\mu_0) \cdots \tau(\mu_n)} V_{\mu_0} \wedge \cdots \wedge V_{\mu_n}$$

ここで右辺の係数はより正確には $\varphi_{\tau(\mu_0) \cdots \tau(\mu_n)}|_{V_{\mu_0} \cap \cdots \cap V_{\mu_n}}$ と書くべきものである．

これらの写像は明らかに表示(5.5.1)の選び方によらずに定まり，また $\tau^*(\sum_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)=\sum_{\mu\in M} V_\mu$ という形式的対応に注意すれば，余境界作用素と可換なことも容易にわかるから，複体の射を構成し，従ってコホモロジーの間の写像

$$(5.5.9)\qquad [\tau^{*n}]_*: H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F}) \to H^n(\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}', \mathscr{F})$$

を誘導する.

補題 5.5.7　この写像(5.5.9)は細分写像 τ の選び方によらずに定まる.

証明　τ_1, τ_2 を二つの細分写像とする. 我々はこれに対し

$$\theta^n: C^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F}) \to C^{n-1}(\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}', \mathscr{F}), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

という準同型の族で次の条件を満たすものを構成しよう

$$\tau_2{}^{*n}\varphi - \tau_1{}^{*n}\varphi = \delta^{n-1}\theta^n\varphi + \theta^{n+1}\delta^n\varphi, \qquad (\varphi \in C^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F})\text{ に対し}).$$

(ただし $\theta^0=0$ とおく.) すると余輪体 φ に対しては差 $\tau_2{}^{*n}\varphi - \tau_1{}^{*n}\varphi = \delta^{n-1}\theta^n\varphi$ は余境界となり，従って同じコホモロジーの元を定めることがわかるから，$[\tau_1{}^*]_* = [\tau_2{}^*]_*$ が得られる. このような族 $\{\theta^n\}$ は二つの複体射 $\tau_1{}^*, \tau_2{}^*$ の間の**鎖ホモトピー**と呼ばれ，この種の目的のために良く用いられる.

さて，θ^n を定義するのであるが，かなり複雑な写像なので余鎖の一般的な表示法(5.5.1)を用いたのでは定義が表示に依存せぬことを確かめるのが面倒になる. そこで反対称な表示(5.5.3)に書き改めた φ に対し

$$\theta^n\varphi = (n+1)\sum_{(\mu_0, \cdots, \mu_{n-1})} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \check{\varphi}_{\tau_1(\mu_0)\cdots\tau_1(\mu_j)\tau_2(\mu_j)\cdots\tau_2(\mu_{n-1})} V_{\mu_0} \wedge \cdots \wedge V_{\mu_{n-1}}$$

と定めよう. これにより C-線型写像 θ^n が確定するわけである. (ここでも正確には係数に制限写像がつく. なお θ^n の像の方は反対称な係数を持つ表現には正規化していないことに注意せよ.) これに対し

$$(5.5.10)\qquad \delta^{n-1}\theta^n\varphi = (n+1)\sum_{(\mu, \mu_0, \cdots, \mu_{n-1})} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \check{\varphi}_{\tau_1(\mu_0)\cdots\tau_1(\mu_j)\tau_2(\mu_j)\cdots\tau_2(\mu_{n-1})} V_\mu \wedge V_{\mu_0} \wedge \cdots \wedge V_{\mu-1}$$

であり，他方，問 5.5.1 で与えた $\delta^n\varphi$ の反対称表示を用いれば

$$\psi = \delta^n\varphi = \sum_{(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n+1})} \check{\psi}_{\lambda_0, \cdots, \lambda_{n+1}} U_{\lambda_0} \wedge \cdots \wedge U_{\lambda_n},$$

$$\text{ここに}\quad \check{\psi}_{\lambda_0\cdots\lambda_{n+1}} = \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \check{\varphi}_{\lambda_0\cdots\lambda_{k-1}\lambda_{k+1}\cdots\lambda_{n+1}}$$

故に，いま添え字列の第 k 番目 $(0 \leq k \leq n+1)$ を省く操作を $\overset{k}{\wedge}$ で表せば

$$\theta^{n+1}\delta^n\varphi = \theta^{n+1}\psi = (n+2)\sum_{(\mu_0,\cdots,\mu_n)}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\check{\psi}_{\tau_1(\mu_0)\cdots\tau_1(\mu_j)\tau_2(\mu_j)\cdots\tau_2(\mu_n)}V_{\mu_0}\wedge\cdots\wedge V_{\mu_n}$$

$$= \sum_{(\mu_0,\cdots,\mu_n)}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\check{\varphi}_{\tau_1(\mu_0)\overset{k}{\hat{\cdots}}\tau_1(\mu_j)\tau_2(\mu_j)\cdots\tau_2(\mu_n)}V_{\mu_0}\wedge\cdots\wedge V_{\mu_n}$$

$$= \sum_{(\mu_0,\cdots,\mu_n)}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k\check{\varphi}_{\tau_1(\mu_0)\cdots\tau_1(\mu_{k-1})\tau_1(\mu_{k+1})\cdots\tau_1(\mu_j)\tau_2(\mu_j)\cdots\tau_2(\mu_n)}$$
$$V_{\mu_0}\wedge\cdots\wedge V_{\mu_n}$$

$$+ \sum_{(\mu_0,\cdots,\mu_n)}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{k+1}\check{\varphi}_{\tau_1(\mu_0)\cdots\tau_1(\mu_j)\tau_2(\mu_j)\cdots\tau_2(\mu_{k-1})\tau_2(\mu_{k+1})\cdots\tau_2(\mu_n)}$$
$$V_{\mu_0}\wedge\cdots\wedge V_{\mu_n}$$

$$+ \sum_{(\mu_0,\cdots,\mu_n)}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(-1)^j\check{\varphi}_{\tau_1(\mu_0)\cdots\tau_1(\mu_{j-1})\tau_2(\mu_j)\cdots\tau_2(\mu_n)}V_{\mu_0}\wedge\cdots\wedge V_{\mu_n}$$

$$+ \sum_{(\mu_0,\cdots,\mu_n)}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(-1)^{j+1}\check{\varphi}_{\tau_1(\mu_0)\cdots\tau_1(\mu_j)\tau_2(\mu_{j+1})\cdots\tau_2(\mu_n)}V_{\mu_0}\wedge\cdots\wedge V_{\mu_n}$$

となる．ここで右辺の第1,2項においては

$$(-1)^k V_{\mu_0}\wedge\cdots\wedge V_{\mu_n} = V_{\mu_k}\wedge V_{\mu_0}\wedge\cdots\wedge V_{\mu_{k-1}}\wedge V_{\mu_{k+1}}\wedge\cdots\wedge V_{\mu_n}$$

に注意し，μ_k を動く添え字 μ と見なして他の添え字の番号を少しずらし，j について先に加えたものをまとめれば，同じ形の和が $n+1$ 個現われ，従って全体としてそれが(5.5.10)の右辺の符号を変えたものを与えることが容易にわかる．一方，第3,4項は双方の中間項が二つずつ打ち消し合い，端に残った二つの項が ${\tau_2}^{*n}\varphi-{\tau_1}^{*n}\varphi$ を与えることがわかる．証了．

上の補題により今後写像 $[\tau^{*n}]_*$ を単に $\rho_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}{}^n$ と細分写像によらぬ記号を用いて書くことができる．相対被覆の細分の場合には厳密には $\mathfrak{U}',\mathfrak{V}'$ も併記せねばならぬが，記号があまりに繁雑となるので，同じ記号で代用することとする．

補題 5.5.8　細分に伴う被覆コホモロジーの写像 $\rho_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}{}^n$ は，Leray の定理 5.5.6 で与えられた分解によるコホモロジーへの自然な写像と両立する．すなわち，次の図式が可換となる：

(5.5.11)
$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{F}) & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}{}^n} & H^n(\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}', \mathcal{F}) \\ & {}_{\check{c}_{\mathfrak{U}}{}^n}\searrow \quad \swarrow{}_{\check{c}_{\mathfrak{V}}{}^n} & \\ & H^n{}_S(X, \mathcal{F}) & \end{array}$$

証明　2枚の紙を用意し，その一枚には可換図式(5.5.8)を記し，他の一枚には同じ可換図式を相対被覆 $\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}'$ について作ったものを記す．そして2枚の紙を上下にぴったり重ねると，一枚目の図式の各項から二枚目の図式の同じ

位置にある項に向って τ^* により誘導される写像 $\rho_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}{}^n$ が存在する．τ^* は明らかに δ や d と可換なので，こうして立体的な可換図式が得られる．この図式を 3 次元的にたどれば上の図式の可換性が容易に知られる．証了．

上の諸補題により被覆のコホモロジー $H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F})$ は細分に関して帰納系をなし，そこから $H^n{}_S(X, \mathscr{F})$ への自然な写像があることがわかった．故に細分に関する極限をとれば，個々の被覆にはよらぬ新しいコホモロジーの概念が得られ，これを $H^n{}_S(X, \mathscr{F})$ と比較することが可能となる．

定義 5.5.9　$\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層，$S \subset X$ を閉集合とする．対 $(X, X \setminus S)$ の相対被覆に関する被覆コホモロジーの極限

$$\check{H}^n{}_S(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}'} H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F})$$

をこの対 $(X, X \setminus S)$ の $\mathscr{F}$-係数**相対 Čech コホモロジー**と呼ぶ．$S = X$ という特別な場合として，X の $\mathscr{F}$-係数（絶対）Čech コホモロジー $\check{H}^n(X, S) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ も定義される．また写像

$$\check{c}^n = \varinjlim \check{c}^n{}_{\mathfrak{U}}:\ \check{H}^n{}_S(X, \mathscr{F}) \to H^n{}_S(X, \mathscr{F})$$

を帰納極限により自然に定める．

定理 5.5.10　$X, X \setminus S$ がともにパラコンパクトな Hausdorff 空間ならば，上の写像 $\check{c}^n$ は同型となる．

証明　補題 5.5.3 で示した長完全列から帰納極限へゆけば，$\check{H}^n$ に関しても定理 5.3.6 d) と同じ基本長完全列

$$\begin{aligned} 0 \to \check{H}^0{}_S(X, \mathscr{F}) &\to \check{H}^0(X, \mathscr{F}) \to \check{H}^0(X \setminus S, \mathscr{F}) \\ &\to \check{H}^1{}_S(X, \mathscr{F}) \to \cdots \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．故に絶対コホモロジーの場合に一般に同型を示しておけば，$\check{H}^k(X, \mathscr{F}) = H^k(X, \mathscr{F}), \check{H}^k(X \setminus S, \mathscr{F}) = H^k(X \setminus S, \mathscr{F})$ から $\check{H}^k{}_S(X, \mathscr{F}) = H^k{}_S(X, \mathscr{F})$ も得られる．

そこで以下 S は無いものとしよう．以下にやるべきことを直観的に説明すれば次のようになる：自然な写像 $H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^n(X, \mathscr{F})$ を定義するのに用いた可換図式 (5.5.8) から "極限" にゆけば

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{L}^1) & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \varinjlim_{\mathfrak{U}} C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) & \longrightarrow & \varinjlim_{\mathfrak{U}} C^0(\mathfrak{U},\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \varinjlim_{\mathfrak{U}} C^0(\mathfrak{U},\mathscr{L}^1) & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \varinjlim_{\mathfrak{U}} C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) & \longrightarrow & \varinjlim_{\mathfrak{U}} C^1(\mathfrak{U},\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \varinjlim_{\mathfrak{U}} C^1(\mathfrak{U},\mathscr{L}^1) & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

という可換図式が得られる．この第一列のコホモロジーは $\check{H}^n(X,\mathscr{F})$ であり，また横行の方は X がパラコンパクトのときは $\mathscr{F}$ の茎における完全性に帰着されるので完全となる．故に Weil の補題により $H^n(X,\mathscr{F})$ から $\check{H}^n(X,\mathscr{F})$ に向ってこの図式を逆にたどることができ，両者は同型となる．

細分写像の不定性があるので $C^k(\mathfrak{U},\mathscr{L}^j)$ は厳密な意味での帰納系とは言えず，従って実際の証明としては次の二つを極限にゆく前の図式について示すこととなる：

a)　($\check{c}$ の単射性)　余輪体 $\varphi\in C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ が $\check{c}_{\mathfrak{U}}{}^n\varphi=0$ を満たせば，細分 $\tau:\mathfrak{B}\to\mathfrak{U}$，およびその上の余鎖 $\psi\in C^{n-1}(\mathfrak{B},\mathscr{F})$ で $\delta^{n-1}\psi=\tau^{*n}\varphi$ となるものが存在する．

b)　($\check{c}$ の全射性)　$f\in\Gamma(X,\mathscr{L}^n)$ が $d^nf=0$ を満たせば，適当な被覆 $\mathfrak{U}$ 及びその上の余輪体 $\varphi\in C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ で，$\check{c}_{\mathfrak{U}}{}^n\varphi=f$ を満たすものが存在する．

これらを証明するには次の補題を用いて上で説明した図式追跡をある固定した被覆から始め，必要な細分を繰返しながら遂行すればよい．

補題 5.5.11　X をパラコンパクトな Hausdorff 空間，$\mathscr{F}'\xrightarrow{h'}\mathscr{F}\xrightarrow{h}\mathscr{F}''$ をその上の層の完全列とする．このとき $h\varphi=0$ を満たす任意の $\mathscr{F}$-係数余鎖 $\varphi\in C^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ に対し，$\mathfrak{U}$ の適当な細分 $\mathfrak{B}$ の上の $\mathscr{F}'$-係数余鎖 $\psi\in C^n(\mathfrak{B},\mathscr{F}')$ で $h'\psi=\tau^{*n}\varphi$ となるものが存在する．ここに τ は適当な細分写像を表わす．

証明　パラコンパクトの仮定から $\mathfrak{U}$ は局所有限な被覆と仮定しても一般性を失わない．さらに，各 $U_\lambda\in\mathfrak{U}$ に対し開部分集合 W_λ を $\overline{W}_\lambda\subset U_\lambda$，かつ $\{W_\lambda\}$ が再び X の被覆となるように選ぶことができる．X の各点 x に対し，次の条件を満たす近傍 V_x を選ぼう．

a)　ある λ について $V_x\subset W_\lambda$

b) $V_x \cap \overline{W}_\mu \neq \phi$ ならば $V_x \subset U_\mu$

c) $V_x \cap \overline{W}_{\lambda_0} \cap \cdots \cap \overline{W}_{\lambda_n} \neq \phi$ ならば，$\psi_{x,\lambda_0\cdots\lambda_n} \in \mathscr{F}'(V_x)$ で $h'\psi_{x\lambda_0\cdots\lambda_n} = \varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_n}|_{V_x}$ を満たすものが存在する.

実際，a), b) を満たす V_x が存在することは局所有限性から容易にわかる. このとき c) の仮定から $V_x \subset U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_n}$ となるから，層の列の完全性によりこの特定の添え字については V_x をさらに縮めることにより上の様な $\psi_{x,\lambda_0\cdots\lambda_n}$ を見出すことが可能である. ところで $\{W_\lambda\}$ の局所有限性により，この様な添え字の組は高々有限個だから，V_x としてはこのような近傍の共通部分を採用すれば良い.

そこで $\mathfrak{V} = \{V_x\}_{x\in X}$ とおき，細分写像 $\lambda: X \to \Lambda$ を一つ固定する.（すなわち，$V_x \subset W_{\lambda(x)}$ なる添え字 λ を選ぶ.）すると

$$\psi = \sum_{(x_0,\cdots,x_n)} \psi_{x_0,\lambda(x_0)\cdots\lambda(x_n)} V_{x_0} \wedge \cdots \wedge V_{x_n} \in C^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F}')$$

は求める $\mathscr{F}'$-係数余鎖となる. 実際 $V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_n} \neq \phi$ ならば $V_{x_0} \cap \overline{W}_{\lambda(x_0)} \cap \cdots \cap \overline{W}_{\lambda(x_n)} \neq \phi$，従って係数は確かに定まっている. 証了.

この定理により，少くとも我々が扱う普通の空間の上では $\check{H}^n{}_S(X, \mathscr{F})$ と $H^n{}_S(X, \mathscr{F})$ とを同一視することができる. もっとも理論上はともかく実際の計算で極限をとるのは容易ではなく，その意味では却って次の補題の方が応用が広いかも知れない.

補題 5.5.12 $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層とし，$S \subset X$ を閉集合とする. もしも層 $\mathscr{F}$ に対する Leray 被覆が対 $(X, X\setminus S)$ の相対被覆全体の中で共終部分集合をなすならば(即ち，任意の被覆 $\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}'$ に対しその細分 $\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}'$ で $\mathscr{F}$ に対して Leray 被覆となるものが必ず存在すれば)，$\check{H}^n{}_S(X, \mathscr{F}) = H^n{}_S(X, \mathscr{F})$ となる.

証明は帰納極限の定義より明らかである.

以上で分解によるコホモロジーと被覆コホモロジーとの関係は明らかにされたので，今度は層の準同型 $h: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が前者に誘導する自然な写像 $h_*{}^n: H^n{}_S(X, \mathscr{F}) \to H^n{}_S(X, \mathscr{G})$ が後者ではどのように表現されるかを調べよう.

補題 5.5.13 層の準同型 $h: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が与えられたとき，

$$(5.5.12)\qquad \begin{array}{ccc} C^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F}) & \longrightarrow & C^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sum \varphi_{\lambda_0 \cdots \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \cdots \wedge U_{\lambda_n} & \longmapsto & \sum h\varphi_{\lambda_0 \cdots \lambda_n} U_{\lambda_0} \wedge \cdots \wedge U_{\lambda_n} \end{array}$$

という対応から自然に $h_{\mathfrak{U}}{}^n : H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F}) \to H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{G})$ という写像が引き起こされる．これは細分写像と可換であり，またLerayの定理が与える写像とも両立する：

$$(5.5.13)\qquad \begin{array}{ccc} H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{F}) & \xrightarrow{\check{c}_{\mathfrak{U}}{}^n} & H^n{}_S(X, \mathscr{F}) \\ {\scriptstyle h_{\mathfrak{U}}{}^n}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle h_*{}^n} \\ H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{G}) & \xrightarrow{\check{c}_{\mathfrak{U}}{}^n} & H^n{}_S(X, \mathscr{G}) \end{array}$$

従って極限に行けば

$$(5.5.14)\qquad \begin{array}{ccc} \check{H}^n{}_S(X, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\check{c}^n} & H^n{}_S(X, \mathscr{F}) \\ {\scriptstyle \check{h}_*{}^n}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle h_*{}^n} \\ \check{H}^n{}_S(X, \mathscr{G}) & \xrightarrow{\check{c}^n} & H^n{}_S(X, \mathscr{G}) \end{array}$$

という自然な可換図式が得られる．

ここで(5.5.12)中の h は正確には $h_{U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_n}} : \mathscr{F}(U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_n}) \to \mathscr{G}(U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_n})$ のことである．(5.5.12)から写像 $h_{\mathfrak{U}}{}^n$ が定まることは層の準同型が定義によって制限写像と可換なことから直ちに従う．細分写像との可換性も同様である．さらに，$h_{\mathfrak{U}}{}^n$ がLerayの定理の与える写像と可換図式(5.5.13)を作ることは，層 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ に対応する図式(5.5.8)を上下に重ね合わせ，両者の対応項を h から自然に誘導される写像で繋いで立体的可換図式を作ってみれば容易にわかる．

この節の最後に被覆コホモロジーの方法で容易に計算できる例のうちで最も基本的なものを挙げておこう．

例 5.5.14　$\boldsymbol{R}^n$ 上の連続函数の層 C と任意の開集合 $U \subset \boldsymbol{R}^n$ について $H^k(U, C) = 0\ (k \geq 1)$ が成り立つ．$\mathscr{E}, L_{1,loc}$ についても同様である．

定理5.4.1により $H^1(U, C) = 0$ を示せば十分である．実際，これより $H^1(\boldsymbol{R}^n, C) \to H^1(U, C)$ が全射となるから，C の脆弱次元 ≤ 1，つまり長さ1以下の脆弱分解が存在することになり，$k \geq 2$ においては相対コホモロジーも一般に消えてしまう．一方，$H^1(U, C) = 0$ は，第1章§5の，所謂Mittag-Lefflerの定理(補題1.5.2)に倣い，被覆コホモロジーを用いて初等的に証明することができ

る．(補題 1.5.1 の分解や Runge の近似定理に相当する事実は，これらの層に対しては対応するクラスの函数による台の切断を用いてより易しく証明される．) さて，$\mathcal{F}$ を不連続な函数の芽の作る層とすれば，$\mathcal{F}$ は脆弱で $0 \to C \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/C \to 0$ は完全である．故に fl. dim $C \leq 1$ より，定理 5.4.1 の c)⇒a) の証明における如く $\mathcal{F}/C$ は必然的に脆弱でなければならないことがわかる．即ち C の脆弱分解が得られた．$\mathcal{F}/C$ の脆弱性を直接証明しようとすれば，自然に $H^1(U, C)=0$ の被覆コホモロジーによる証明と良く似た議論にゆき着くことを確かめられたい．(問 5.1.2 参照)

被覆コホモロジーの方法はコホモロジーの計算の手段と言うよりは，コホモロジーの元を具体的に把握するための手段としてより大きな意義を持っている．このことは超函数論への応用においてもおいおい明らかとなるであろう．

問 5.5.4 $U \subset \boldsymbol{C}$ を開集合とし，$\mathfrak{U}$ を U の任意の開被覆とするとき，一変数正則函数の芽の層 $\mathcal{O}$ について $H^k(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ を求めよ．また fl. dim $\mathcal{O}$ を求めよ．

問 5.5.5 $\Omega \subset \boldsymbol{R}$ を開集合，U を Ω の複素近傍とするとき完全列

$$0 \to \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U \setminus \Omega) \to H^1{}_\Omega(U, \mathcal{O}) \to 0$$

を示し，これより $\mathcal{B}(\Omega) = H^1{}_\Omega(\boldsymbol{C}, \mathcal{O})$ を証明せよ．

参考 5.1 被覆コホモロジーを考えるとき，実用上は $\lambda \neq \mu$ ならば当然 $U_\lambda \neq U_\mu$ となるような被覆を選ぶわけであるが，上の議論においては，この制約を敢えて付けなかった．それは理論上この方が便利なためである．たとえば，仮にこのような制約をつけた "自然な" 被覆 $\mathfrak{U}$ から出発しても補題 5.5.5 の証明で用いた様な制限 $\mathfrak{U}|_U$ を考えると，異なる添え字を持った元が同一の開集合となり得る．ところで被覆 $\mathfrak{U}$ に二つの相異なる番号 λ, μ を持つ同一の開集合が属するときには，次に述べる理由でコホモロジー群を変えることなく番号の一つを除去することができる．故に上の様な注意は実はどうでも良かったのである．さて，$\mathfrak{U} = \{\cdots, U_\lambda, U_\mu, \cdots\}$，$U_\lambda = U_\mu$，とし $\mathfrak{U}_\lambda = \{\cdots, U_\lambda, \cdots\}$ とおく，すなわち $\mathfrak{U}$ から U_μ を省略した被覆とする．このとき自然に $\mathfrak{U} < \mathfrak{U}_\lambda$ となるが，逆に $U_\lambda \subset U_\lambda$，$U_\mu \subset U_\lambda$ という対応で $\mathfrak{U}_\lambda < \mathfrak{U}$ ともなる．これらの細分写像をそれぞれ ι, ρ と書けば，$\rho \circ \iota$，$\iota \circ \rho$ はそれぞれ $\mathfrak{U}$ 及び $\mathfrak{U}_\lambda$ のそれ自身への細分写像となる．一方，同一の被覆については恒等写像が明らかに一つの細分写像であり，従って補題 5.5.7 により $[(\rho \circ \iota)^n]_*$，$[(\iota \circ \rho)^n]_*$ はそれぞれ $H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{F})$ 及び $H^n(\mathfrak{U}_\lambda \bmod \mathfrak{U}_\lambda', \mathcal{F})$ 上恒等写像となる．故に $[\iota^n]_* : H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{F}) \to H^n(\mathfrak{U}_\lambda \bmod \mathfrak{U}_\lambda', \mathcal{F})$ は同型となる．

§6　高次順像

連続写像による層の順像については既に第1章定義1.7.12において定義を与えた．ここではその導来函手にあたるものを考えよう．

定義 5.6.1　X, Y を二つの位相空間とし $f: X \to Y$ を連続写像とする．$\mathscr{F}$ を X 上の層とするとき，次の前層

$$Y \supset U \longmapsto H^n(f^{-1}(U), \mathscr{F}) \tag{5.6.1}$$

に同伴した Y 上の層を，$\mathscr{F}$ の写像 f による n 次順像と呼び，$R^n f_*(\mathscr{F})$ で表わす．

R^n は一般にある函手の n 次**右導来函手**を表わす記号であり，既出の導来層の場合も $\mathscr{H}^n{}_S$ の代わりに $R^n \Gamma_S$ と書くことができる．しかし導来層の場合と異なり $R^n f_*$ には特別な記号は使われていない．両者は左完全な函手に対する右導来函手の二つの例として非常に良く似た性質を持っており，まとめて覚えておくと都合が良い．実際，まず $R^0 f_*(\mathscr{F}) = f_*(\mathscr{F})$ であり，次に $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^{\cdot}$ を X 上の $\mathscr{F}$ の一つの脆弱分解とすれば，f_* を施すことにより Y 上の層の複体 $f_*(\mathscr{L}^{\cdot})$ が得られるが，

$$R^n f_*(\mathscr{F}) = H^n(f_* \mathscr{L}^{\cdot}) \tag{5.6.2}$$

となる．何となれば，開集合 $U \subset Y$ に対し

$$H^n((f_* \mathscr{L}^{\cdot})(U)) = H^n(\mathscr{L}^{\cdot}(f^{-1}(U))) = H^n(f^{-1}(U), \mathscr{F})$$

だから，$y \in Y$ において

$$H^n((f_* \mathscr{L}^{\cdot})_y) = \varinjlim_{U \ni y} H^n(f^{-1}(U), \mathscr{F}) = R^n f_*(\mathscr{F})_y$$

となるからである（第1章補題1.7.2参照）．

問 5.6.1　函手 f_* が左完全なことを確かめよ．

定義 5.6.2　$R^k f_*(\mathscr{F}) = 0$ が $k > n$ に対して成り立つとき，写像 f は層 $\mathscr{F}$ に関して次元 $\leq n$ であるという．特に $R^k f_*(\mathscr{F}) = 0$ が $k \neq n$ に対して成り立つとき，f は層 $\mathscr{F}$ に関して**純 n 次元的**であるという．

順像の定義のところで既に注意した様に，$k=0$ のとき $f_* \mathscr{F} = R^0 f_*(\mathscr{F})$ は前層(5.6.1)がそのままで層となっているが，高次順像については必ずしもそう

ではない．これに関しては補題 5.3.5 と全く同じ判定規準がある．

補題 5.6.3 $R^k f_*(\mathscr{F})=0$ が $k<n$ について成り立っているならば，前層(5.6.1)は層となり，従って $R^n f_*(\mathscr{F})(U)=H^n(f^{-1}(U),\mathscr{F})$ が成り立つ．

証明は函手 f_* が Γ_S と同様脆弱性を保つこと，すなわち $\mathscr{F}$ の脆弱分解 $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^{\cdot}$ に対して各 $f_*\mathscr{L}^j$ が Y 上の脆弱層となるという自明な事実に注意すれば補題 5.3.5 と全く同様にゆく．

二つの函手 Γ_S と f_* の結合の導来函手についても，定理 5.4.4 に類似の次の定理が成り立つ．この証明も $\Gamma_S(Y,f_*\mathscr{L}^j)=\Gamma_{f^{-1}(S)}(X,\mathscr{L}^j)$ という自明な関係に注意すれば同様にゆく．

定理 5.6.4 $f:X\to Y$ が X 上の層 $\mathscr{F}$ に関して純 n 次元的ならば，Y の局所閉部分集合 S について任意の k に対し次の等式が成り立つ．

$$H^k{}_{f^{-1}(S)}(X,\mathscr{F}) = H^{k-n}{}_S(Y,R^n f_*(\mathscr{F}))$$

問 5.6.2 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ をそれぞれ位相空間の連続写像とし，$\mathscr{F}$ を X 上の層とする．f が $\mathscr{F}$ について純 n 次元的ならば，任意の k に対し $R^k(g\circ f)_*(\mathscr{F})=R^{k-n}g_*(R^n f_*(\mathscr{F}))$ が成り立つ．

高次順像の計算は，たとえ茎だけを求めたい場合でも，もとの空間の部分集合 $f^{-1}(U)$ に対する大域的なコホモロジー群の計算が必要となるため大変難しい．この場合せめて $f^{-1}(U)$ から $\varinjlim_{U\ni y}$ をとる過程を省略し，直接写像 f の繊維 $f^{-1}(y)$ 上のコホモロジー群の計算で置き換えることができれば，少しは易しくなるかもしれない．このため層の閉集合を含む一般の集合への制限という新たな概念を導入しよう．

定義 5.6.5 X を位相空間，$S\subset X$ を部分集合とし，$\iota:S\to X$ を包含写像とする．X 上の層 $\mathscr{F}$ に対し，その S への制限を逆像 $\iota^{-1}\mathscr{F}$ により定義し，単に $\mathscr{F}|_S$ と記す．

層の逆像の定義（第 1 章定義 1.7.9）によれば，$\mathscr{F}|_S$ は前層

$$(5.6.3)\quad S\cap U\longmapsto \varinjlim_{V}\{\mathscr{F}(V);V\text{ は }S\cap U\text{ を含む }X\text{ の開集合}\}$$

に同伴する S 上の層であり，$x\in S$ に対し $(\mathscr{F}|_S)_x=\mathscr{F}_x$ であった．従って特に S

が開集合のときは今まで用いて来た制限記号と一致する．S が次元の低い集合のとき，制限の概念はいわゆる函数の制限とは異なることに特に注意されたい．例えば，$\boldsymbol{R}^n$ 上の C^∞ 級函数の芽の層 $\mathscr{E}$ に対し，$\mathscr{E}|_{\{x_1=0\}}$ は $x_1=0$ 上の $n-1$ 変数 C^∞ 級函数の層とは全く異なり，n 変数 C^∞ 級函数芽を $x_1=0$ の上だけで考えているにすぎない．

一般に層の逆像の大域的切断はもとの層の切断により簡単に表わすことはできないのであるが，$\mathscr{F}|_S$ の場合には普通に用いられるような位相空間について次の表現が役に立つ．

命題 5.6.6　位相空間 X の開集合はすべてパラコンパクト Hausdorff であるとする．このとき任意の部分集合 $S\subset X$，および X 上の層 $\mathscr{F}$ について

$$H^k(S,\mathscr{F}|_S)=\varinjlim_{U\supset S}H^k(U,\mathscr{F}),\qquad k\geq 0 \tag{5.6.4}$$

が成り立つ．ただし右辺の極限は S を含むすべての開集合に関してとるものとする．

以下の証明を見ればわかるように，ある固定した S について(5.6.4)が成り立つためには，その S がパラコンパクト Hausdorff な基本近傍系を持てば十分である．しかし我々の応用には上のような位相空間 X を考えておけば十分なので，今後開集合がすべてパラコンパクトとなる空間を**全パラコンパクト**な空間と呼んで利用することにしよう．

証明　第一段　例によってまず $k=0$ の場合を考える．$U\supset S$ を開集合とするとき $s\in\Gamma(U,\mathscr{F})$ は定義により $\mathscr{F}|_S$ の S 上の大域的切断を定める．これを $s|_S$ と記そう．対応 $s\mapsto s|_S$ は U を縮める操作と両立するから，

$$\varinjlim_{U\supset S}\Gamma(U,\mathscr{F})\to\Gamma(S,\mathscr{F}|_S) \tag{5.6.5}$$

という自然な写像が得られる．これが同型であることを示そう．まず単射性を見る．U_1, U_2 を S を含む二つの開集合とし $s_1\in\Gamma(U_1,\mathscr{F}), s_2\in\Gamma(U_2,\mathscr{F})$ は $s_1|_S=s_2|_S$ を満たすとせよ．これは各点 $x\in S$ において両者の定める芽が等しいこと，即ち $s_1(x)=s_2(x)$ を意味するから，もとの空間における適当な近傍 V_x があって $s_1|_{V_x}=s_2|_{V_x}$ となっている．すると $V=\bigcup_{x\in S}V_x$ は S の一つの近傍で $s_1|_V=s_2|_V$．即ち，(5.6.5)の左辺の極限空間において $s_1=s_2$ となる．

逆に $s\in\Gamma(S,\mathscr{F}|_S)$ を任意の元とする．各点 $x\in S$ において $(\mathscr{F}|_S)_x=\mathscr{F}_x$ である

から，もとの空間における適当な近傍 U_x と，その上の切断 $s_x \in \Gamma(U_x, \mathscr{F})$ をとれば，$s_x|_{S\cap U_x}=s|_{S\cap U_x}$ が成り立つ．$U=\bigcup_{x\in S} U_x$ とおく．仮定により U はパラコンパクトだから，U の被覆 $\{U_x\}_{x\in S}$ に対し局所有限な細分 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と，さらに $\overline{W}_\lambda \subset V_\lambda$ を満たすその又細分 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とを選ぶことができる．細分写像 $x:\Lambda \to S$ を一つ固定し，$s_\lambda=s_{x(\lambda)}|_{V_\lambda}$ とおこう．このとき

$$V = \{x \in X; s_\lambda(x) = s_\mu(x) \text{ が } x \in \overline{W}_\lambda \cap \overline{W}_\mu \text{ のとき成立}\}$$

は(それ自身開集合とは限らぬが) S の近傍を含むことがわかる．実際，S の各点 $x\in S$ において，まずもとの空間におけるその近傍 V_x を，それが $\{\overline{W}_\lambda\}$ のうちの有限個としか交わらぬように選ぶ．それらを $\overline{W}_{\lambda_1}, \cdots, \overline{W}_{\lambda_N}$ としよう，次により小さい近傍 $W_x\subset V_x$ を $s_{\lambda_1}|_{W_x}=\cdots=s_{\lambda_N}|_{W_x}$ となるように選ぶ．このとき $W_x\subset V$ となっていることは明らかであり，従って $W=\bigcup_{x\in S} W_x\subset V$ は S の近傍となる．定め方により局所的切断 S_λ は W の上で一つの切断 $\tilde{s}\in\Gamma(W,\mathscr{F})$ につながり，$\tilde{s}|_S=s$ が成り立つ，これで(5.6.5)の同型が示された．

いま証明したことは次の様にも言い換えられることに注意せよ．すなわち，この特別な場合においては，逆像 $\iota^{-1}\mathscr{F}$ は前層(5.6.3)の段階で既に層をなしている．

第二段　X 上の脆弱層 $\mathscr{L}$ に対しては，$\mathscr{L}|_S$ もまた脆弱となることを見よう．$U\subset X$ を任意の開集合とすれば，第一段により

$$\Gamma(S \cap U, \mathscr{L}|_S) = \varinjlim_{V\supset S\cap U} \Gamma(V, \mathscr{L})$$

故に $s\in\Gamma(S\cap U, \mathscr{L}|_S)$ はある切断 $s_V\in\Gamma(V,\mathscr{L})$ の制限像である．$\mathscr{L}$ は脆弱だから，後者はある元 $\tilde{s}\in\Gamma(X,\mathscr{L})$ まで延長できる．このとき $\tilde{s}|_S\in\Gamma(S,\mathscr{L}_S)$ は求める s の延長となる．

第三段　一般の場合を考え，$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^{\cdot}$ を一つの脆弱分解とする．逆像が完全性を保つことと第二段とにより $0\to\mathscr{F}|_S\to\mathscr{L}^{\cdot}|_S$ は $\mathscr{F}|_S$ の脆弱分解となる．故に帰納極限の完全性(補題5.2.8)及び第一段により

$$\varinjlim_{U\supset S} H^k(U,\mathscr{F}) = \varinjlim_{U\supset S} H^k(\Gamma(U,\mathscr{L}^{\cdot})) = H^k(\varinjlim_{U\supset S}\Gamma(U,\mathscr{L}^{\cdot}))$$
$$= H^k(\Gamma(S,\mathscr{L}^{\cdot}|_S)) = H^k(S,\mathscr{F}|_S) \qquad \text{証了．}$$

次の定理は高次順像を繊維の大域的コホモロジーにより計算できるための便利な十分条件を与えている．

定理 5.6.7　位相空間 X は全パラコンパクト Hausdorff とし，$f: X \to Y$ は**連続かつ閉写像**(即ち，X の任意の閉集合の f による像が再び Y の閉集合となるようなもの)とする．このとき X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し，各点 $y \in Y$ において

$$(R^k f_* \mathcal{F})_y = H^k(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)})$$

が成り立つ．

証明　前命題により

$$H^k(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)}) = \varinjlim_{U \supset f^{-1}(y)} H^k(U, \mathcal{F})$$

が成り立つ．ところで f が閉写像の場合には $\{f^{-1}(V); V \text{ は } y \text{ の近傍}\}$ の形の開集合が $f^{-1}(y)$ の基本近傍系を成す．(実際，任意の近傍 $U \supset f^{-1}(y)$ に対し $f(X \setminus U)$ は y を含まぬ Y の閉集合となるから，$V = Y \setminus f(X \setminus U)$ とおけば $U \supset f^{-1}(V) \supset f^{-1}(y)$.) 故に上の帰納極限の計算をこの形の開集合による共終部分系に制限して行なうことができ

$$\varinjlim_{U \supset f^{-1}(y)} H^k(U, \mathcal{F}) = \varinjlim_{V \ni y} H^k(f^{-1}(V), \mathcal{F}) = (R^k f_* \mathcal{F})_y$$

が得られる．証了.

問 5.6.3　X, Y は全パラコンパクト Hausdorff な位相空間とし，$\boldsymbol{C}_X, \boldsymbol{C}_Y$ は茎 $\boldsymbol{C}$ を持つそれぞれの空間上の定数層とする．また $f: X \to Y$ を連続写像とする．このとき，a) $f^{*n}: H^n(Y, \boldsymbol{C}_Y) \to H^n(X, \boldsymbol{C}_X)$ という自然な写像が存在することを示せ．[$f^{-1}\boldsymbol{C}_Y = \boldsymbol{C}_X$ に注意せよ.] b) この写像を Čech コホモロジーで表現せよ．c) $I = [0, 1]$ とするとき，自然な射影 $\pi: X \times I \to X$ は $\boldsymbol{C}_{X \times I}$ について純0次元的となり，従って $\pi_*{}^n: H^n(X \times I, \boldsymbol{C}_{X \times I}) \to H^n(X, \boldsymbol{C}_X)$ という同型写像が導かれることを示せ．d) π から導かれる写像 $\pi^{*n}: H^n(X, \boldsymbol{C}_X) \to H^n(X \times I, \boldsymbol{C}_{X \times I})$ は上の写像 $\pi_*{}^n$ の逆写像となり，従ってこれも同型となることを示せ．e) 自然な埋め込み $\iota_j: X \to X \times \{j\} \subset X \times I$, $j = 0, 1$, から誘導される写像 $\iota_j{}^{*n}: H^n(X \times I, \boldsymbol{C}_{X \times I}) \to H^n(X, \boldsymbol{C}_X)$ はいずれも π^{*n} の左逆となり，従ってこれらも同型となることを示せ．f) $F(x, t): X \times I \to Y$ を連続写像とするとき，$F(x, j)^{*n}: H^n(Y, \boldsymbol{C}_Y) \to H^n(X, \boldsymbol{C}_X)$, $j = 0, 1$ は同一の写像となることを示せ．これより，我々の意味での $\boldsymbol{C}$-係数コホモロジー群がホモトピー不変なことを証明せよ.

§7　軟　　層

位相空間 X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し，その切断空間の概念は一般の部分集合 $S \subset X$

に対しても拡張される．即ち，

$$\mathscr{F}(S) = \Gamma(S, \mathscr{F}) \underset{\text{定義}}{=} \Gamma(S, \mathscr{F}|_S) \tag{5.7.1}$$

この式の最右辺は S 上の層 $\mathscr{F}|_S$ の全空間 S での切断空間だから既知のものである．同様に $H^n(S, \mathscr{F}|_S)$ も $H^n(S, \mathscr{F})$ と略記するのが普通である．X が全パラコンパクト Hausdorff ならば命題 5.6.6 により $\mathscr{F}(S) = \varinjlim_{U \supset S} \mathscr{F}(U)$ 等が成り立つので，これらはそれほどわかり難いものではない．この様に定義を拡張した序でに，閉集合上の切断空間と密接に結びついた次の概念を導入しておこう．

定義 5.7.1　位相空間 X 上の層 $\mathscr{F}$ は，その任意の閉集合 $F \subset X$ 上の切断が全空間まで延長できるとき，**軟層** (soft sheaf) と呼ばれる．

X が上に述べたような位相空間のときには，$\mathscr{F}(F)$ の元は F のある開近傍 U 上の切断にまず延長できるから，脆弱層は軟層でもある．故に軟層はおおむね脆弱層よりはやや弱い概念と考えることができる．実際，軟層 $\mathscr{F}$ の開集合上の切断 $s \in \mathscr{F}(U)$ は，境界 ∂U の近傍の補集合たる閉集合に制限すれば定義により全空間に延長できるから，結局，境界の任意の微小近傍における変更を犠牲にすれば全空間に延長できることになる．X が上に述べたような空間のときには，命題 5.6.6 により逆にこの性質から，閉集合上の切断が全空間へ延長できることが導かれる．こうして $\boldsymbol{R}^n$ 上の連続函数の層 C，或は $\mathscr{E}, L_{1,loc}$ などは軟層の例となる．我々の応用の程度に鑑み，以下簡単のため X は常に全パラコンパクト Hausdorff とする．

$\boldsymbol{R}^n$ 上の連続函数の層 C について例 5.5.14 で述べたことは次のように一般化することができる．

系 5.7.2　上述の如き位相空間 X の上の任意の軟層 $\mathscr{F}$ と任意の部分集合 $S \subset X$ について，$H^k(S, \mathscr{F}) = 0\ (k \geq 1)$ が成り立つ．また fl. dim $\mathscr{F} \leq 1$ である．

S が開集合の場合の証明は連続函数の層 C の場合と同様，被覆コホモロジーを解くことによりなされる．実際，そこで用いたのは，連続函数が境界の微小な近傍における変更を犠牲にすれば全空間に延長できるという事実だけであった．そこから一般の集合 S の場合へは，命題 5.6.6 により開近傍上のコホモロジーの極限として到達できる．

或は，次のように考えることもできる．今までは被覆コホモロジーを扱うの

に専ら開被覆のみを用いて来たが，パラコンパクト Hausdorff 空間 X の絶対コホモロジーの計算にはもっと一般の被覆が使える．実際，まず定義 5.5.2 における $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ の定義には，各 $U_\lambda \in \mathfrak{U}$ が開集合であることは不要なことに注意せよ．そこで特に閉集合を成分とする局所有限な被覆 $\overline{\mathfrak{U}} = \{\overline{U}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考えると，軟層 $\mathcal{F}$ に対して補題 5.5.5 に相当する次の結果が成り立つ．

補題 5.7.3 $k \geq 1$ に対し $H^k(\overline{\mathfrak{U}}, \mathcal{F}) = 0$.

これは補題 5.5.5 の証明を次のように修正すれば証明できる：列

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to C^0(\overline{\mathfrak{U}}, \mathcal{F}) \to C^1(\overline{\mathfrak{U}}, \mathcal{F}) \to \cdots \to C^{n+1}(\overline{\mathfrak{U}}, \mathcal{F})$$

の完全性を n に関する帰納法で証明するため，そこで用いた集合 $\mathfrak{M}$ の代わりに

$$\mathfrak{M} = \{(\psi, M); M \subset \Lambda, \text{かつ } \overline{U}_M = \bigcup_{\lambda \in M} \overline{U}_\lambda \text{ とおくとき } \psi \in C^{n-1}(\overline{\mathfrak{U}}|_{\overline{U}_M}, \mathcal{F}),$$
$$\delta^{n-1}\psi = \varphi|_{\overline{U}_M}\}$$

という集合を考える．局所有限な閉集合の族については和集合が再び閉集合となることに注意すれば，上の定義式中の $\overline{U}_M$ は閉集合となり，従って $\overline{\mathfrak{U}}|_{\overline{U}_M}$ は $\overline{U}_M$ の閉被覆となる．この $\mathfrak{M}$ も自然な順序で帰納的順序集合となり，補題 5.5.5 の証明がほぼそのまま翻訳できることが容易に確かめられる．

上の補題により，我々の位相空間 X においては，絶対コホモロジーの被覆コホモロジーによる計算に Leray の定理（定理 5.5.6）が局所有限な閉被覆についても使えることがわかる．局所有限な閉被覆でも Leray 被覆（すなわち，(5.5.7) に相当する条件を満たすもの）が見つからなければ極限をとらねばならないが，我々の空間 X においては，Čech コホモロジー $\check{H}^k(X, \mathcal{F})$ を閉被覆によるコホモロジーだけの極限で計算できる．実際，任意の局所有限な開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，その細分として $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$ を満たす同じ添え字集合を持つ開被覆 $\mathfrak{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとり，同時に $\overline{\mathfrak{V}} = \{\overline{V}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ という閉被覆を考えれば，

$$H^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^k(\overline{\mathfrak{V}}, \mathcal{F}) \to H^k(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

という自然な写像が存在するから，$\varinjlim_{\mathfrak{U}} H^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\overline{\mathfrak{V}}} H^k(\overline{\mathfrak{V}}, \mathcal{F})$ となる．（ここでの極限は内包が X の開被覆をなすような閉被覆についてのみとられていることに注意せよ．ただし Leray 被覆として用いるには一般の閉被覆で構わない．）特に，この対応で補題 5.7.3 から系 5.7.2 が再び導かれる．

系 5.7.2 と定理 5.3.3 により，我々の空間 X の上の層 $\mathscr{F}$ については，絶対コホモロジーの計算に軟層 $\mathscr{L}^j$ による $\mathscr{F}$ の分解(所謂**軟分解**) $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^{\cdot}$ を使用できることがわかる. §1 の例 5.1.11 で挙げたもののうち，$\mathscr{E}$ や $\mathscr{D}'$ を用いたものはこのような分解の例となる. 層 $\mathscr{F}$ の軟分解にも長さが考えられ，その最小値として $\mathscr{F}$ の軟次元が定義されるが，まぎらわしいので本書では用いない. これに関して定理 5.4.1 に相当することがいろいろ成り立つが，ここでは後で使うため次のことだけ注意しておこう.

補題 5.7.4 X を上述の如き位相空間とする. X 上の層 $\mathscr{F}$ が任意の閉部分集合 $F\subset X$ に対して $H^1(F,\mathscr{F})=0$ を満たせば，実は $k\geq 2$ についても $H^k(F,\mathscr{F})=0$ となる.

証明 $\mathscr{F}$ の脆弱分解 $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^{\cdot}$ を最初のところで切り

$$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{I}\to 0 \tag{5.7.2}$$

という短完全列を作る. これに対応して F 上のコホモロジー長完全列を考えると，仮定 $H^1(F,\mathscr{F})=0$ より

$$0\to\mathscr{F}(F)\to\mathscr{L}^0(F)\to\mathscr{I}(F)\to 0$$

という完全列を得る. これを用いると，$\mathscr{L}^0$ が脆弱，従って軟層ということから $\mathscr{I}$ も軟層となることがわかる. (系 5.1.5 の証明を参照せよ.) 故に (5.7.2) は層 $\mathscr{F}$ の長さ 1 の軟分解となり，これを用いて計算すれば $H^k(F,\mathscr{F})=0\ (k\geq 2)$ は自明である. 証了.

参考 5.2 軟層の存在意義は，絶対コホモロジーよりもむしろ次のような相対コホモロジーの変種の計算にある：X を局所コンパクトかつ全パラコンパクトな Hausdorff 空間とし，その上の層 $\mathscr{F}$ に対し

$$\Gamma_c(X,\mathscr{F})=\{s\in\mathscr{F}(X):\operatorname{supp}s\text{ はコンパクト}\}$$

という切断空間を考える. Γ_c の n 次導来函手を $H^n{}_c(X,\mathscr{F})$ で表わし，空間 X のコンパクト台を持つ $\mathscr{F}$-係数コホモロジー群と呼ぶ. 帰納極限の完全性と

$$\Gamma_c(X,\mathscr{F})=\varinjlim_{K\subset X}\Gamma_K(X,\mathscr{F})$$

とに注意すれば，脆弱層 $\mathscr{F}$ についてこれらが $n\geq 1$ に対し消えることが直ちにわかり，従って一般に $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^{\cdot}$ を脆弱分解とすれば

$$H^n{}_c(X,\mathscr{F})=H^n(\Gamma_c(X,\mathscr{L}^{\cdot}))=\varinjlim_{K\subset X}H_K{}^n(X,\mathscr{F})$$

となる．ここで $\mathscr{L}^j$ としては軟層をとっても良い．実は，

$$\text{任意の開集合 } U\subset X \text{ について } H^1{}_c(U, \mathscr{F}) = 0 \Longleftrightarrow \mathscr{F} \text{ は軟層}$$

が成り立つ．これは通常の基本長完全列から $K\subset U$ について帰納極限をとることにより得られる

$$0 \to \Gamma_c(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X \setminus U, \mathscr{F})$$
$$\to H^1{}_c(U, \mathscr{F}) \to \cdots$$

という長完全列を用いて容易に示すことができる．

この新しいコホモロジー群に関連して，連続写像 $f: X \to Y$ に関する X 上の層 $\mathscr{F}$ の Y への引越として次のような新しい順像 $f_! \mathscr{F}$ を導入することができる：

$$Y \supset U \longmapsto (f_! \mathscr{F})(U) = \{s \in \mathscr{F}(f^{-1}(U));\ f|_{\operatorname{supp} s} \text{ は適正写像}\}$$

$f_!$ の導来函手を $R^n f_! \mathscr{F}$ で表わす．切断の台の方に制限をつけたため f が閉写像であることを仮定しなくても一般に定理 5.6.7 に相当することが成り立ち，

$$(R^k f_! \mathscr{F})_y = H^k{}_c(f^{-1}(y), \mathscr{F}|_{f^{-1}(y)})$$

となる．これらの概念は更に進んで勉強しようとするとき必要になる．

付　記

ホモロジー代数と層係数コホモロジー理論の参考書としては Godement [1] が有名である．本書では圏と函手の概念を厳密な定義なしに用いたが，上記書物の冒頭によくまとめられた解説がある．層に関する更に詳しい教科書として Bredon [1] もある．ただし，更に進んで勉強される方はともかく，本書を読むための参考としてはこれらの書物は本格的に過ぎよう．それに本章の内容は必ずしもこれらの書物により完全に覆われているわけでも無い．特に Godement[1] はちょうど相対コホモロジーの理論が佐藤 [3]，Grothendieck[1] により導入される直前に書かれたので，これを満足すべき形では含んでいない．本章を書くにあたり，筆者はこの他に小松[3]，柏原[1]，[4]，Grothendieck [2]等で知識を補った．初歩からゆっくり勉強したい読者のために入門書として河田[1]を勧めておく．しかし一般にこれらの入門書も，本書のように $\boldsymbol{C}$-線型空間ではなく捩れを持った加群に対して議論を起こしているので，必ずしもよりわかり易いとは言えないであろう．

被覆コホモロジーの表現に外積代数の記号を用いる流儀は誰が始めたものか正確には知らない．筆者は Palamodov[1]から学んだ．大変便利なので大いに利用されると良い．

本章においては無限集合族の取扱は議論に不可欠である．ここで用いられた基礎知識，特に Zorn の補題やパラコンパクト空間の性質については適当な入門書，例えば弥永-弥永[1]を参照されたい．

第6章　正則函数のコホモロジー的性質

多変数の正則函数の基本的な性質については，既に，第2章において一通り調べたが，多変数の超函数論に対する基礎付けのためには，より進んだ性質，特に前章で導入された層係数コホモロジーの概念と関連した性質が必要となる．ここではそれらを必要最小限準備する．それでも結果的には多変数解析函数論のかなりの範囲を覆うことになる．これは超函数という概念の深さを物語っているとも言えよう．一変数超函数論の基礎付けのときには，二つの開集合の共通部分において与えられた正則函数をそれぞれの開集合の上の正則函数の差の形に表わすという補題1.5.1が大変有効に用いられたことを思い起こそう．多変数の場合にも同様の分解定理が理論の基礎となるのであるが，次元が高いときには分解の仕方にもいろいろな場合が考えられ，それらを正確に述べようとすれば自然にコホモロジーの概念に到達する．

§1　柱状領域における Cousin の問題

多変数函数論では，一次元の領域の直積の形をしたものを**柱状領域**と称する．これは Cauchy の積分公式(2.1.1)が大域的に使える等，一次元の領域に類似の良い性質をいろいろ持っており，歴史的にも最初に研究された．特に多重円板は柱状領域の特別なものとして大変重要である．この節では，後にもっと一般の領域を扱うための準備としてまず柱状領域の性質を調べよう．ただし，この準備段階では開集合よりむしろ閉集合を扱うことの方が多いので，一般に一次元の集合の直積型をした集合に対して“柱状”という形容詞を用いることと

する.

補題 6.1.1 (Cousin)　$L \subset \boldsymbol{C}^m$ をコンパクト集合，$K_j \subset \boldsymbol{C}$, $j=0,1$ を一次元のコンパクト集合とする．このとき，$(K_0 \cap K_1) \times L$ の近傍で定義された $(z,w) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^m$ の正則函数 $F(z,w)$ に対し，$K_j \times L$ の近傍で定義された正則函数 $F_j(z,w)$, $j=0,1$ で

$$F(z,w) = F_1(z,w) - F_0(z,w), \qquad (K_0 \cap K_1) \times L \text{ の上で},$$

を満たすものが存在する.

これは第2章の補題2.2.1をわずかに書き直しただけのものである. 実際, K_j, L を含む少し大きい領域をとって補題2.2.1を適用すればよい．ところでパラメータ w が無い場合には，補題1.5.1において二つの開集合の交わりに対するもっと強力な分解定理が与えられていた．それは上の形の分解をもとに Runge の近似定理を用いて証明されたのであった．多変数の場合，そのような議論は結局後で一般的にやることになるので，準備段階としてここでは一次元の議論の類似を近似定理が不要なコンパクト集合の場合にのみ行なっておこう．我々の究極の目的はもちろん開集合に対するコホモロジーの計算にある.

命題 6.1.2　$K_j \subset \boldsymbol{C}$ をコンパクト集合とし，$K = K_1 \times \cdots \times K_n \subset \boldsymbol{C}^n$ を柱状コンパクト集合とする．このとき，$\boldsymbol{C}^n$ 上の正則函数の芽の層 $\mathcal{O}$ に対して

(6.1.1)　$$H^k(K, \mathcal{O}) = 0, \qquad k \geq 1$$

が成り立つ.

証明　次元 n に関する帰納法で証明するため，パラメータ w を入れた次の形の命題を考えよう: $L \subset \boldsymbol{C}^m$ を任意のコンパクト集合，$f: K \times L \to K$ を自然な射影とすれば，(z,w) の正則函数芽の層 $\mathcal{O}$ に対して

(6.1.2)　$$H^k(K, f_*\mathcal{O}) = 0, \qquad k \geq 1$$

が成り立つ.

まず $n=1$ かつ $k=1$ の場合を考えよう．K はコンパクトだから，第5章§7で注意したことに鑑み，$\check{H}^1(K, f_*\mathcal{O})=0$ を示すには K の任意の有限閉被覆 $\overline{\mathfrak{U}} = \{\overline{U}_1, \cdots, \overline{U}_N\}$ について $H^1(\overline{\mathfrak{U}}, f_*\mathcal{O})=0$ を示せば十分である．ところで $f_*\mathcal{O}(\overline{U}_j) = \mathcal{O}(\overline{U}_j \times L)$ だから，$\overline{\mathfrak{U}} \times L = \{\overline{U}_1 \times L, \cdots, \overline{U}_N \times L\}$ とおけば，$H^1(\overline{\mathfrak{U}}, f_*\mathcal{O}) = H^1(\overline{\mathfrak{U}} \times L, \mathcal{O})$ となる．要するにこの最後の空間が0となることを示せばよい．被覆の元の個数 $N=2$ のときは，これは補題6.1.1の主張に他ならない．そこか

ら一般の N の場合への拡張は，第1章補題 1.5.2 の証明においてパラメータ w が無い場合に行った N に関する帰納法がそのまま適用できる．

さて，$H^1(K, f_*\mathcal{O})=0$ が示されたが，K は任意だから，この結果は特に K をその任意の閉部分集合でおき換えても成立する．故に補題 5.7.4 により $k\geq 2$ についても $H^k(K, f_*\mathcal{O})=0$ が成り立つことがわかる．

次に一般の n を考える．古典的な証明では直積型の被覆を採用し，コホモロジーを一次元ずつ解いて被覆の元を大きくしてゆくのであるが，ここでは同じ手続きを第5章§6で導入した高次順像の概念を用いて少し現代風に書いてみよう．与えられた $K=K_1\times\cdots\times K_n$ に対して $K'=K_1\times\cdots\times K_{n-1}$ とおき，$\pi:K\to K'$ を自然な射影として f を次のような図式に埋め込もう．

$$\begin{array}{ccc} K\times L & \xrightarrow{\ g\ } & K' \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \pi} & \\ & K & \end{array}$$

帰納法の仮定によれば，($K_n\times L$ をパラメータ w と思って) $H^k(K', g_*\mathcal{O})=0$ が $k\geq 1$ について成り立っているとしてよい．一方，下に示すように写像 π は $f_*\mathcal{O}$ に関して純0次元的である．故に層 $f_*\mathcal{O}$ に対し第5章の定理 5.6.4 が適用でき

$$H^k(K,\ f_*\mathcal{O}) = H^k(K', \pi_*f_*\mathcal{O}) \qquad k\geq 0$$

が得られる．$\pi_*f_*\mathcal{O}=g_*\mathcal{O}$ だから後者は $k\geq 1$ で消え，(6.1.1) が得られた．

さて，π の純0次元性を示すには，定理 5.6.7 により固定した $z'\in K'$ について

$$H^k(\{z'\}\times K_n, f_*\mathcal{O}) = 0 \qquad k\geq 1$$

を示せば十分である．しかるにこれは $\{z'\}\times L$ をパラメータの空間と思えば帰納法の初段 $n=1$ の特別な場合にすぎない．実際，$\{z'\}$ は一点であるから，この座標を無視する射影作用素 $\tilde{\omega}:\{z'\}\times K_n\to K_n$ は位相同型であり，従って明らかに

$$H^k(\{z'\}\times K_n, f_*\mathcal{O}) = H^k(K_n, \tilde{\omega}_*f_*\mathcal{O})$$

となるからである．証了．

問 6.1.1 $\boldsymbol{R}^n$ の柱状凸コンパクト集合 $K=K_1\times\cdots\times K_n$ に対し $H^k(K, \boldsymbol{C})=0\,(k\geq 1)$ が成り立つことを n に関する帰納法で示せ．

系 6.1.3 $\mathscr{F}$ は柱状コンパクト集合 $K=K_1\times\cdots\times K_n$ 上の層で，正則函数芽の層 $\mathscr{O}$ による次のような逆向き分解を持つものとする：

$$(6.1.3)\qquad 0\leftarrow\mathscr{F}\leftarrow\mathscr{O}^{l_0}\leftarrow\mathscr{O}^{l_1}\leftarrow\cdots\cdots\leftarrow\mathscr{O}^{l_m}\leftarrow 0$$

このとき $k\geq 1$ に対し $H^k(K,\mathscr{F})=0$ となる．更に，大域的切断の列

$$(6.1.4)\qquad 0\leftarrow\mathscr{F}(K)\leftarrow\mathscr{O}(K)^{l_0}\leftarrow\mathscr{O}(K)^{l_1}\leftarrow\cdots\leftarrow\mathscr{O}(K)^{l_m}\leftarrow 0$$

も完全となる．

ここに $\mathscr{O}^l$ は層 $\mathscr{O}$ の l 個の**直積**であり，$U\subset \boldsymbol{C}^n$ に対し $U\mapsto\mathscr{O}^l(U)=\mathscr{O}(U)^l$ という切断空間で定義されるものである．有限個の直積をとる操作は完全性を保つからコホモロジーと可換となり，$H^k(K,\mathscr{O}^l)=H^k(K,\mathscr{O})^l=0$ が $k\geq 1$ について成り立つ．故に系 5.3.7 により $H^k(K,\mathscr{F})=0, k\geq 1$ が従う．さらに，(6.1.3) を層 $\mathscr{O}^{l_m}$ のコホモロジー的自明な層による一つの分解と見なせば，定理 5.3.3 により (6.1.4) も完全となる．

上のような逆向き分解の代表的なものとして次のものがある．

補題 6.1.4 (Koszul)　$K\subset\boldsymbol{C}^n$ を柱状コンパクト集合とし，$L\subset\boldsymbol{C}^m$ をコンパクト集合とする．$\varphi_1(z),\cdots,\varphi_m(z)$ を $z\in\boldsymbol{C}^n$ の整函数とし

$$S=\{w_j=\varphi_j(z),\ j=1,\cdots,m\}\cap(K\times L)$$

とおく．$\mathscr{O}_S$ により多様体 S 上の正則函数の芽の層，すなわち，$\boldsymbol{C}^{n+m}$ 上の正則函数芽を（代入 $w_j=\varphi_j(z), j=1,\cdots,m$ を実行することにより）S 上に制限して得られる函数芽の作る S 上の層とする．このとき，これを包含写像 $\iota:S\hookrightarrow K\times L$ により $K\times L$ 上の層とみなしたもの $\iota_*\mathscr{O}_S$ に対して

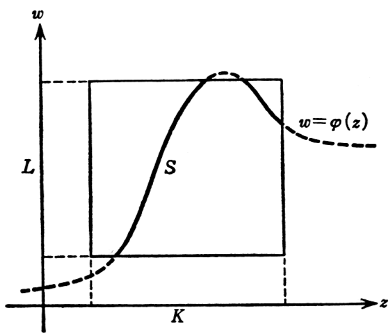


図 6.1

$$(6.1.5)\qquad 0\leftarrow \iota_*\mathcal{O}_S\xleftarrow{\ \rho\ }\mathcal{O}^{l_0}\xleftarrow{\ \partial_1\ }\mathcal{O}^{l_1}\xleftarrow{\ \partial_2\ }\cdots\xleftarrow{\ \partial_m\ }\mathcal{O}^{l_m}\leftarrow 0$$

という長さ m の逆向き分解が存在する．ここに $l_j=\binom{m}{j}$（2 項係数）であり，ρ は上に述べた S への制限操作から導かれる写像である．写像 ∂_j の定義は以下の証明中に与える．

ここで用いている制限写像 ρ は函数の値に対する普通の意味での制限に対応するものであり，$\mathcal{O}_S$ は層の制限 $\mathcal{O}|_S$ とは全く異なることに注意せよ．以下簡単のため $\iota_*\mathcal{O}_S$ を $\mathcal{O}_S$ と同一視し，$\rho:\mathcal{O}\to\mathcal{O}_S$ とも書くことにする．

証明 分解(6.1.5)はもっと大域的に $K\times \boldsymbol{C}^m$ の上で作ることができる．故に $w_j-\varphi_j(z)$ を新しい座標 w_j と思うことにより始めから

$$S=\{w_j=0,\ j=1,\cdots,m\}\subset K\times\boldsymbol{C}^m$$

と仮定して良い．このとき $\mathcal{O}_S$ は変数 z の正則函数芽の層と同一視され，制限写像 $\rho:\mathcal{O}\to\mathcal{O}_S$ は $w_j=0$ という代入に帰着し，従ってもちろん全射である．またその核は，Taylor 展開を考えれば明らかな様に $\sum_{j=1}^m w_jf_j(z,w)$ の形の芽全体である．故に

$$(6.1.6)\qquad \begin{array}{ccccc} 0\leftarrow\mathcal{O}_S & \xleftarrow{\ \rho\ } & \mathcal{O} & \xleftarrow{\ \partial_1\ } & \mathcal{O}^{\binom{m}{1}} \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & \sum_{j=1}^m w_jf_j & \leftarrow\!\shortmid & (f_1,\cdots,f_m) \end{array}$$

という完全列が得られた．

これを先に続けるには外積代数の記号を用いるのが便利である．今，抽象的な基底 $e_1,\cdots,e_m$ を導入し，$\mathcal{O}^{\binom{m}{1}}$ の元 $(f_1,\cdots,f_m)$ を $\sum_{j=1}^m f_j(z,w)e_j$ と書き表わすことにしよう．さらに一般に，$\mathcal{O}^{\binom{m}{k}}$ の元を

$$\sum_{(j_1,\cdots,j_k)} f_{j_1\cdots j_k}(z,w)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}$$

と記す．ただし係数は添え字について反対称になっているものとする．このため $\mathcal{O}^{\binom{m}{k}}$ の代わりに $\wedge^k\mathcal{O}^m$ とも記す．境界作用素 ∂_k を

$$(6.1.7)\qquad \partial_k\Big(\sum_{(j_1,\cdots,j_k)} f_{j_1\cdots j_k}(z,w)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}\Big)$$
$$=\sum_{(j_2,\cdots,j_k)}\Big(\sum_{j_1=1}^m f_{j_1\cdots j_k}(z,w)\ w_{j_1}\Big)e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}$$

で定めよう．（係数の反対称性により j_1 に関する和は実際には $j_2,\cdots,j_k$ と異なる添え字番号のみに渡る．）この係数は $j_2,\cdots,j_k$ について再び反対称となること

が容易にわかり，従ってこれを続けて施せば，もとの係数の反対称性により

$$\partial_{k-1}\partial_k(\sum_{(j_1,\cdots,j_k)} f_{j_1\cdots j_k}(z,w)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k})$$
$$=\sum_{(j_3,\cdots,j_k)}(\sum_{j_1,j_2} f_{j_1\cdots j_k}(z,w)w_{j_1}w_{j_2})e_{j_3}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}=0$$

が得られる．以上で層の複体

$$(6.1.5)'\qquad 0\leftarrow \mathcal{O}_S\xleftarrow{\rho}\mathcal{O}\xleftarrow{\partial_1}\wedge^1\mathcal{O}^m\xleftarrow{\partial_2}\cdots\xleftarrow{\partial_m}\wedge^m\mathcal{O}^m\leftarrow 0$$

が定義できた．（これは一般に **Koszul 分解**と呼ばれるものの一種である．）

次にこの列の完全性を示そう．$k\geq 1$ に対し $\mathrm{Ker}\,\partial_k\subset\mathrm{Image}\,\partial_{k+1}$ を列の長さ m に関する帰納法で証明する．$m=1$ のときは(6.1.6)の ∂_1 が単射であり，これが既に完全列(6.1.5)を与えている．そこで m を一般とし $f\in\wedge^k\mathcal{O}^m$ で $\partial_k f=0$ を満たすものをとる．これは ∂_k の定義により任意の $(j_2,\cdots,j_k)$ に対して

$$(6.1.8)\qquad \sum_{j=1}^{m} f_{jj_2\cdots j_k}(z,w)w_j=0$$

が成り立っていることを意味する．今 $w=(w',w_m)$, $w'=(w_1,\cdots,w_{m-1})$ と変数を分けて書き，これらの式において $w_m=0$ とおけば，

$$(6.1.9)\qquad \sum_{j=1}^{m-1} f_{jj_2\cdots j_k}(z,w',0)w_j=0$$

が得られる．これは特に基底 $e_1,\cdots,e_{m-1}$ に関する k 次の外積形式

$$f'=\sum_{j_1\neq m,\cdots,j_k\neq m} f_{j_1\cdots j_k}(z,w',0)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}$$

が $\partial_k' f'=0$ を満たしていることを示す．ここに $e_1,\cdots,e_{m-1}$ に関する境界作用素(6.1.7)を ∂_k' で表わした．故に帰納法の仮定により

$$g'=\sum_{j_0\neq m,\cdots,j_k\neq m} g'_{j_0j_1\cdots j_k}(z,w')e_{j_0}\wedge e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}$$

で $\partial_{k+1}' g'=f'$ すなわち

$$(6.1.10)\qquad \sum_{j=1}^{m-1} g'_{jj_1\cdots j_k}(z,w')w_j=f_{j_1\cdots j_k}(z,w',0)$$

を $j_1\neq m,\cdots,j_k\neq m$ なる各 $(j_1,\cdots,j_k)$ について満たすものが存在する．そこで

$$g_{j_0j_1\cdots j_k}(z,w)=g'_{j_0j_1\cdots j_k}(z,w'),\qquad (1\leq j_0\leq m-1)$$

$$g_{mj_1\cdots j_k}(z,w)=\frac{1}{w_m}\{f_{j_1\cdots j_k}(z,w)-f_{j_1\cdots j_k}(z,w',0)\}$$

とおき，後者を反対称に拡張してすべての係数を定める．このとき

$$g=\sum_{j_0-j_k} g_{j_0\cdots j_k}(z,w)e_{j_0}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}$$

は $\partial_{k+1}g=f$ を満たす元となる．実際，このことは $j_1\neq m,\cdots,j_k\neq m$ なる添え字については g の定義式と(6.1.10)から直ちに従うし，他方，例えば $j_1=m$ なる添え字 $(j_1,\cdots,j_k)$ については，係数の反対称性を用いて

$$\begin{aligned}(\partial_{k+1}g)_{j_1\cdots j_k} &= \sum_{j_0=1}^{m-1} g_{j_0j_1\cdots j_k}(z,w)w_{j_0} \\ &= -\sum_{j_0=1}^{m-1} g_{mj_0j_2\cdots j_k}(z,w)w_{j_0} \\ &= -\frac{1}{w_m}\sum_{j_0=1}^{m-1} f_{j_0j_2\cdots j_k}(z,w)w_{j_0}+\frac{1}{w_m}\sum_{j_0=1}^{m-1} f_{j_0j_2\cdots j_k}(z,w',0)w_{j_0}\end{aligned}$$

となるから，第1項に(6.1.8)を，また第2項に $j_2\neq m,\cdots,j_k\neq m$ より(6.1.9)を用いてやはり $f_{mj_2\cdots j_k}(z,w)$ が得られる．証了．

系 6.1.5 $K\subset \boldsymbol{C}^n, L\subset \boldsymbol{C}^m, \varphi_1(z),\cdots,\varphi_m(z)$ および S は前補題と同様とする．このとき，S 上で定義された(変数 z の)正則函数 $f(z)$ に対し，$K\times L$ 上の正則函数 $F(z,w)$ で $\rho F=f$ なるもの，すなわち，

$$F(z,\varphi_1(z),\cdots,\varphi_m(z))=f(z)$$

を満たすものが存在する．

証明(注 30) 補題 6.1.4 と系 6.1.3 により

$$0\longleftarrow \iota_*\mathcal{O}_S(K\times L)\xleftarrow{\ \rho\ }\mathcal{O}(K\times L)\xleftarrow{\ \partial_1\ }\mathcal{O}^{\binom{m}{1}}(K\times L)\longleftarrow\cdots$$

が完全となる．ここで $\iota_*\mathcal{O}_S(K\times L)=\mathcal{O}_S(S)$ であり，$f(z)$ はこの空間の元である．故に ρ の全射性により所要の性質を持つ $F(z,w)\in\mathcal{O}(K\times L)$ を見出すことができる．証了．

この系の意味を少し説明しておこう．S の z 空間への射影が K 全体と一致すれば，延長 $F(z,w)$ として $f(z)$ 自身をとればよい．しかし一般には $f(z)$ の z に関する定義域は K より小さくなるので，$F(z,w)=f(z)$ は S の近くの**局所的**な延長にしかならない(図 6.1 参照)．一方，S から離れたところでは $F(z,w)$ として何をとっても良い．(例えば 0 でよい)．すると $K\times L$ の各点の近傍に対して $f(z)$ の局所的な延長(0 次元余鎖)が定義できることになるが，それらは必ずしも互いに整合的ではない．ただ一つわかっているのは，このような局所的延長の差は必ず S 上で値が 0 になることである．そのようなものは局所的には

$$\sum_{j=1}^{m}(w_j-\varphi_j(z))f_j(z,w)$$

の形をしている．こうして得られた不定性$\{f_j(z,w)\}$は全く任意ではなく，上述の近傍系が作る被覆に関して余境界をとれば Koszul 分解の境界作用素∂_1の核に入る．故に(近傍系を縮めれば)これを∂_2による像の形に書くことができる．この操作を追求してゆけば遂にm番目に到って不定性が解消され，ここから調節を繰返しつつ再び下の方に戻って来れば，最終的に局所的な延長を調節して整合的につなぎ合わせた**大域的**な延長$F(z,w)$が得られる．上の証明はこの手続きを代数的に整理したものにすぎない．この例からも想像される様に，一般にコホモロジーとは局所的構成と大域的構成とを結びつける非常に便利な言語だと言うことができる．

参考6.1　補題6.1.4はもっと一般に，Sを定義する方程式$w_j-\varphi_j(z)=0$が集合Sの近傍でのみ定義された解析函数である場合にも成り立つ(岡の連接性定理の特別な場合)．分解の長さはSの余次元に関連した幾何学的な量なのでやはりmで良い．ただし，この場合はたとえ方程式が$w_j-\varphi_j(z)$の形をしていても$\varphi_j(z)$はK上大域的に定義されているとは限らないので，$w_j-\varphi_j(z)\mapsto w_j$という座標変換は使えない．完全列を局所的に作り，それらが整合的になるように調節する操作が必要であり，その調節にはやはり上に述べたような具合にコホモロジーが関与して来る．ただし，その際のコホモロジーは層の準同型を定義するための行列を値とする非可換なものになるので(所謂 Cartan の行列分解定理)，議論の筋道は明確だがまだかなり長い準備を必要とする．この事実を用いると系6.1.5に相当する主張もそのような一般のSについて成り立つことがわかるのである．

§2　正則領域

柱状領域の次には何を考えたら良いであろうか．そのため第2章で述べた多変数函数論の初歩を思い起こそう．一変数と多変数では共通の性質も沢山あり，それなりに有用ではあったが，両者の間の決定的な相違として，Hartogs の定理2.2.4に示されたような現象，すなわち$\boldsymbol{C}^n$の中の領域は必ずしもある正則函数の自然定義域とはなり得ず，その境界を越えてすべての函数が解析接続されてしまうことがあり得るという事実であった．故に多変数の場合には次の定義が重要な意味を持って来る．

定義 6.2.1　領域 $U\subset \boldsymbol{C}^n$ が**正則領域**であるとは，その任意の境界点 $z\in\partial U$ に対し，ある元 $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ でこの点の如何なる近傍にも解析接続できないものが存在することを言う．

正則領域の重要な例として次のものがある．

例 6.2.2　$U\subset \boldsymbol{C}^n$ を領域とする．有限個の元 $F_1(z),\cdots,F_N(z)\in\mathcal{O}(U)$ を以て

$$\{z\in U;|F_1(z)|<1,\cdots,|F_N(z)|<1\} \tag{6.2.1}$$

のある連結成分として定義される U 内の相対コンパクトな領域 D のことを U の**解析的多面体**という．これは正則領域の一種になる．実際 a を D の境界点とすれば，(6.2.1)の不等式のいずれかは a において等号となり，従って $F_j(a)=e^{i\theta}$ がある $j,\theta\in\boldsymbol{R}$ について成り立つ．このとき $1/(F_j(z)-e^{i\theta})$ は点 a まで解析接続できないような $\mathcal{O}(D)$ の元となる．

問 6.2.1　一次元の領域 $U\subset\boldsymbol{C}$ はすべて正則領域であることを分数函数を用いて証明せよ．その証明は何故多変数の場合には通用しないのか？

以下この概念をより使い易くするため，定義の言い換えを行なう．そのため次の概念を導入しよう．

定義 6.2.3　領域 $U\subset\boldsymbol{C}^n$ 内のコンパクト集合 K に対し

$$\hat{K}_U=\{z\in U;\forall F\in\mathcal{O}(U) \text{ に対し } |F(z)|\le\sup_{\zeta\in K}|F(\zeta)|\} \tag{6.2.2}$$

で定まる集合 $\hat{K}_U$ を K の U における正則凸包，或は K の $\mathcal{O}(U)$-包と呼ぶ．もし任意のコンパクト集合 $K\subset U$ に対しその $\mathcal{O}(U)$-包 $\hat{K}_U$ が再びコンパクトになるならば，U は**正則凸**な領域と呼ばれる．

一般には $\hat{K}_U$ は U の閉部分集合であるが，U の境界の一部まで延びている可能性があるので必ずしもコンパクトと限らないのである．

補題 6.2.4　$\hat{K}_U\subset\widehat{K}$ である（$\widehat{K}$ は K の凸包を表わすのであった）．従って特に，凸領域は正則凸である．

証明　コンパクト集合 K の凸包は K を含む閉じた半空間の共通部分の形に表わせるから，次のことを示せば十分である：

$$K\subset\{ax+by\le c\}\Longrightarrow\hat{K}_U\subset\{ax+by\le c\}$$

ここで $z=x+iy$ とし，C^n の実超平面の方程式を表わすのに $ax=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ 等の略記法を用いている．さて，$ax+by\leq c$ は $|e^{(a-bi)z-c}|\leq 1$ と同等なことに注意しよう．$e^{(a-bi)z-c}\in\mathcal{O}(U)$ だから，上の主張は $\hat{K}_U$ の定義から直ちに従う．証了．

定理 6.2.5 (Cartan-Thullen)　領域 $U\subset C^n$ に対し次の諸主張は互いに同値である：

a)　U は正則領域である．

b)　U は正則凸である．

c)　U は U の解析的多面体で内側から近似される．すなわち，U の解析的多面体の増大列 $D_k, k=1,2,\cdots$ で U を取り尽すもの $(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k=U$ となるもの$)$ が存在する．

d)　正則函数 $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ で，∂U を自然境界とするもの（即ち，∂U のどの点の近傍にも解析接続できないようなもの）が存在する．

証明　**a)**$\Rightarrow$**b)** コンパクト集合 $K\subset U$ で，$\hat{K}_U$ がコンパクトにならぬようなものが存在したと仮定せよ．補題 6.2.4 により $\hat{K}_U\subset\hat{K}$ だから $\hat{K}_U$ は有界であり，従ってこのとき $\hat{K}_U$ は ∂U のある点に収束するような点列を含むことになる．特に $a\in\hat{K}_U$ で

$$\text{dis}\,(a,\partial U)<\frac{1}{3}\rho,\qquad \rho=\text{dis}\,(K,\partial U) \tag{6.2.3}$$

となるものが存在する．ここで C^n の二つの集合の間の距離 dis としては多重円板で計測したものを採用しよう：

$$\text{dis}\,(A,B)=\inf\,\{\sup_{1\leq j\leq n}|a_j-b_j|\,;a\in A,b\in B\}$$

$F(z)\in\mathcal{O}(U)$ を任意に選ぶ．点 a におけるその Taylor 展開 $\sum_{\alpha} C_\alpha(z-a)^\alpha$ を考えよう．$a\in\hat{K}_U$ なることと $\hat{K}_U$ の定義により

$$|C_\alpha|=\frac{|F^{(\alpha)}(a)|}{\alpha!}\leq\frac{1}{\alpha!}\sup_{z\in K}|F^{(\alpha)}(z)|$$

と K 上の値で評価される．一方 Cauchy の不等式により（系 2.1.3 参照）

$$|F^{(\alpha)}(z)|\leq\left|\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\oint_{|\zeta_1-z_1|=2/3\rho}\cdots\oint_{|\zeta_n-z_n|=2/3\rho}\frac{F(\zeta)d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\zeta_n-z_n)^{\alpha_n+1}}\right|$$

$$\leq \frac{\alpha!}{\left(\frac{2}{3}\rho\right)^{|\alpha|}} \sup_{\zeta} \left\{|F(\zeta)|; |\zeta_j - z_j| = \frac{2}{3}\rho, j=1, \cdots, n\right\}$$

であるから，結局

$$|C_\alpha| \leq \frac{\sup_{\zeta}\left\{|F(\zeta)|; \mathrm{dis}(\zeta, K) \leq \frac{2}{3}\rho\right\}}{\left(\frac{2}{3}\rho\right)^{|\alpha|}} = \frac{M}{\left(\frac{2}{3}\rho\right)^{|\alpha|}}$$

となる．この評価により Taylor 級数 $\sum C_\alpha(z-a)^\alpha$ は多重円板 $\left\{|z_1-a_1|<\frac{2}{3}\rho\right\}$ $\times\cdots\times\left\{|z_n-a_n|<\frac{2}{3}\rho\right\}$ で収束することがわかるが，この収束域は(6.2.3)により ∂U の一部を含み，従って $F(z)$ はそこまで解析接続されることになるから，U は正則領域でない．故に対偶をとれば a)⇒b)が示された．

注意 上の証明から，正則領域においては任意の $a\in\hat{K}_U$ に対し(6.2.3)の逆向きの不等式が成り立っていること，即ち

(6.2.4) $$\mathrm{dis}\,(\hat{K}_U, \partial U) \geq \frac{1}{3}\,\mathrm{dis}\,(K, \partial U)$$

なることが知られる．このことは後で用いる．実は，より精緻な議論により $\mathrm{dis}(\hat{K}_U, \partial U) = \mathrm{dis}(K, \partial U)$ が示されるのであるが，我々はそこまでは必要としない．

b)⇒c) 連結コンパクト集合 $K\subset U$ を任意にとったとき，これを含むような U の解析的多面体が構成できることを示そう．そうすれば K を次々に大きくしてゆくことにより，所要の増大列 D_k が得られる．さて，K に対しまず $\hat{K}_U\subset V\Subset U$ なる部分領域 V を選ぶ　これは正則凸の仮定より $\hat{K}_U\subset U$ がコンパクトだから可能となる．∂V の各点 z に対し，$z\notin\hat{K}_U$ だから $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ で

$$|F(z)| > \sup_{\zeta\in K}|F(\zeta)|$$

となるものが存在する．故に十分小さい $\varepsilon=\varepsilon(z)>0$ をとれば

$$|F(z)| > (1+\varepsilon)\sup_{\zeta\in K}|F(\zeta)|$$

という不等式も同じ点で成り立ち，従って連続性により z の十分小さい近傍でも成り立つ．∂V は仮定によりコンパクトだから，結局有限個の元 $F_1(z), \cdots,$

$F_N(z)\in\mathcal{O}(U)$，及び正数 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_N$ が存在し，∂V の上で

$$\text{ある } j \text{ について}\quad |F_j(z)|>(1+\varepsilon_j)\sup_{\zeta\in K}|F_j(\zeta)|$$

となっているようにできる．

$D=\{z\in V;|F_j(z)|<(1+\varepsilon_j)\sup_{\zeta\in K}|F_j(\zeta)|, j=1,\cdots,N\}$ の K を含む連結成分

とおこう．これは U の解析的多面体であって $K\subset D\subset V\Subset U$ となっている．(D を定義する各不等式の右辺は正定数だから，必要ならこれで両辺を割れば(6.2.1)のように右辺が1の場合に帰着できる．)

c)⇒d)　$D_k\nearrow U$ を U の解析的多面体による近似列とする．今，

$$D_k=\{z\in U;|F_{k,j}(z)|<1, j=1,\cdots,N_k\} \text{ の } \bar{D}_{k-1} \text{ を含む連結成分}$$

と書かれているとしよう．k を一つ固定する．∂D_k の稜，すなわち，∂D_k の点のうちで少くとも二つの j について等号 $|F_{k,j}(z)|=1$ が成り立つような点全体の集合を考え，$E_k\subset\partial D_k$ をその十分小さい近傍とする．$\varepsilon>0$ を任意に与えたとき，mを十分大きくとれば，函数

$$(F_{k,1}(z))^m+\cdots+(F_{k,N_k}(z))^m$$

は，絶対値において $\bar{D}_{k-1}$ の上では $<\varepsilon$，また $\partial D_k\setminus E_k$ の上では $>1-\varepsilon$ とできる．実際，前者の集合の上では各項の絶対値 <1，また後者の集合の上ではただ一つの項の絶対値がちょうど1に等しく，その他 <1 となるからである．故に適当な定数因子を調節すれば，$G_k(z)\in\mathcal{O}(U)$ で

$$|G_k(z)|\leq\frac{1}{2^k}\qquad(\bar{D}_{k-1} \text{ の上で})$$

$$|G_k(z)|\geq 2^k+\sum_{j=1}^{k-1}\sup_{\zeta\in\partial D_k}|G_j(\zeta)|\qquad(\partial D_k\setminus E_k \text{ の上で})$$

を満たすものが帰納的に構成できることになる．($G_1(z)\in\mathcal{O}(U)$ は何でもよい．)第一の条件により和 $G(z)=\sum_{k=1}^{\infty}G_k(z)$ は $\mathcal{O}(U)$ の元となり，それは第二の条件より $\partial D_k\setminus E_k$ の上で

$$\begin{aligned}|G(z)|&\geq|G_k(z)|-\sum_{j=1}^{k-1}|G_j(z)|-\sum_{j=k+1}^{\infty}|G_j(z)|\\&\geq 2^k-\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\geq 2^k-1\to+\infty\qquad(k\to+\infty)\end{aligned}$$

を満たす．除外集合 E_k を k とともに次第に小さくしてゆけば，∂U の任意の

点が $\bigcup_{k=1}^{\infty}(\partial D_k \setminus E_k)$ の集積点となるようにできる.（例えば，E_k の "幅" を dis $(D_k, \partial U)$ 以下にとっておけば十分である.） 故に $G(z)$ は ∂U の各点のどんなに小さな近傍においても値が有界でなく，従ってそこへ解析接続することができない.

d)$\Rightarrow$**a)** は自明である. 証了.

正則領域が示す重要な性質については次節にまわし，ここでは後の応用のために正則領域という概念の初等集合論的演算による安定性を調べておこう. このためにはUの連結性にこだわっているのは不便なので，新たに次の概念を導入することにする.

定義 6.2.6 開集合 $U \subset \boldsymbol{C}^n$ は，その各連結成分が正則領域であるとき **Stein 開集合**と呼ばれる.

呼称を整合的にするため，正則領域のことを Stein 領域とも呼ぶことにしよう.

連結でない開集合 U については，そのコンパクト部分集合 K に対して(6.2.2)により計算した正則凸包 $\hat{K}_U$ は，明らかに U の各連結成分において，K の対応する成分の正則凸包をとったものの合併集合に等しい. 実際，U 上の正則函数とは，U の各連結成分の上の正則函数を勝手に組み合せたものに他ならないからである. 連結でない U に対しては，その解析的多面体も各連結成分において独立に考えることにしよう. 以上に述べたような語句の修正の下に Cartan-Thullen の定理は連結でない U についてもそのまま成立する.

命題 6.2.7 a) $U_1, U_2 \subset \boldsymbol{C}^n$ を二つの Stein 開集合とするとき，$U_1 \cap U_2$ は再び Stein 開集合となる. さらに，Stein 開集合の無限族 $\{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ があるとき，共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ の内部(内点の全体)は Stein 開集合となる.

b) $U_1 \subset \boldsymbol{C}^n, U_2 \subset \boldsymbol{C}^m$ を Stein 開集合とすれば，直積集合 $U_1 \times U_2$ は $\boldsymbol{C}^{n+m}$ の Stein 開集合となる.

c) $U \subset \boldsymbol{C}^n$ が Stein 開集合ならば，$U \cap \{z_1 = 0\}$ は $\boldsymbol{C}^{n-1}$ の Stein 開集合となる. より一般に，$w = \Phi(z)$ が Stein 開集合 $U \cap \boldsymbol{C}^n$ から $\boldsymbol{C}^m$ への正則写像で，$V \subset \boldsymbol{C}^m$ が Stein ならば，$\Phi^{-1}(V)$ も $\boldsymbol{C}^n$ の Stein 開集合となる.

d) $U \subset \boldsymbol{C}^n$ が Stein 開集合で $\Phi(z): U \to V$ が双正則写像ならば，像 V も Stein 開集合となる.

証明　Cartan-Thullen の定理の判定条件 c) を用いるのが便利である．（記述を簡潔にするため以下この証明中に限り解析的多面体という言葉には連結性を要求しないこととする．）例えば，a) の前半の主張については，$D_{1,k}\nearrow U_1, D_{2,k}\nearrow U_2$ をそれぞれの解析的多面体による取り尽し増大列とするとき，$D_{1,k}\cap D_{2,k}$ が $U_1\cap U_2$ の解析的多面体による取り尽し増大列となり，従って $U_1\cap U_2$ も Stein となる．同様に $D_{1,k}\times D_{2,k}$，$D_k\cap\{z_1=0\}$，$\Phi(D_k)$ 等を考えることにより b), c) の前半，及び d) が証明できる．c) の後半においては，V の解析的多面体 $D=\{|F_j(w)|<1\}$ を写像 Φ で引戻したもの $\Phi^{-1}(D)$ は $\{|(F_j\circ\Phi)(z)|<1\}$ という形の $\Phi^{-1}(V)$ の部分集合になるけれども，そこで相対コンパクトになるとは限らないので，そのままでは $\Phi^{-1}(V)$ の解析的多面体とは言えない．しかし U の別の解析的多面体 D' との共通部分 $\Phi^{-1}(D)\cap D'$ を考えれば，これは $\Phi^{-1}(V)$ の解析的多面体となる．このことに注意すれば，$\Phi^{-1}(V)$ を取り尽すような解析的多面体の列が構成できる．

無限個の共通部分に対する a) の主張は少し厄介である．$U=\mathrm{Int}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)$ とおき，これが正則凸なことを示そう．コンパクト集合 $K\subset U$ をとり，$\hat{K}_U$, $\hat{K}_{U_\lambda}$ をそれぞれ K の $\mathcal{O}(U)$-包及び $\mathcal{O}(U_\lambda)$-包とする．定義より明らかに $\hat{K}_U\subset\hat{K}_{U_\lambda}$ であるから，まず

$$\hat{K}_U\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\hat{K}_{U_\lambda}$$

がわかる．この右辺の集合を L と記そう．これは $\bar{U}$ 内のコンパクト集合であるが，これが実は U 内に入っていることを示せば証明が終わる．定理 6.2.5 a)⇒b) のの証明のあとで注意したように，各 U_λ が Stein なることから

$$\mathrm{dis}(L,\partial U_\lambda)\geq\mathrm{dis}(\hat{K}_{U_\lambda},\partial U_\lambda)\geq\frac{1}{3}\mathrm{dis}(K,\partial U_\lambda)$$

$$\geq\frac{1}{3}\mathrm{dis}(K,\partial U)$$

がわかる．左辺の λ に関する下限をとれば $\mathrm{dis}(L,\partial U)$ が得られるから，$\mathrm{dis}(L,\partial U)\geq\frac{1}{3}\mathrm{dis}(K,\partial U)>0$ が示された．これより $L\subset U$ がわかる．証了．

二つの Stein 開集合の和集合は必ずしも Stein ではないことに注意せよ．そのような例として典型的なものは，二つの多重円板の和集合

(6.2.5) $\{|z_j| < r_j, j=1, \cdots, n\} \cup \{|z_j| < \rho_j, j=1, \cdots, n\}$

である．ここで正則な函数は実は

(6.2.6) $\bigcup_{0\leq\theta\leq1} \{|z_j| < r_j{}^\theta \rho_j{}^{1-\theta} \quad ; j=1, \cdots, n\}$

でも正則となる．実際，Taylor 展開を考えれば，関連収束半径に関する Lemaire の公式(2.1.7)から

$$\overline{\lim_{\alpha}} \sqrt[|\alpha|]{|a_\alpha| r^\alpha} \leq 1, \qquad \overline{\lim_{\alpha}} \sqrt[|\alpha|]{|a_\alpha| \rho^\alpha} \leq 1$$

従って $0\leq\theta\leq1$ なる任意の θ に対して

$$\overline{\lim_{\alpha}} \sqrt[|\alpha|]{|a_\alpha| r^{\theta\alpha} \rho^{(1-\theta)\alpha}} \leq 1$$

となり，級数は上述の領域(6.2.6)で収束することがわかる．故にもとの領域(6.2.5)は正則領域ではない．

二つの Stein 開集合の和集合については後に再び論ずるであろう．

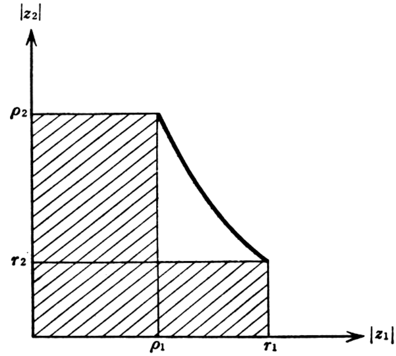


図 6.2

§3 Runge 領域とコホモロジー消滅定理

前節の例 6.2.2 に与えた解析的多面体(6.2.1)の定義において，$F_j(z) \in \mathcal{O}(U)$ を多項式で置き換えたものを（U 内の）**多項式的多面体**と言う．このようにして前節の議論において $\mathcal{O}(U)$ の元をすべて多項式で置き換えると，正則領域の代わりに Runge 領域の理論が得られる．

定義 6.3.1 正則領域 $U\subset \boldsymbol{C}^n$ が **Runge 領域**であるとは，$\mathcal{O}(U)$ の任意の元 $F(z)$ が多項式の列により U 上広義一様に近似できることを言う．詳しく言い換えれば，任意のコンパクト集合 $K\subset U$ と任意の $\varepsilon>0$ に対し，多項式 $p(z)$ を

$$\sup_{z\in K}|F(z)-p(z)|\leq\varepsilon$$

となるように選べることを言う．

良く知られているように，$n=1$ のとき，領域 U が Runge 領域であるためには U が単連結なことが必要かつ十分である．一般の次元では Runge 領域の判定条件はそれほど簡明ではない．ここでは正則領域に対する Cartan-Thullen の定理に類似の結果をさし当っての目標としよう．

問 6.3.1　一次元領域 $U\subset \boldsymbol{C}$ が単連結でないとき，U 上広義一様に多項式で近似できないような $\mathcal{O}(U)$ の元が存在することを最大値原理を用いて示せ．

定義 6.3.2　領域 $U\subset \boldsymbol{C}^n$ が**多項式凸**であるとは，任意のコンパクト集合 $K\subset U$ に対し

(6.3.1)　$\tilde{K}_U=\{z\in U;$任意の多項式 $p(z)$ に対し $|p(z)|\leq\sup_{\zeta\in K}|p(\zeta)|\}$

で定まる集合 $\tilde{K}_U$ が再び U 内のコンパクト集合となることを言う．

$\tilde{K}_U$ は定義から明らかに K の $\mathcal{O}(U)$-包 $\hat{K}_U$ を含むので，多項式凸な領域は正則凸ともなることに注意せよ．

補題 6.3.3　$\varphi_1(z),\cdots,\varphi_m(z)$ を $\boldsymbol{C}^n$ 上の整函数とし，集合

(6.3.2)　$$\{z\in \boldsymbol{C}^n;|\varphi_k(z)|\leq 1,k=1,\cdots,m\}$$

はコンパクトと仮定する．D をこの集合のいくつかの連結成分の合併とする．このとき，D の近傍で正則な函数 $F(z)$ は多項式により D 上一様に近似できる．

証明　D が(6.3.2)全体と一致しないときは，残りの連結成分の上では $F(z)\equiv 0$ として函数を拡張すれば良いから，D は常に(6.3.2)に等しいと仮定できる．さて，D は多重円板 $\{|z_j|\leq R, j=1,\cdots,n\}$ に含まれているとし，$\boldsymbol{C}^{n+m}$ の多重円板

$$\varDelta=\{|z_j|\leq R, j=1,\cdots,n, |w_k|\leq 1, k=1,\cdots,m\}$$

を導入して

(6.3.3)　$$\begin{array}{ccc}\Phi: D & \longrightarrow & \varDelta\\ \cup & & \cup\\ z & \longmapsto & (z,\varphi_1(z),\cdots,\varphi_m(z))\end{array}$$

という埋め込み写像を考えよう．この写像は**岡の埋め込み写像**と呼ばれ，函数

論でしばしば重要な役割を果たす．その考え方を要約して言えば，次元が上っても良いから簡単な集合(多重円板)に帰着させよう，ということである．さて，$F(z)$ は Δ の部分多様体

$$S = \Phi(D) = \{(z, w) \in \Delta ; w_1 = \varphi_1(z), \cdots, w_m = \varphi_m(z)\}$$

の上の正則函数とみなせる．系 6.1.5 によれば，これは Δ 上の正則函数 $G(z, w)$ に延長できる．すなわち，Δ の近傍で正則な函数 $G(z, w)$ で $G(z, \varphi_1(z), \cdots, \varphi_m(z)) \equiv F(z)$ を満たすものが存在する．$G(z, w)$ は原点を中心として z, w の Taylor 級数に展開され，その部分和は Δ の上で $G(z, w)$ を一様に近似する z, w の多項式となる．故にそれに $w_j = \varphi_j(z), j=1, \cdots, N$ を代入したものは S の上で(従ってもとの D の上で) $F(z)$ を一様に近似する．ここで各整函数 $\varphi_j(z)$ の Taylor 展開は，D を含む多重円板 $\{|z_j| \leq R, j=1, \cdots, n\}$ の近傍で $\varphi_j(z)$ を一様に近似するから，これらをその適当な部分和でおき換えれれば，最終的に z の多項式による近似が得られる．証了．

定理 6.3.4 領域 $U \subset \boldsymbol{C}^n$ に対し次の諸条件は同値である．

a) U は Runge 領域である．

b) U は多項式凸である．

c) U は多項式的多面体で内側から近似される．

証明 **a)⇒b)** $K \subset U$ をコンパクト集合とせよ．Runge 領域の定義の中には正則領域であることが含まれているので，K の$\mathcal{O}(U)$-包 $\hat{K}_U$ は U 内のコンパクト集合となる．さて，$z \in \tilde{K}_U$ をとろう．$F(z) \in \mathcal{O}(U)$ を任意に選ぶ．仮定によりコンパクト集合 $\{z\} \cup K$ の上で $F(z)$ に一様収束する多項式の列 $\{p_k(z)\}$ がとれる．故に $z \in \tilde{K}_U$ より得られる不等式

$$|p_k(z)| \leq \sup_{\zeta \in K} |p_k(\zeta)|$$

から極限移行して

$$|F(z)| \leq \sup_{\zeta \in K} |F(\zeta)|$$

が従う．すなわち $z \in \hat{K}_U$ となる．故に $\tilde{K}_U = \hat{K}_U$ となり，これは始めに注意したように U 内のコンパクト集合となる．

b)⇒c) Cartan-Thullen の定理 6.2.5 の b)⇒c) の証明と全く同様である．

c)⇒a) U の多項式的多面体は U の解析的多面体の一種だから，Cartan-

Thullen の定理の判定条件 c) より，まず U は正則領域となることがわかる．U において多項式近似が成り立つことは，補題 6.3.3 の $\varphi_1(z), \cdots, \varphi_m(z)$ が多項式の場合から直ちに従う．証了．

系 6.3.5　凸領域は Runge 領域である．

実際，補題 6.2.4 における $\hat{K}_U \subset \widehat{K}$ の証明では整函数 $e^{(a-bi)z-c}$ を用いたが，これは $\widehat{K}$ の近傍でその Taylor 展開の部分和たる多項式によりいくらでも精密に近似できるので，結局 $\tilde{K}_U \subset \widehat{K}$ もわかるからである．

参考 6.2　一般に $\boldsymbol{C}^n$ のコンパクト集合 K に対し

(6.3.4)　　$\tilde{K} = \{z \in \boldsymbol{C}^n;$ 任意の多項式 $p(z)$ に対し $|p(z)| \leq \sup_{\zeta \in K} |p(\zeta)|\}$

で定まる集合 $\tilde{K}$ を K の**多項式凸包**と呼ぶ．$\tilde{K} = \tilde{K}_{C^n}$ であり，系 6.3.5 によれば $\tilde{K} \subset \widehat{K}$，従ってこれは再び $\boldsymbol{C}^n$ のコンパクト集合となる．$K \subset U$ のとき，これを (6.3.1) で定義した集合 $\tilde{K}_U$ と比較すると，一般には $\tilde{K}_U \subsetneqq \tilde{K}$ であり，$\tilde{K}$ は U の外へ飛び出す可能性がある．しかし U が Runge 領域の場合には $\tilde{K}_U$ は $\tilde{K}$ と一致する．何となれば，もし $\tilde{K}$ が U の外に飛び出した部分 $\tilde{K}'$ を持つとすれば，$\tilde{K} = \tilde{K}_U \sqcup \tilde{K}'$ と共通部分の無い和集合に分解されるはずである．一方，$\tilde{K}$ の定義より多項式 $p_1(z), \cdots, p_N(z)$ を十分沢山とれば，$\tilde{K}$ を外側から近似する閉じた（連結と限らぬ）多項式的多面体

$$D = \{z \in \boldsymbol{C}^n; |p_j(z)| \leq 1, j = 1, \cdots, N\}$$

が得られる．近似を精密にすることにより，D も，$\tilde{K}_U$ を含み U に含まれる部分と，$\tilde{K}'$ を含み U の外にある部分との非連結な和集合になっているようにできる．そこで前者の近傍で 0，後者の近傍で 1 に等しい正則函数を考え，補題 6.3.3 によりこれを D 上誤差 $<1/2$ で一様に近似する多項式 $p(z)$ をとろう．このとき $\tilde{K}_U$ の上で（従って K の上で）$|p(z)| < 1/2$，また $\tilde{K}'$ の上で $|p(z)| > 1/2$ となり，従って $z \in \tilde{K}'$ に対して

$$|p(z)| > \sup_{\zeta \in K} |p(\zeta)|$$

となるが，これは $z \in \tilde{K}$ の定義に矛盾するのである．以上このとから，定理 6.3.4 に与えた Runge 領域の判条定件に次のものを追加できることがわかる：

d)　任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対し，その多項式凸包 $\tilde{K}$ は再び U に含まれる．

$\boldsymbol{C}^n$ のコンパクト集合 K が $\tilde{K} = K$ を満たすとき，それは**多項式凸**であると言われる．このようなコンパクト集合の上では正則函数に対する近似定理が成立する：

系 6.3.6　多項式凸なコンパクト集合 K の近傍で正則な函数は，多項式により K 上一様に近似される．

実際，このような K は上に述べたように閉じた多項式的多面体により外側からいくらでも精密に近似されるから，K の近傍で正則な函数はこのようなある多項式的多面体の

近傍でも正則となり，従って補題 6.3.3 が適用できる．

Runge 領域の最も重要な例は，いくつかの多項式(或は整函数)を用いて定義される

$$U=\{z\in \boldsymbol{C}^n;|\varphi_1(z)|<1,\cdots,|\varphi_m(z)|<1\}\ \text{の連結成分}$$

の形の(必ずしも有界と限らぬ)領域である．このような領域が Runge 領域になることは

$$D_k=\left\{z\in U;\ |z_j|<k, j=1,\cdots,n, |\varphi_1(z)|<1-\frac{1}{k},\cdots,|\varphi_m(z)|<1-\frac{1}{k}\right\}$$

が U の多項式的多面体による取り尽し増大列となることからわかる．より複雑な例を構成するため，Runge 領域の概念の初等集合論的演算に対する安定性を見ておこう．

命題 6.3.7　a)　$U_1, U_2\subset \boldsymbol{C}^n$ を二つの Runge 領域とするとき，$U_1\cap U_2$ の各連結成分は再び Runge 領域となる．さらに，Runge 領域の無限族 $\{U_\lambda, \lambda\in \Lambda\}$ があるとき，共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ の内部の各連結成分は再び Runge 領域となる．

b)　$U_1\subset \boldsymbol{C}^n, U_2\subset \boldsymbol{C}^m$ を Runge 領域とすれば，$U_1\times U_2$ は $\boldsymbol{C}^n\times \boldsymbol{C}^m$ の Runge 領域となる．

c)　$U\subset \boldsymbol{C}^n$ が Runge 領域ならば，$U\cap\{z_1=0\}$ の各連結成分は $\boldsymbol{C}^{n-1}$ の Runge 領域となる．より一般に，$w=\Phi(z)$ が $\boldsymbol{C}^n$ から $\boldsymbol{C}^m$ への正則写像で $V\subset \boldsymbol{C}^m$ が Runge 領域ならば，$\Phi^{-1}(V)$ は $\boldsymbol{C}^n$ の Runge 領域となる．

d)　特に $U\subset \boldsymbol{C}^n$ が Runge 領域で $w=\Phi(z):\boldsymbol{C}^n\to \boldsymbol{C}^n$ が大域的な座標変換ならば，$\Phi(U)$ も Runge 領域となる．

証明はおおむね命題 6.2.7 と同様である．無限個の共通部分については，Runge 領域 U_λ に対し $\tilde{K}_{U_\lambda}=\hat{K}_{U_\lambda}$ が成り立つこと(定理 6.3.4 の証明参照)に注意して命題 6.2.7 a)の議論を用いるとよい．また，大域的に定義された正則写像とは，整函数を成分に持つもののことであるが，これは Taylor 展開の部分和で近似することにより多項式の場合に帰着できることに注意するとよい．

さて，一変数の場合には近似定理がコホモロジー消滅定理の証明に重要な役割を果たしたのであった(第 1 章補題 1.5.2 及びその後の参考 1.7 を見よ)．このことは多変数の場合にも言える．すなわち，我々は次の定理を証明する準備を

整えたのである.

定理 6.3.8　$U \subset \boldsymbol{C}^n$ を Runge 領域とするとき,

$$H^p(U, \mathcal{O}) = 0, \quad p \geq 1 \tag{6.3.5}$$

証明　まず U 内の閉じた(連結と限らぬ)多項式的多面体

$$D = \{z \in U; |p_1(z)| \leq 1, \cdots, |p_m(z)| \leq 1\}$$

に対し

$$H^p(D, \mathcal{O}) = 0, \quad p \geq 1 \tag{6.3.6}$$

を示そう. 岡の埋め込み写像

$$\begin{array}{ccl} \Phi : D & \longrightarrow & \varDelta = \{(z, w) \in \boldsymbol{C}^{n+m}; |z_j| \leq R, |w_k| \leq 1\} \\ \cup\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\; \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ z & \longmapsto & (z, p_1(z), \cdots, p_m(z)) \end{array}$$

を再び用いる. 区別のため D 上の正則函数芽の層を $\mathcal{O}_D$ と書き, また $\varDelta$ 上のそれを $\mathcal{O}_\varDelta$ と書くことにしよう. また $S = \Phi(D)$ とおき, 多様体 S 上の正則函数芽の層を $\mathcal{O}_S$ と書けば, 明らかに $\iota_* \mathcal{O}_S = \Phi_* \mathcal{O}_D$ となる. (ここに $\iota : S \hookrightarrow D$ であった.) 補題 6.1.4 と系 6.1.3 により

$$H^p(\varDelta, \iota_* \mathcal{O}_S) = 0, \quad p \geq 1$$

ところで明らかに $H^p(\varDelta, \iota_* \mathcal{O}_s) = H^p(D, \mathcal{O}_D)$ が成り立つ. (“術学的” に説明すれば, 埋め込み写像 Φ は明らかに純 0 次元的であるから, 定理 5.6.4 により等号が成り立つ.) 故に (6.3.6) が示された.

もとの領域に戻って, U を取り尽す多項式的多面体の増大列 $\{D_k\}$ を一つ選ぼう. U の閉多重円板による局所有限な任意の被覆 $\overline{\mathfrak{U}} = \{\overline{U}_\lambda\}$ に対して

$$H^p(\overline{\mathfrak{U}}, \mathcal{O}) = 0, \quad p \geq 1$$

を示そう. そうすれば, この種の被覆は(開被覆の閉包の形をした)閉被覆全体の中で共終系を成すから, 第5章§7で注意したように, これから Čech コホモロジーを径由して (6.3.5) が得られる. 必要なら $\overline{\mathfrak{U}}$ を細分することにより,

$$\overline{U}_\lambda \cap \partial D_k \neq \phi \Rightarrow \overline{U}_\lambda \cap \partial D_{k\pm1} = \phi \tag{6.3.7}$$

となっていると仮定しても一般性を失わないことを注意しておく.

さて, p 次元余輪体 $\varphi \in C^p(\overline{\mathfrak{U}}, \mathcal{O})$ を任意にとろう. 各 k に対し $\overline{\mathfrak{U}}|_{D_k}$ は, 閉じた多項式的多面体による D_k の被覆となる. 閉じた多項式的多面体の有限個の交わりは(連結性を別にすれば)再び閉じた多項式的多面体となるから, 前半で

既に示したところにより

$$H^p(\overline{U}_{\lambda_0}\cap\cdots\cap\overline{U}_{\lambda_N}\cap D_k,\mathcal{O})=0,\qquad p\geq 1$$

故に $\overline{\mathfrak{U}}|_{D_k}$ は D_k の Leray 被覆となる．第5章§7で注意したように，このような被覆にも Leray の定理が使えるから，

$$H^p(\overline{\mathfrak{U}}|_{D_k},\mathcal{O})=H^p(D_k,\mathcal{O})=0,\qquad p\geq 1$$

がわかる．ここで，最後の等式には再び前半の結果を用いた．さて $\delta(\varphi|_{D_k})=\delta\varphi|_{D_k}=0$ だから，これより $\psi_k\in C^{p-1}(\overline{\mathfrak{U}}|_{D_k},\mathcal{O})$ で，

$$\delta\psi_k=\varphi|_{D_k}$$

を満たすものが存在する．今，$\tilde{\psi}_k\in C^{p-1}(\overline{\mathfrak{U}},\mathcal{O})$ を

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{k,\lambda_0,\cdots,\lambda_{p-1}}(z)&=\psi_{k,\lambda_0,\cdots,\lambda_{p-1}}(z),\quad \overline{U}_{\lambda_0},\cdots,\overline{U}_{\lambda_p}\subset D_k \text{ のとき},\\ &=0,\qquad\qquad \text{その他のとき}\end{aligned}$$

により定めれば，仮定(6.3.7)から明らかに

$$\delta\tilde{\psi}_k|_{D_{k-1}}=\varphi|_{D_{k-1}}$$

が成り立つ．従ってこの構成法を各 k について適用すれば

$$\delta(\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k)|_{D_{k-1}}=0 \tag{6.3.8}$$

となる．

そこでまず $p=1$ の場合を考えよう．このとき条件(6.3.8)は，0次余鎖 $\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k$ が D_{k-1} 上に一つの正則函数を定めることを意味する．故に近似定理(補題 6.3.3)により多項式 $\tilde{\chi}_k(z)$ を

$$|\tilde{\psi}_{k+1}(z)-\tilde{\psi}_k(z)-\tilde{\chi}_k(z)|\leq\frac{1}{2^k},\qquad (z\in D_{k-1}\text{ において})$$

を満たすように選び

$$\psi=\tilde{\psi}_1+\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k-\delta\tilde{\chi}_k) \tag{6.3.9}$$

とおけば，和は各 $\overline{U}_\lambda$ の近傍で一様に収束し，しかも1変数の場合で既に馴染の変形により

$$\begin{aligned}\delta\psi|_{D_{N-1}}&=\delta(\tilde{\psi}_N+\sum_{k=N}^{\infty}(\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k-\delta\chi_k))|_{D_{N-1}}=\delta\tilde{\psi}_N|_{D_{N-1}}\\ &=\varphi|_{D_{N-1}}\end{aligned}$$

が各 N について成り立つことがわかる．(ここで(6.3.8)と $\delta\circ\delta\chi_k=0$ を用いた．) 故に $\psi\in C^0(\overline{\mathfrak{U}},\mathcal{O})$ は $\delta\psi=\varphi$ の答となる．

次に $p>1$ の場合を考える．このときは(6.3.8)と $H^{p-1}(D_{k-1},\mathcal{O})=0$ 及び Leray の定理から，$\chi_k\in C^{p-2}(\mathfrak{U}|_{D_{k-1}},\mathcal{O})$ で $\delta\chi_k=(\tilde{\varphi}_{k+1}-\tilde{\varphi}_k)|_{D_{k-1}}$ を満たすものが選べる．故に再び D_{k-2} の外での成分を 0 として χ_k を修正し，$\tilde{\chi}_k\in C^{p-2}(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ という延長を

$$\delta\tilde{\chi}_k|_{D_{k-2}}=(\tilde{\varphi}_{k+1}-\tilde{\varphi}_k)|_{D_{k-2}}$$

を満たすように作ることができる．これを用いて再び(6.3.9)とおけば，今度は右辺の和は各 D_N の上で有限となり，同様の変形で $\delta\psi|_{D_{N-2}}=\varphi|_{D_{N-2}}$ が示される．証了．

正則函数の層 $\mathcal{O}$ は，解析接続の一意性という大変堅い性質を持っており，C^∞ 級函数の層などとは大いに異なっているが，それでも 0 次以上の余鎖を考えれば，上の証明でも用いたように，境界の近傍で少し修正することにより，外へ 0 で延長することができるのである．

参考 6.3　実は系 6.3.6 および定理 6.3.8 は更に強く次の形で成立する：

系 6.3.6′(Weil-Oka)　K は $\hat{K}_U=K$ を満たすような U 内のコンパクト集合とする．(このような K を $\mathcal{O}(U)$-凸と呼ぶことがある．) このとき，K の近傍で正則な函数は $\mathcal{O}(U)$ の元により K 上一様に近似できる．

このような K の例として最も基本的なものは，U 内の閉じた解析的多面体である．

定理 6.3.8′(Oka-Cartan-Serre)　$U\subset \boldsymbol{C}^n$ を Stein 開集合とすれば

$$H^p(U,\mathcal{O})=0,\qquad p\geq 1$$

系 6.3.6′ の証明は K が U 内の閉じた解析的多面体の場合に行えば十分である．(系 6.3.6 の証明を見よ．) さて，K が解析的多面体のときには岡の埋め込み写像を用いて K を高次元の多重円板 Δ 内に解析的部分多様体 S として埋め込む．近似すべき K 上の正則函数 $F(z)$ が Δ 上の正則函数 $G(z,w)$ に延長できれば，それから先は補題 6.3.3 の証明と同様，$G(z,w)$ の Taylor 展開の部分和を利用して，$F(z)$ が z と，解析的多面体 K を定義する $\mathcal{O}(U)$ の元との多項式により近似できることがわかる．K が多項式的多面体のとき，この延長定理の証明には補題 6.1.4 に与えた $\mathcal{O}_S$ の逆向き分解が基礎となっていた．故に一般の解析的多面体の場合には参考 6.1 で注意したようにもう少し準備が要るわけである．この事情は定理 6.3.8′ の証明についても全く同様であり，$\mathcal{O}_S$ に対する逆向き分解の存在さえ認めれば，定理 6.3.8 の証明において多項式的多面体を解析的多面体に書き換えるだけでよい．(U が連結でない場合は，そのコホモロジーは定義から明らかに各連結成分で計算したものの和に等しい．)

以下において，超函数論の一通りの基礎付けには Runge 領域を考えるだけで十分なことが示されるであろう．このことは学習の初段階における準備負担の著しい軽減をもたらす，しかし応用上は Stein 領域を考える方が一般的なので，次節以降においては上の参考 6.3 で述べた二つの結果も仮定し，Stein 領域でも成り立つことは Stein 領域について定式化することにする．非常に神経質な読者はこれらを Runge 領域と解釈して読み進まれれば，超函数論の基礎付けに関する限り最後まで論理的飛躍は無い様になっている．

Stein 開集合の重要性は，種々の領域の $\mathcal{O}$-係数コホモロジーを被覆コホモロジーにより計算するとき，Leray 被覆として用いることができるという点にある(定理 6.3.8′ と定理 5.5.6)．Stein 開集合を要素とする被覆は **Stein 被覆**と呼ばれ，本書でも以下重要な役割を果たすことになる．

問 6.3.2 第 1 章の参考 1.6 で述べた Runge の近似定理をこの節の方法で導いてみよ．

この節を終えるにあたり，応用として第 4 章で仮定した次の補題の証明を与えておこう．

補題 4.3.3(再掲) $U\subset \boldsymbol{C}^n$ を凸開集合とすれば，$G(z)\in\mathcal{O}(U)$ に対し偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial z_1}F(z)=G(z) \tag{6.3.10}$$

は大域解 $F(z)\in\mathcal{O}(U)$ を持つ．

証明 方程式(6.3.10)は局所的には(即ち，$\mathcal{O}$ の芽の段階では)不定積分を用いて常に解くことができる．また $\dfrac{\partial}{\partial z_1}F(z)=0$ の解は z_1 を含まず，従って $z'=(z_2,\cdots,z_n)$ だけの函数の全体より成る．このことに注意し，局所解の集まりを $\mathcal{O}$-係数の 0 次余鎖と見做して，被覆コホモロジーを解くことにより食い違いを z' の函数で調節すれば，(6.3.10)の大域解が得られる．以下の証明では見通しを良くするためこの手続きを層の完全列と順像の概念を用いて記述しよう．

今，$n-1$ 変数 z' の正則函数芽の作る $\boldsymbol{C}^{n-1}$ 上の層を $\mathcal{O}'$ と記し，$z\mapsto z'$ という射影写像を π で表わせば，上に述べた局所的性質は

$$0 \to \pi^{-1}\mathcal{O}' \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_1}} \mathcal{O} \to 0 \tag{6.3.11}$$

という $\boldsymbol{C}^n$ 上の層の完全列の存在を意味する．これより

$$0 \to \pi^{-1}\mathcal{O}'(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_1}} O(U) \longrightarrow H^1(U, \pi^{-1}\mathcal{O}') \to \cdots$$

というコホモロジー完全列を得るから，(6.3.10)の大域的可解性を言うには $H^1(U, \pi^{-1}\mathcal{O}')=0$ を示せば十分である．ここで，π を U に制限したもの $\pi|_U$ について $(\pi|_U)_*\pi^{-1}\mathcal{O}'=\mathcal{O}'$ が $\pi(U)$ の上で成立することに注意しよう．実際，ある点 $z_0' \in \pi(U)$ の十分小さい凸近傍 V' に対し

$$(\pi|_U)_*\pi^{-1}\mathcal{O}'(V') = \pi^{-1}\mathcal{O}'(U \cap \pi^{-1}(V'))$$

であり，π が開写像であることと，U が凸従って $U \cap \pi^{-1}(V')$ が連結であることとから，最後のものは $\mathcal{O}'(V')$ に等しい．（第1章の定義1.7.9の後の説明を参照せよ．）故にもし写像 $\pi|_U$ が $\pi^{-1}\mathcal{O}$ につき純0次元的なことがわかれば，定理5.6.4，及び $\pi(U)$ の凸性と定理6.3.8とを用いて

$$H^1(U, \pi^{-1}\mathcal{O}') = H^1(\pi(U), \mathcal{O}') = 0$$

が得られる．

そこで $R^k(\pi|_U)_*\pi^{-1}\mathcal{O}'$ を計算しよう．V' を上述の近傍とし，$V=U \cap \pi^{-1}(V')$ とおこう．$H^k(V, \pi^{-1}\mathcal{O}')$ を計算すればよい．しかるに(6.3.11)より

$$\begin{aligned} 0 \to \pi^{-1}\mathcal{O}'(V) \longrightarrow \mathcal{O}(V) &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_1}} \mathcal{O}(V) \\ &\to H^1(V, \pi^{-1}\mathcal{O}') \to H^1(V, \mathcal{O}) \to \cdots \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

という長完全列が作られ，ここで V が凸なことから定理6.3.8により $H^k(V, \mathcal{O})=0$ $(k \geq 1)$，従って

$$H^k(V, \pi^{-1}\mathcal{O}') = 0 \qquad k \geq 2$$

がまずわかる．さらに，V' が十分小さければ，$V=U \cap \pi^{-1}(V')$ は“殆ど筒状”となり，従って特に $V \cap \{z_1=a_1\}=\{a_1\} \times V'$ となるような水準面が存在すると仮定できる(図6.3参照)．このような領域においては，方程式(6.3.10)は不定積分 $\displaystyle\int_{a_1}^{z_1} G(z)dz_1$ により容易に大域的に解くことができるから，(6.3.12)の写像 $\dfrac{\partial}{\partial z_1}$ は全射となり，従って $H^1(V, \pi^{-1}\mathcal{O}')=0$ も示された．証了．

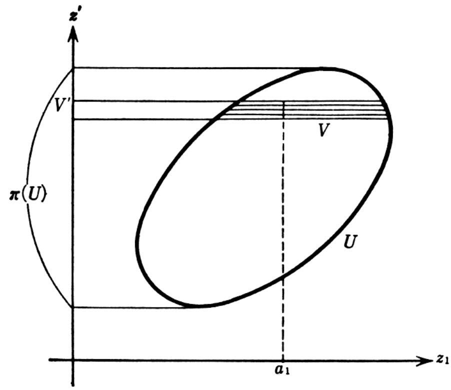


図 6.3

問 6.3.3　上の補題を次の形に拡張せよ：U 及び $\pi(U)$ は Stein 領域で，各 $z'\in\pi(U)$ に対し，繊維 $U\cap\pi^{-1}(z')$ は $\boldsymbol{C}$ の単連結領域をなすとする．このとき方程式(6.3.10)は常に大域的に解ける．（より精密な研究が鈴木[1]にある．）

上で扱った方程式は非常に特殊なもののようだが，座標変換でかなりいろいろな方程式に変わるので見かけよりは応用が広い．

§4　Grauert の定理

本節と次節で，超函数論の基礎付けに直接かかわりを持つ結果を述べる．これらは多変数函数論としては特論の部類に属し，従って一般の教科書には載っていない．

定理 6.4.1(Grauert)　$\boldsymbol{R}^n$ の連結部分集合 S は Runge 領域より成る複素基本近傍系を有する．

証明　S の十分小さい実近傍 Ω を任意にとり，更に Ω の複素近傍として Runge 領域をいくらでも小さくとれることを示せばよいから，始めから連結開集合 Ω を考察すれば十分である．そこで U を Ω の任意の複素近傍とするとき，$\Omega\subset V\subset U$ を満たす Runge 領域 V が構成できることを示そう．後の都合のため

$$U\subset\left\{|\mathrm{Im}\,z|<\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}\tag{6.4.1}$$

と仮定しておく．

まず始めに，これからの議論の道具となる基本的な Runge 領域を一つ構成しよう．出発時の変数を w で表わし，$w'=(w_2,\cdots,w_n)$ とおけば，

$$\{\mathrm{Im}\, w_1 > -(\mathrm{Re}\, w_1)^2\}\times \boldsymbol{C}^{n-1}{}_{w'}$$

は，1次元 Runge 領域の直積として命題 6.3.7 b)により Runge である．これから

$$\begin{cases} w_1=z_1+i(z_2{}^2+\cdots+z_n{}^2) \\ w'=z' \end{cases}$$

という $\boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^n$ の大域的な変換で得られる領域も命題 6.3.7 d)により Runge となる．不等式 $\mathrm{Im}\, w_1>-(\mathrm{Re}\, w_1)^2$ にこの変換を実際に代入してみれば，この領域は具体的に

(6.4.2)　$y_1-(y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2)+(x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)+\{x_1-2(x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\}^2>0$

という不等式で定義されていることがわかる．この領域を以下 O_0 で表わそう．これが以下の我々の議論の基礎となるものである．以下，紙面を節約するため，$x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2$ を x^2 等と略記するのに倣い，

$$x'^2 = x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2,\ \ x'y' = x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

等の略記法を用いよう．$|y|<\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ のとき (6.4.2) の左辺は

(6.4.3)
$$\begin{aligned} &y_1-y'^2+x'^2+(x_1-2x'y')^2 \\ &\geq y_1-y'^2+x'^2+\frac{1}{2}x_1{}^2-4|x'y'|^2 \geq y_1-y'^2+\frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

と下から抑えられる．すなわち，O_0 は

(6.4.4)
$$\left\{z = x+iy\in\boldsymbol{C}^n; y_1-y'^2+\frac{1}{2}x^2 > 0, |y| <\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$$

というわかり易い領域を含んでいることがわかる．これから特に O_0 は半空間の開きを持つ $\boldsymbol{R}^n+i\{y_1>0\}0$ 型の無限小楔で，更に実領域 $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ をも含むことがわかる．ただし，原点は確かに O_0 の境界点となっている．

さて，単位ベクトル $\omega\in\boldsymbol{S}^{n-1}$ と定点 $a\in\boldsymbol{C}^n$ をとり，O_0 に実の回転を施すことにより半空間の方向 $y_1>0$ を $\langle y,\omega\rangle>0$ に変え，それを更にベクトル a だけ平行移動したもの $O_{\omega,a}$ を作る．これも明らかに Runge 領域である．（この回転により実座標 x も $\boldsymbol{R}^n$ 内で同じ回転を被るが，集合 (6.4.4) の方は x につき

球対称なので必要な性質は失われない.）以上の準備の下に，求める近傍 V は次のようにして得られる:

$$(6.4.5)\qquad V = \mathrm{Int}\,[\bigcap_{a+bi\in(\partial U\setminus \boldsymbol{R}^n)} O_{-b,\,a+bi} \cap \bigcap_{a\in(\partial U\cap \boldsymbol{R}^n)}\ \bigcap_{\omega\in S^{n-1}} O_{\omega,\,a}]$$

の Ω を含む連結成分

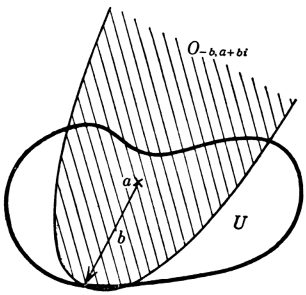


図 6.4　$\{a\}+i\boldsymbol{R}^n$ による断面図

この V が実際に U に含まれるような Ω の Runge 近傍であることを確かめよう．まず，∂U の点はすべて除かれているから $V\subset U$ は明らかである．次に V が Runge 領域であることは無限個の交わりに対する Runge 領域の安定性(命題 6.3.7 a))から従う．故に一番問題となるのは V が実際に Ω を含んでいるかどうかである．このことは内部(Int)をとる前は自明であるが，無限個の交わりのさらに内点を考えるのであるから別に調べる必要がある．そのためには，$x_0\in\Omega$ を任意にとるとき，x_0 のある一定の複素近傍で(6.4.5)の交わりに参加する各 $O_{-b,a+bi}, O_{\omega,a}$ 等に含まれるものがあることを示せば十分である．さて，x_0 からこれらの領域の“頂点”$a+bi, a$ 等までの距離は $\delta=\mathrm{dis}(x_0,\partial U)$ という正の数で下から抑えられている．上述のような x_0 の近傍がこの δ だけに依存して決められればよい．簡単のため領域の“頂点”を再び原点に移し，ω を $(1,0,\cdots,0)$ に戻して考える．すなわち，(6.4.2)或はより安直に，(6.4.4)で与えられる領域を考える．このとき x_0 は $z_0\in\boldsymbol{C}^n$ に移るが，後者は仮定により $|z_0|\geq\delta$ かつ $|\mathrm{Im}\,z_0|<\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ を満たし，更にもとの状況が $O_{-b,a+bi}$ 型か $O_{\omega,a}$ 型かに応じてそれぞれ $\mathrm{Im}\,z_0'=0$ かつ $\mathrm{Im}\,z_{01}>0$ を満たす点となるか，或は $z_0\in\boldsymbol{R}^n$ なる点となっている．（ここに z_{01}, z_0' はそれぞれ z_0 の第 1 成分及び第 2 成分以下を表わす.）前者の場合には $(\mathrm{Im}\,z_{01})^2+(\mathrm{Re}\,z_0)^2\geq\delta^2$ に注意すれば，

$$\left\{z=x+iy\in \boldsymbol{C}^n; |x-\mathrm{Re}\, z_0|<\frac{\delta}{2\sqrt{2}}, |y_1-\mathrm{Im}\, z_{01}|<\frac{\delta^2}{8}, |y'|<\frac{\delta}{4}, |y|<\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$$

という近傍が(6.4.4)に含まれる．実際，この近傍の点 z に対し

$$\begin{aligned} y_1-y'^2+\frac{1}{2}x^2 &> |\mathrm{Im}\, z_{01}|-\frac{\delta^2}{8}-\frac{\delta^2}{16}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|\mathrm{Re}\, z_0|^2-|x-\mathrm{Re}\, z_0|^2\right) \\ &\geq \frac{1}{4}(|\mathrm{Im}\, z_{01}|^2+|\mathrm{Re}\, z_0|^2)-\frac{\delta^2}{8}-\frac{\delta^2}{16}-\frac{\delta^2}{16} \\ &\geq \frac{\delta^2}{4}-\frac{\delta^2}{4}=0 \end{aligned}$$

が成り立つからである．また後者の場合には，$|z_0|\geq\delta$ に注意すれば

$$\left\{z=x+iy\in \boldsymbol{C}^n; |x-z_0|<\frac{\delta}{2\sqrt{2}}, |y_1|<\frac{\delta^2}{8}, |y'|<\frac{\delta}{4}, |y|<\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$$

という近傍が(6.4.4)に含まれていることが容易にわかる．証了．

一般に $\boldsymbol{C}^n$ の部分集合 S は，Stein 開集合より成る基本近傍系を持つとき Stein 集合と呼ばれる．Grauert の定理は実の集合がすべて Stein になることを主張するものであるが，上の証明では Runge 領域で基本近傍系がとれることまで示されたわけである．さて，Stein 集合の上では $\mathcal{O}$-係数コホモロジーが消滅する．特に

定理 6.4.2 (Malgrange)　実開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ に対し

(6.4.6)　　　　$H^k(\Omega, \mathcal{A})=0, \quad k\geq 1$

が成り立つ．ここに $\mathcal{A}$ は実解析函数の芽の層である．

証明　$\mathcal{A}=\mathcal{O}|_{\boldsymbol{R}^n}$ を思い出そう．$\boldsymbol{C}^n$ の任意の開集合はパラコンパクトだから，命題 5.6.6 により

$$H^k(\Omega, \mathcal{A})=\varinjlim_{U\supset\Omega} H^k(U, \mathcal{O})$$

となる．前定理によれば，Ω(の各連結成分)の基本近傍系として Runge 領域がとれるから，帰納極限は，そのような近傍に限っても同じものを与える．しかるに Runge 領域に対しては，定理 6.3.8 により 1 次元以上のコホモロジーが消えていたから，結局(6.4.6)が得られる．証了．

Malgrange の定理は一般の実解析多様体に対しても成立する．ここでは，大域的な方程式で書かれた $\boldsymbol{R}^n$ の部分多様体として埋め込むことができるようなものについてのみそれを証明しておこう．本書の前半において超函数論構成の

ために我々が必要としたのは S^{n-1} 或は $\boldsymbol{R}^n \times S^{n-1}$ という多様体だけであったが，これはただ一つの方程式 $\xi^2=1$ で大域的に定義されている．故に場合によっては以下の証明をこの場合に当てはめて読まれても良い．

系 6.4.3 M を実解析多様体とし，

$$\iota : M \hookrightarrow \boldsymbol{R}^n$$

という実解析的な埋め込み写像があって，像 $\iota(M)$ はその近傍で実解析的な函数 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)$ を用いて

$$\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0 \tag{6.4.7}$$

という方程式で書けており，かつこの集合の各点で

$$\operatorname{grad} \varphi_1(x), \cdots, \operatorname{grad} \varphi_m(x) \text{ は一次独立} \tag{6.4.8}$$

とする．このとき，M 上の実解析函数の層 $\mathscr{A}_M$ に対して

$$H^k(M, \mathscr{A}_M) = 0, \quad k \geq 1$$

が成り立つ．

証明 条件(6.4.8)により，$\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)$ は $\iota(M)$ の各点の近傍で $\boldsymbol{R}^n$ の局所座標の一部として採用できる．これを補充する座標を局所座標として，$\iota(M)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の部分多様体となる．（特に $\iota(M)$ の次元は $n-m$ に等しい．）写像 ι により M と $\iota(M)$ は実解析多様体として同一視されるから，$H^k(\iota(M), \mathscr{A}_{\iota(M)})$ を計算すれば良い．ところで条件(6.4.8)は連続性により $\iota(M)$ のある複素近傍 U でも成立するから，方程式(6.4.7)において変数を複素化したものは U 内に一つの複素多様体 X を定める．その上の正則函数の層を $\mathscr{O}_X$ と書けば $\mathscr{A}_{\iota(M)} = \mathscr{O}_X|_{\iota(M)}$ である．一方，$\mathscr{O}_X$（を U 上の層と見做したもの）は補題 6.1.4 の証明で構成した Koszul 分解(6.1.5)′において，w_j を $\varphi_j(z)$ でおき換えて得られる次の分解を許す：

$$0 \leftarrow \mathscr{O}_X \leftarrow \mathscr{O}_U \leftarrow \wedge^1 \mathscr{O}_U{}^m \leftarrow \cdots \leftarrow \wedge^m \mathscr{O}_U{}^m \leftarrow 0. \tag{6.4.9}$$
$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ \sum_{j=1}^{n} \varphi_j f_j & \leftarrow\!\shortmid & (f_1, \cdots, f_m) \end{array}$$

実際，この層の列の完全性は局所的に確かめれば良いが，そのときは適当な座標変換で $\varphi_1(z), \cdots, \varphi_m(z)$ を座標の一部に帰着でき，Koszul 分解そのものとなる．さて定理 6.4.1 により U 内に $\iota(M)$ の Runge 近傍 V をとれば，定理 6.3.8 より $H^k(V, \mathscr{O}_V)=0$ $(k \geq 1)$ が成り立つ．故に列(6.4.9)をそこへ制限したものにつ

いて系 5.3.7 を適用すれば $H^k(V, \mathcal{O}_X|_V)=0\,(k\geq 1)$ が得られる．近傍 V を縮めてゆけば，再び命題 5.6.6 により

$$H^k(\iota(M), \mathcal{A}_{\iota(M)}) = \varinjlim_{V\supset\iota(M)} H^k(V, \mathcal{O}_X|_V) = 0, \qquad k\geq 1$$

が得られる．証了．

参考 6.4　実は任意のパラコンパクトな連結実解析多様体Mは必ずある次元のユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ に実解析的に埋め込めることが知られている．このことから上の証明と同様にして $X\supset M$ という複素多様体で，その複素次元が M の実次元に等しく，その局所座標がMのそれの複素化になっているようなものが存在することがわかる．このようなXを一般にMの複素化或は複素近傍などと言う．更に，定理 6.4.1 によりこのような近傍Xとしてはいつでも $\boldsymbol{C}^n$ の Stein 領域の複素部分多様体となっているようなものがとれる．このような複素多様体は一般に **Stein 多様体**と呼ばれ，その上の正則函数芽の層について一次元以上のコホモロジー群が消滅する等，$\boldsymbol{C}^n$ の Stein 領域と同様の良い性質を持つ．上の証明においては，このことの証明にXを定義する方程式がXのある近傍で大域的に定義されていることを用いたが，これは実は余分な条件である．（参考 6.1 参照.）

Grauert の定理の証明において用いた構成法をもう少し精密化すると次の結果が得られる．証明は全く初等的だが，この結果の超函数論的意味は深遠である．

補題 6.4.4　$\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を開集合，$U\supset\Omega$ をその複素近傍とし，Γ を任意の開凸錐とする．さらに，$F(z)$ を開き Γ の無限小楔の一種である $(\Omega+i\Gamma)\cap U$ という開集合で定義された正則函数とする．このとき，$\boldsymbol{R}^n+i\Gamma 0$ 型のある無限小楔で正則でかつ $\boldsymbol{R}^n\setminus\bar{\Omega}$ まで解析接続されるような函数$G(z)$，及び Ω のある近傍で正則な函数 $H(z)$ を適当に選んで

$$F(z) = G(z) - H(z)$$

が共通の定義域で成り立つようにできる．

証明　簡単のため再び $U\subset\left\{|\mathrm{Im}\, z|<\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$ とし，かつ $U\subset\Omega+i\boldsymbol{R}^n$ とも仮定しておく．以下，$\boldsymbol{R}^n+i\Gamma 0$ 型の無限小楔で $\boldsymbol{R}^n\setminus\bar{\Omega}$ をも含むような領域 V，及び Ω の複素近傍 U_2 を

$$V \cap U_2 \subset (\Omega + i\Gamma) \cap U,$$

$V \cup U_2$ は Runge 領域の非連結和

という性質を持つように構成しよう．そうすれば Mayer-Vietoris の定理(定理 5.3.8 a))の完全列

$$\cdots \to \mathcal{O}(V) \oplus \mathcal{O}(U_2) \to \mathcal{O}(V \cap U_2) \to H^1(V \cup U_2, \mathcal{O}) \to \cdots$$
$$\begin{array}{ccccc} \Psi & & \Psi & & \| \\ (G, H) & \mapsto & G-H & & 0 \end{array}$$

から，$F(z)|_{V \cap U_2}$ に対し求める分解が得られる．

さて，まず U を少し縮めた U_1 を用意し，各 $a \in \Omega$ について境界点 $a+bi \in \partial U_1$ で，$-b \in \Gamma^\circ$ かつ

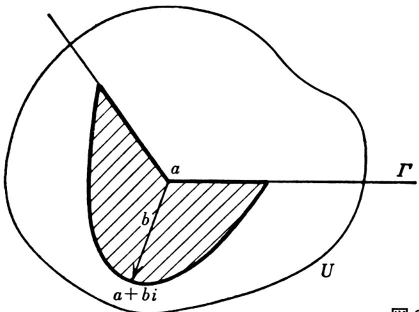


図 6.5

(6.4.10) $[O_{-b, a+bi} \cap (\{a\} + i\boldsymbol{R}^n)] \setminus (\{a\} + i\Gamma) \Subset U \cap (\{a\} + i\boldsymbol{R}^n)$

を満たすものが少くとも一つは存在するようにできることに注意しよう．実際，$U \setminus \Omega$ の点 $a+bi$ で(6.4.10)を満たすものが少くとも一つは存在することは明らかだから，それらを U から取り除いたものを U_1 とすればよい．このような点の虚座標は a に対し局所的には一定に選べるので，取り除く点の集合を局所有限な閉集合の合併とすることができ，従ってそれらを除いたあとの U_1 も開集合となるようにできる．

そうしておいて

$$W = \mathrm{Int}\Big[\bigcap_{a+bi \in \partial U_1 \setminus \boldsymbol{R}^n,\ -b \in \Gamma^0} O_{-b, a+bi} \cap \bigcap_{a \in \partial \Omega} \bigcap_{\omega \in \Gamma^\circ} O_{\omega, a}\Big]$$

とおこう．定理 6.4.1 の証明と同様，W の各連結成分は Runge となり，かつ W は $\boldsymbol{R}^n \setminus \partial\Omega$ を含んでいる．交わりを構成する方向成分が Γ° の中に限られているため，W は $\boldsymbol{R}^n + i\Gamma 0$ 型の無限小楔となっていることにも注意せよ．

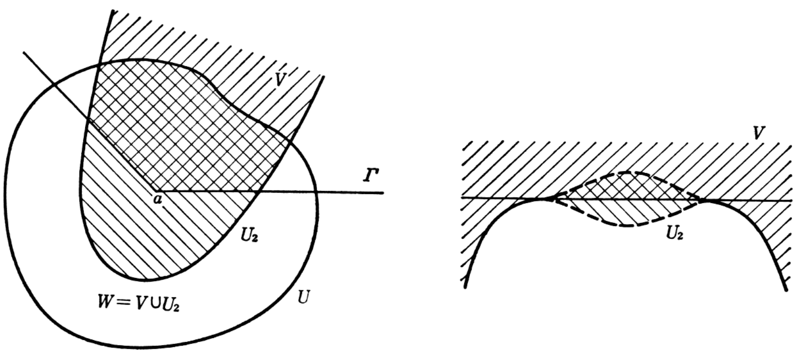
最後に

$$V=[W\cap\{(\boldsymbol{R}^n\setminus\Omega)+i\boldsymbol{R}^n\}]\cup[W\cap(\Omega+i\Gamma)]$$

とおく．第一の因子が開集合ではないので，V が開集合になることを確かめる必要があるが，それは“接着面”である $W\cap(\partial\Omega+i\boldsymbol{R}^n)$ が第二の因子の対応する境界面 $W\cap(\partial\Omega+i\Gamma)$ と一致していることからわかる．V も $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma 0$ 型の無限小楔であり，また $\boldsymbol{R}^n\setminus\bar{\Omega}$ を含んでいるが，Runge とは限らない（し，その必要も無い）．このとき

$$W\setminus V\subset U$$

となっていることに注意しよう．実際，この包含関係は，各 $a\in\Omega$ について $\{a\}+i\boldsymbol{R}^n$ による切り口で確かめれば十分だが，それは条件(6.4.10)により確かに保障されている．そこで U_2 として，$W\setminus V$ の近傍で $U\cap W$ に含まれるようなものを選ぼう．例えば単に



$\{a\}+i\boldsymbol{R}^n$ による断面　　　　$\boldsymbol{R}^n+i\{b\}$ による断面

図 6.6

$$U_2=(W\setminus V)\cup(V\cap U)=W\cap U$$

でよい．すると

$$V\cap U_2\subset(\Omega+i\Gamma)\cap U,\qquad V\cup U_2=W$$

となり所要の性質を満たしていることがわかる．証了．

§5　$\boldsymbol{R}^n$ の $\boldsymbol{C}^n$ における純余次元性

この節ではいよいよ超函数論の核心をなす $\boldsymbol{R}^n$ の純余次元性に関する佐藤の

基本定理を証明しよう．ただし応用の便を考え，それより一般的な森本-柏原のコホモロジー消滅定理(のやや弱い形)を証明しておく．後者はミクロ函数の層が直接コホモロジー的に導入されたとき用いられたものである．

補題 6.5.1 a) $K=K_1\times\cdots\times K_n$ を柱状閉集合，V を Stein 領域とすれば

(6.5.1) $$H^p{}_{K\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V,\mathcal{O})=0,\quad p\geq n+1$$

b) $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を実開集合，V を Stein 領域とすれば

(6.5.2) $$H^p{}_{\Omega\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V,\mathcal{O})=0\quad p\geq n+1$$

証明 a) K の柱状近傍 $U=U_1\times\cdots\times U_n$ を任意に選び，

(6.5.1)′ $$H^p{}_{K\times V}(U\times V,\mathcal{O})=0,\quad p\geq n+1$$

を被覆コホモロジーにより計算しよう．(切除定理により $U=\boldsymbol{C}^n$ で十分なのだが，以下繰返し出て来る記号の準備のために一般化した．)

(6.5.3) $$V_0=U\times V,\ V_j=U_1\times\cdots\times U_{j-1}\times(U_j\setminus K_j)\times U_{j+1}\times\cdots\times U_n\times V,\quad j=1,\cdots,n$$

とおく．このとき $\mathfrak{V}=\{V_0,V_1,\cdots,V_n\}$，$\mathfrak{V}'=\{V_1,\cdots,V_n\}$ は開集合対 $(U\times V,(U\setminus K)\times V)$ の Stein 被覆，従って Leray 被覆となる(下の参考 6.5 を見よ)．故にコホモロジー(6.5.1)′をこの被覆に関するコホモロジーとして計算することができる(定理 5.5.6)．しかるに，この被覆の元は全部で $n+1$ 個しかないから，$p\geq n+1$ に対しては p 次の余鎖が存在しなくなる．故に(6.5.1)′が成り立つ．

b) 定理 6.4.1 によれば Ω の複素近傍として Stein (Runge) なもの U が存在する．(もっとも Stein 近傍を一つとるだけならずっと易しい議論で済む．)今度は

(6.5.4) $$U_j=\{z\in U;\mathrm{Im}\,z_j\neq 0\},\quad j=1,\cdots,n$$

とし

(6.5.5) $$V_0=U\times V,\qquad V_j=U_j\times V,\quad j=1,\cdots,n$$

とおこう．$U\setminus\Omega$ の点 z は少くとも一つの座標が実数でないようなものだから，$U_1,\cdots,U_n$ は明らかに $U\setminus\Omega$ を覆い，従って $(\mathfrak{V},\mathfrak{V}')$ は開集合対 $(U\times V,(U\setminus\Omega)\times V)$ の相対被覆となる．半空間 $\{\pm\mathrm{Im}\,z_j>0\}$ は Stein (Runge) だから，U_j，従って V_j も Stein (V が Runge ならこれも Runge の非連結和) となる．故に上と同じ理由により(6.5.2)が得られる．証了．

参考 6.5　先の約束に従い上の V を Runge 領域とすれば議論の運びに飛躍が無いようにしなければならないが，そのとき(6.5.3)の領域 V_j は因子 $(U_j\setminus K_j)$ のために必ずしも Runge 領域とならない．そこで念の為一般に $U=U_1\times\cdots\times U_n$ を柱状領域，V を Runge 領域とするとき

$$H^p(U_1\times\cdots\times U_n\times V, \mathcal{O})=0, \qquad p\geq 1 \tag{6.5.6}$$

が成り立つことを別に証明しておこう．定理 6.3.8′ を仮定するつもりの読者は以下の証明を気にしなくて良い．さて，領域 $U_1\times\cdots\times U_n\times V$ は $K_1\times\cdots\times K_n\times D$ の形のコンパクト集合で内側から近似される．ここに $K_j\subset U_j$ であり，D は V の多項式的多面体である．岡の埋め込み写像 Φ により D を高次元の多重円板 $\varDelta$ に埋め込めば，

$$K_1\times\cdots\times K_n\times D \subsetneq K_1\times\cdots\times K_n\times\varDelta$$

となる．命題 6.1.2 によれば，この右辺の集合の上で 1 次元以上の $\mathcal{O}$-係数コホモロジーは消えているから，埋め込み $D\subsetneq\varDelta$ に関する Koszul 分解をそのまま流用して系 6.1.3 を用いることにより

$$H^p(K_1\times\cdots\times K_n\times D, \mathcal{O})=0, \qquad p\geq 1$$

がわかる．これから(6.5.6)を導くには，定理 6.3.8 の証明に鑑み，$K_1\times\cdots\times K_n\times D$ の近傍で正則な函数 $F(z,w)$ に対し $\mathcal{O}(U\times V)$ の元による近似定理さえあれば良いが，これは 1 変数の場合の Runge の近似定理の証明と，D 上の多項式近似とを組み合わせれば得られる．即ち，まず $F(z,w)$ を z に関する Cauchy 積分

$$F(z,w)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(\zeta,w)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

で表わす．ここに各 γ_j は K_j を正の向きに一周する $U_j\setminus K_j$ 内の積分路である．ここで ζ に関する積分を Riemann 式近似和でおき換えれば，$z_1,\cdots,z_n$ それぞれの 1 次分数函数と，$\mathcal{O}(D)$ の元の積の形の項がいくつか出て来る．前者は 1 変数の Runge の近似定理により $\mathcal{O}(U_j)$ の元で，また後者は D が多項式的多面体なることを用いて w の多項式で近似すれば，結局所要の近似定理が得られる．

補題 6.5.2 (Martineau)　$K=K_1\times\cdots\times K_n\subset L=L_1\times\cdots\times L_n$ を二つの柱状コンパクト集合の対，$W\subset V$ を Stein 領域の対とするとき，自然な写像

$$H^n{}_{K\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V, \mathcal{O})\to H^n{}_{L\times W}(\boldsymbol{C}^n\times W, \mathcal{O}) \tag{6.5.7}$$

は単射である．

証明　柱状近傍 $U=U_1\times\cdots\times U_n\supset L$ を任意にとる．(ここでも $U=\boldsymbol{C}^n$ で十分である．) $K\times V$ に対し，補題 6.5.1 a)の証明で導入した相対 Stein 被覆 $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$ 及び $L\times W$ に対し同様のもの $(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}')$ を用意する．被覆の元の個数が $n+1$

個なので，n 次の相対余鎖はただ一つの項を持ち，それは必然的に余輪体となり，

$$F(z,w)V_0\wedge V_1\wedge\cdots\wedge V_n$$

の形をしている．ここで係数 $F(z,w)$ は $\mathcal{O}(V_0\cap V_1\cap\cdots\cap V_n)$ の元であるが，この定義域は $(U_1\setminus K_1)\times\cdots\times(U_n\setminus K_n)\times V$ に等しい．また $n-1$ 次の相対余鎖は

$$(6.5.8)\qquad \sum_{j=1}^{n}F_j(z,w)V_0\wedge V_1\wedge\cdots\wedge V_{j-1}\wedge V_{j+1}\wedge\cdots\wedge V_n$$

の形をしており，$F_j(z,w)\in\mathcal{O}(V_0\cap V_1\cap\cdots\cap V_{j-1}\cap V_{j+1}\cap\cdots\cap V_n)$ であって，この定義域は上の F の定義域において第 j 番目の因子を U_j でおき換えたものである．そこで第4章§1で用いた記号を思い出し，一般に柱状集合の対 $K\subset U$ に対して

$$(6.5.9)\qquad U\#K=(U_1\setminus K_1)\times\cdots\times(U_n\setminus K_n)$$

(6.5.10) $U\#_jK=U\#K$ の第 j 因子を U_j でおき換えたもの

と記すことにしよう．(記号 $\#$ (或は $\#_j$) の正確な意味は，(第 j 座標以外の) ある座標軸への射影像 z_k が後の集合 K の同じ軸への射影像に含まれるような点 z を前の集合からすべて取り除くことである．) (6.5.8)の余境界は，余境界作用素の定義(5.5.4)より(制限写像を省略して書けば)

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^jF_j(z,w)V_0\wedge V_1\wedge\cdots\wedge V_n$$

となる．符号は各 $F_j(z,w)$ に繰込めば，結局

$$(6.5.11)\qquad H^n{}_{K\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V,\mathcal{O})=\mathcal{O}((U\#K)\times V)/\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}((U\#_jK)\times V)$$

等の表現が得られる．(ここまでは K が有界なことは用いていない．)

さて，$F(z,w)\in\mathcal{O}((U\#K)\times V)$ に対し，Cauchy 積分

$$(6.5.12)\qquad G(z,w)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(\zeta,w)}{(z_1-\zeta_1)\cdots(z_n-\zeta_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

を考えよう．ここに各 γ_j は K_j を正の向きに一周する $U_j\setminus K_j$ 内の積分路で，変数 z_j がその外側に来るように選ばれているものとする．この積分は，上巻第4章§1において K が実区間の直積の場合に，そこに台を持つ超函数に対してその標準定義函数を計算するために導入されたものと本質的に同じである．

今はさらにパラメータwも入っているが，そこでの議論は殆ど修正する必要がなく，(6.5.12)で計算される$G(z,w)$が再び$\mathcal{O}((U\sharp K)\times V)$の元となること，(6.5.11)の右辺の分母から来るような$F(z,w)$に対しては$G(z,w)\equiv 0$となること，及び一般に$G(z,w)$と$F(z,w)$とが同一のコホモロジー類を定めることが確かめられる．(最後の主張の証明はそこでの(4.1.6)式の変形に相当する.)

以上の準備の下に(6.5.7)の単射性の証明を行なおう．同型(6.5.11)により$F(z,w)V_0\wedge V_1\wedge\cdots\wedge V_n$で代表されるような$H^n{}_{K\times V}(U\times V,\mathcal{O})$の元をとり，これが$H^n{}_{L\times W}(U\times W,\mathcal{O})$の零元に写されたとせよ．後者の空間に対する(6.5.11)と同様の表現では，この像は$F(z,w)|_{(U\sharp L)\times W}W_0\wedge W_1\wedge\cdots\wedge W_n$で代表される．従って，これが分母$\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}((U\sharp_j L)\times W)$に属することとなる．故にCauchy積分(6.5.12)は$(z,w)\in(U\sharp L)\times W$に対し恒等的に0を与える．一方，同じ積分は$(z,w)\in(U\sharp K)\times V$に対して，$F(z,w)$と同じコホモロジー類を与えるような正則函数$G(z,w)$を与えていたのだから，$G(z,w)|_{(U\sharp L)\times W}\equiv 0$，従って解析接続の一意性により$(U\sharp K)\times V$においても$G(z,w)\equiv 0$となるが，これは$F(z,w)$自身がもともと0コホモロジー類を代表していたことを意味する．証了．

補題 6.5.3　$K=K_1\times\cdots\times K_n$を柱状コンパクト集合，$V$をStein領域とするとき，

$$H^p{}_{K\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V,\mathcal{O})=0,\qquad 0\leq p\leq n-1. \tag{6.5.13}$$

証明　次元nに関する帰納法を用いる．$n=1$のとき，証明すべき主張は$H^0{}_{K_1\times V}(\boldsymbol{C}\times V,\mathcal{O})=\Gamma_{K\times V}(\boldsymbol{C}\times V,\mathcal{O})=0$だが，これは解析接続の一意性に他ならない．そこで$n-1$次元の柱状コンパクト集合に対しては，任意のStein領域Vについて(6.5.13)が示されたとし，n次元の柱状コンパクト集合$K=K_1\times\cdots\times K_n$を考える．簡単のため$K'=K_1\times\cdots\times K_{n-1}$とおこう．対$K\times V\subset K'\times\boldsymbol{C}\times V$に関するコホモロジーの基本長完全列(定理5.3.6 d))より次の完全列が得られる．

$$\begin{aligned}&\cdots\longrightarrow H^{p-1}{}_{K'\times(\boldsymbol{C}\setminus K_n)\times V}(\boldsymbol{C}^{n-1}\times(\boldsymbol{C}\setminus K_n)\times V,\mathcal{O})\\ &\longrightarrow H^p{}_{K\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V,\mathcal{O})\longrightarrow H^p{}_{K'\times\boldsymbol{C}\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V,\mathcal{O})\\ &\qquad\longrightarrow H^p{}_{K'\times(\boldsymbol{C}\setminus K_n)\times V}(\boldsymbol{C}^{n-1}\times(\boldsymbol{C}\setminus K_n)\times V,\mathcal{O})\\ &\longrightarrow\cdots\end{aligned}$$

帰納法の仮定により第二列と第三列が $0 \leq p \leq n-2$ に対して消滅している．(ここでパラメータの空間は $\boldsymbol{C} \times V$, $(\boldsymbol{C} \setminus K_n) \times V$ とそれぞれ異ったものになっていることに注意されたい．パラメータの空間は帰納法を進めるために役立っているのである．)故に第一列も 0 となり (6.5.13) が $0 \leq p \leq n-2$ について確かめられた．

さて，$p=n-1$ に対しては第二列はもはや 0 と限らないので第一列の消滅は同じ安易さでは出て来ない．しかし補題 6.5.2 によれば，$p=n-1$ に対して第二列の項から第三列の項へゆく写像は単射である．故に一行前の第三列の項が消えていることと合わせて，$H^{n-1}{}_{K \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O})=0$ が結論される．証了．

系 6.5.4 $K=K_1 \times \cdots \times K_n \subset L=L_1 \times \cdots \times L_n$ を柱状コンパクト集合の対とし，V を Stein 領域とするとき

$$H^p{}_{(L \setminus K) \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O}) = 0, \quad p \neq n \tag{6.5.14}$$

証明 対 $K \times V \subset L \times V$ に関する基本長完全列

$$\cdots \to H^p{}_{L \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O}) \to H^p{}_{(L \setminus K) \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O})$$
$$\to H^{p+1}{}_{K \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O}) \to H^{p+1}{}_{L \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O}) \to \cdots$$

を考察する．主張(6.5.14)は $0 \leq p \leq n-2$ に対しては補題 6.5.3 から，また $p \geq n+1$ に対しては補題 6.5.1 から直ちに従う．最後に，$p=n-1$ に対しては，直前の項 $H^{n-1}{}_{L \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O})$ が消えていることと，補題 6.5.2 により後の二つの項が単射の関係にあることから従う．証了．

この結果は，岡の埋め込み写像を用いることにより二つの解析的多面体の対に一般化することができる．証明を見ればわかるように，これらの多面体は内点を持たなくても良いことに注意せよ．例によって厳密な証明は解析的多面体が整函数で書けている場合にのみ与えられる．

定理 6.5.5 K, L を二つの閉じた解析的多面体，V を Stein 領域とするとき

$$H^p{}_{(L \setminus K) \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O}) = 0, \quad 0 \leq p \leq n-1 \tag{6.5.15}$$

証明 簡単のため以下パラメータの空間 V を書くのを省こう．K を $K \cap L$ でおき換えることにより $K \subset L$ と仮定できる．そこで

$$L = \{z \in \boldsymbol{C}^n ; |F_j(z)| \leq 1, \ j = 1, \cdots, m\}$$
$$K = \{z \in \boldsymbol{C}^n ; |F_j(z)| \leq 1, \ j=1, \cdots, m, m+1, \cdots, N\}$$

とおこう．L は有界だから半径 r の多重円板に含まれていると仮定しよう．さ

らに，

$$R = \max\ \{1, \max_{m+1 \leq j \leq N} \sup_{z \in L} |F_j(z)|\}$$

なる実数を選び

$$\Delta = \{(z, w) \in \boldsymbol{C}^{n+N}; |z_j| \leq r, j = 1, \cdots, n, |w_j| \leq 1, j = 1, \cdots, m,$$
$$|w_j| \leq R, j = m+1, \cdots, N\}$$
$$D = \{(z, w) \in \boldsymbol{C}^{n+N}; |z_j| \leq r, j = 1, \cdots, n, |w_j| \leq 1, j = 1, \cdots, N\}$$

とおく．そして岡の埋め込み写像

$$\begin{array}{ccc} \Phi : L & \hookrightarrow & \Delta \\ \cup & & \cup \\ z & \mapsto & (z, F_1(z), \cdots, F_N(z)) \end{array}$$

を考えよう．明らかに $\Phi^{-1}(D) = K$ が成り立っている．初等的考察から（或は定理 5.6.7 によれば Φ は明らかに純 0 次元的なので，定理 5.6.4 により）

$$H^p{}_{L \setminus K}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}) \cong H^p{}_{\Delta \setminus D}(\boldsymbol{C}^{n+N}, \Phi_* \mathcal{O}) \tag{6.5.16}$$

一方，$\Delta \setminus D$ 上の正則函数の層 $\mathcal{O}_{z,w}$ については系 6.5.4 より

$$H^p{}_{\Delta \setminus D}(\boldsymbol{C}^{n+N}, \mathcal{O}_{z,w}) = 0, \quad 0 \leq p \leq n+N-1$$

が成り立っている．そこで $\Phi_* \mathcal{O}$ の $\mathcal{O}_{z,w}$ による長さ N の逆向き分解を用いれば（$F_j(z)$ が整函数ならこれは補題 6.1.4 の Koszul 分解でよい），系 5.3.7 により

$$H^p{}_{\Delta \setminus D}(\boldsymbol{C}^{n+N}, \Phi_* \mathcal{O}) = 0, \quad 0 \leq p \leq n-1$$

が得られる．故に (6.5.16) により (6.5.15) が示された．証了．

コホモロジーの消滅 (6.5.15) は実は $p \geq n+1$ についてもやはり成立しているのであるが，これは系 5.3.7 からは得られないことに注意せよ．これについては後に第 7 章 §4 で再論するであろう．

以上の準備の下に超函数論における次の基本定理が証明できる．

定理 6.5.6（佐藤）　$\boldsymbol{R}^n \subset \boldsymbol{C}^n$ は層 $\mathcal{O}$ に関して純 n 余次元的である．より一般に，$\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{C}^m \subset \boldsymbol{C}^{n+m}$ も $n+m$ 変数の正則函数の層 $\mathcal{O}$ に関して純 n 余次元的となる．

証明　$\mathcal{H}^p{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O})$ の計算をする．平行移動に関して均質なので原点における茎を計算すれば十分である．$\boldsymbol{R} = \{z \in \boldsymbol{C}; |e^{iz}| \leq 1, |e^{-iz}| \leq 1\}$ と正則函数を用いた不等式で表わせることに注意し，

$$f(z) = 1-(z_1{}^2+\cdots+z_n{}^2)$$

という多項式を用いて

$$L = \boldsymbol{R}^n \cap \{z \in \boldsymbol{C}^n; |z_1| \leq 1, \cdots, |z_n| \leq 1\}$$
$$K = L \cap \{\mathrm{Re}\, f(z) \leq 0\}$$

とおこう．$\mathrm{Re}\, f(z) \leq 0$ は $|e^{f(z)}| \leq 1$ と同値だから，上の注意と合わせてこれらは $\boldsymbol{C}^n$ の整函数で定義された（内点を持たぬ）閉じた解析的多面体となっているわけである．さて，

$$U = \{z \in \boldsymbol{C}^n; |z_1| < 1, \cdots, |z_n| < 1, \mathrm{Re}\, f(z) > 0\}$$

は明らかに原点の一つの複素近傍であり，かつ

$$L \setminus K = \boldsymbol{R}^n \cap U$$

となっている．故に前定理により

$$H^p{}_{\boldsymbol{R}^n \cap U}(U, \mathcal{O}) = H^p{}_{L \setminus K}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}) = 0, \qquad 0 \leq p \leq n-1$$

が得られた．この U を相似縮小したもの $\{rU, r>0\}$ は原点の基本近傍系をなすから，これより $\mathcal{H}^p{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O})_0 = 0\ (0 \leq p \leq n-1)$ がわかった．

$p \geq n+1$ に対しては別の考察を用いる．今度は U を原点の勝手な Stein 近傍とすれば，補題 6.5.1 b) より $H^p{}_{\boldsymbol{R}^n \cap U}(U, \mathcal{O}) = 0\ (p \geq n+1)$ となる．故に極限にゆけば $\mathcal{H}^p{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O})_0 = 0\ (p \geq n+1)$ が得られる．

$\mathcal{H}^p{}_{\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{C}^m}(\mathcal{O})$ の計算は上の考察において $\boldsymbol{C}^m$ の点の Stein 近傍 V を直積しておけば良いだけなので全く同様である．証了．

次の結果はミクロ函数の層をコホモロジー的に導入するとき用いられたものである．本書では理論上必要としないが参考のため述べておく．

定理 6.5.7 Γ は原点を頂点とする**固有**な（即ち直線を含まぬ）閉凸多角錐とするとき，$\mathcal{H}^p{}_{\boldsymbol{R}^n + i\Gamma}(\mathcal{O})|_{\boldsymbol{R}^n} = 0$ が $0 \leq p \leq n-1$ について成り立つ．

証明 Γ は単位ベクトル $\omega^1, \cdots, \omega^N$ により

(6.5.17) $$\Gamma = \{y \in \boldsymbol{R}^n; \langle \omega^j, y \rangle \geq 0, j=1, \cdots, N\}$$

で定義されているとする．Γ が固有錐ということから，単位ベクトル ω を適当に選べば半空間 $\langle \omega, y \rangle > 0$ が $\Gamma \setminus \{0\}$ を含むようにできる．故に連続性と同次性により，$c>0$ を適当にとれば，$y \in \Gamma$ に対し

(6.5.18) $$\langle \omega, y \rangle \geq c|y|$$

が成立することがわかる．そこで今度は

$$f(z) = \frac{2}{c}\langle \omega, iz\rangle + 1 - (z_1{}^2 + \cdots + z_n{}^2)$$

なる函数を考え

$$L = \{z \in \boldsymbol{C}^n; |z_j| \leq 1, j = 1, \cdots, n, \operatorname{Re}\langle \omega^j, iz\rangle \leq 0, j = 1, \cdots, N\}$$
$$K = L \cap \{\operatorname{Re} f(z) \leq 0\}$$

とおこう．このとき

$$U = \{z \in \boldsymbol{C}^n; |z_j| < 1, j = 1, \cdots, n, \operatorname{Re} f(z) > 0\}$$

は(開集合で，確かに0を含んでいるから)再び原点の近傍となるが，これについて

$$L \setminus K = (\boldsymbol{R}^n + i\Gamma) \cap U \tag{6.5.19}$$

が成り立つ．この関係は先ほどの場合のように自明ではないので確かめておこう．$L \setminus K \supset (\boldsymbol{R}^n + i\Gamma) \cap U$ は明らかであるから，逆に $z \in L \setminus K$ をとる．これが $(\boldsymbol{R}^n + i\Gamma) \cap U$ に属することを言うには，不等号 $|z_j| < 1, j=1, \cdots, n$ を示せば十分である．まず $z \in L$ より $y = \operatorname{Im} z$ について $|y_j| \leq 1$, 従って $|y_j| \geq y_j{}^2$ より $|y| \geq y_1{}^2 + \cdots + y_n{}^2$ が成り立つことに注意せよ．故に，$z \notin K$ と (6.5.18) より

$$0 < \operatorname{Re} f(z) = -\frac{2}{c}\langle \omega, y\rangle + 1 - (x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2) + (y_1{}^2 + \cdots + y_n{}^2)$$
$$\leq 1 - |x|^2 - |y|^2$$

となり，$|z| < 1$，従って $|z_j| < 1$ が示された．

(6.5.19) と定理 6.5.5 から

$$H^p{}_{(\boldsymbol{R}^n + i\Gamma) \cap U}(U, \mathcal{O}) = H^p{}_{L \setminus K}(U, \mathcal{O}) = 0, \qquad 0 \leq p \leq n-1$$

が導かれる．ところで $\{rU, r > 0\}$ は再び原点の基本近傍系となるから，これより $\mathcal{H}^p{}_{\boldsymbol{R}^n + i\Gamma}(\mathcal{O})_0 = 0 \ (0 \leq p \leq n-1)$ が得られる．証了．

以上で $\mathcal{O}$ の導来層の計算は完了したのであるが，後の必要のため，やや大域的な相対コホモロジーの計算をいくつかしておこう．

補題 6.5.8　a)　S を $\boldsymbol{R}^n$ の局所閉集合，V を Stein 領域とするとき，

$$H^p{}_{S \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O}) = 0, \qquad p \neq n, n+1$$

b)　さらに，$S = F \cap \Omega$ と，閉集合と開集合の交わりの形に表わしたとき，F は柱状閉集合の有限個の和集合の形をしているとする．このときさらに $H^{n+1}{}_{S \times V}(\boldsymbol{C}^n \times V, \mathcal{O}) = 0$ も成り立つ．

証明 以下簡単のため因子 V を省略しよう．a) $0\leq p\leq n-1$ に対しては定理 6.5.6 と補題 5.3.5 により

$$H^p{}_S(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})=\Gamma_S(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{H}^p{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}))=0$$

となる．一方 $p\geq n+2$ については，対 $S\subset\Omega$ に対する基本長完全列

$$\cdots\to H^{p-1}{}_{\Omega\setminus F}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\to H^p{}_S(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\to H^p{}_\Omega(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\to\cdots$$

を見る．実開集合 $\Omega\setminus F$ 或は Ω については，既に補題 6.5.1 b) で見たように $p\geq n+1$ に対してこれらに台を持つコホモロジー群が消えている．故にそれらにはさまれた $H^p{}_S(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})$ は $p\geq n+2$ に対して 0 となる．

b) $p=n+1$ の場合をより詳しく見よう．対 $F\cap(\boldsymbol{R}^n\setminus\Omega)\subset F$ に関する別の基本長完全列

$$\cdots\to H^{n+1}{}_F(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\longrightarrow H^{n+1}{}_{F\cap\Omega}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\longrightarrow H^{n+2}{}_{F\cap(\boldsymbol{R}\setminus\Omega)}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\to\cdots$$

に鑑み，$H^{n+1}{}_F(C^n,\mathcal{O})$ の消滅を調べておけば十分である．まず F がそれ自身柱状閉集合のときは，補題 6.5.1 a) により $H^{n+1}{}_F(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})=0$ が成り立っている．そこで一般の場合には F を構成する柱状閉集合の個数 N に関する帰納法を用いよう．それには $H^{n+1}{}_F(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})=0$ と $H^{n+1}{}_{F'}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})=0$ とから $H^{n+1}{}_{F\cup F'}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})=0$ を示せば十分である．しかるに Mayer-Vietoris の定理 5.3.8 b) により，

$$\cdots\to H^{n+1}{}_F(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\oplus H^{n+1}{}_{F'}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\to H^{n+1}{}_{F\cup F'}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\to H^{n+2}{}_{F\cap F'}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\to\cdots$$

という完全列が存在し，ここで常に $H^{n+2}{}_{F\cap F'}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})=0$ だからそれが言える．証了．

参考 6.6 本節の諸結果は次のような形でも成り立つことが知られている．

定理 6.5.5′（森本-柏原） K,L を $\mathcal{O}(U)$-凸な U 内のコンパクト集合，V を任意の開集合とするとき

$$H^p{}_{(L\setminus K)\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V,\mathcal{O})=0,\qquad 0\leq p\leq n-1$$

定理 6.5.7′（佐藤） Γ を任意の固有閉凸錐とするとき $\mathcal{H}^p{}_{\boldsymbol{R}^n+i\Gamma}(\mathcal{O})|_{\boldsymbol{R}^n}=0$ が $p\neq n$ について成り立つ．

補題 6.5.8′（佐藤） $S\subset\boldsymbol{R}^n$ を任意の局所閉集合とするとき，

$$H_S^p(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})=0,\qquad p\neq n$$

これらの定理の証明はこの節の諸結果から何らかの意味での極限論法により得られる．定理 6.5.5′ において V が Stein である必要が無いのは，実は補題 6.5.2 が V の Stein 性を用いなくても証明できるからである．（$p\geq n+1$ に対するコホモロジーの消滅には V

が Stein なことは不可欠である.）定理 6.5.7′ は歴史的にミクロ函数の層 $\mathcal{C}$ を導入する手がかりとなったものであり，また補題 6.5.8′ は超函数の層 $\mathcal{B}$ の脆弱性の証明の基礎として用いられて来たものである．本書は別のやり方をとったため，このように深い結果は必要としないので，以上は紹介するだけにとどめておく．

問 6.5.1　$\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{C}^{n+m}$ 上の定数層とする．凸開集合 U に対し $H^k(U, \boldsymbol{C})=0\,(k\geq 1)$ という位相幾何の知識を仮定し，$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{C}^m\subset\boldsymbol{C}^{n+m}$ が層 $\boldsymbol{C}$ についても純 n 余次元的となることを次の順序で証明せよ．

a)　$\Omega=\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n$ を開直方体，$U=U_1\times\cdots\times U_n$ をその柱状凸複素近傍とし，$V\subset\boldsymbol{C}^m$ を凸な連結成分を持つ開集合とするとき，$H^k{}_{\Omega\times V}(U\times V, \boldsymbol{C})=0\,(k\geq n+1)$．［補題 6.5.1 に倣え.］

b)　$H^n{}_{\Omega\times V}(U\times V, \boldsymbol{C})$ に対し (6.5.11) と同様の表現公式

(6.5.20)　$$H^n{}_{\Omega\times V}(U\times V, \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}((U\,\sharp\,\Omega)\times V)/\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{C}((U\,\sharp\,{}_j\Omega)\times V)$$

を示し，それを用いて V の連結成分が μ 個のとき

(6.5.21)　$$H^n{}_{\Omega\times V}(U\times V, \boldsymbol{C}) \cong (H^n{}_{\Omega}(U, \boldsymbol{C}))^{\mu}$$

となることを示せ．

c)　パラメータ V が無い場合，$H^n{}_{\Omega}(U, \boldsymbol{C})$ の表現公式 (6.5.20) において分子の元 $\boldsymbol{c}=(c_\sigma)\in\boldsymbol{C}(U\,\sharp\,\Omega)$ に $\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\cdot c_\sigma$ を対応させれば，$H^n{}_{\Omega}(U, \boldsymbol{C})$ から $\boldsymbol{C}$ への全射が確定することを示し，これより $H^n{}_{\Omega}(U, \boldsymbol{C})\cong\boldsymbol{C}$ を結論せよ．

d)　$W\subset V$ を同様の部分集合とし，W の各連結成分は必ず V と交わるとする．このとき自然な写像 $H^n{}_{\Omega\times V}(U\times V, \boldsymbol{C})\to H^n{}_{\Omega\times W}(U\times W, \boldsymbol{C})$ は単射となることを証明せよ．

e)　$H^k{}_{\Omega\times V}(U\times V, \boldsymbol{C})=0\,(0\leq k\leq n-1)$ を n に関する帰納法で証明せよ．［補題 6.5.3 に倣え.］

付　記

多変数函数論は超函数論を展開するための予備知識として無くてはならぬ重要なものである．超函数論の教科書として一々そこから始めなければならぬというのはやや情無いが，多変数函数論が，例えば函数解析などに比してそこまで一般的常識となっていない現在，それはある程度止むを得まい．それに，岡–Cartan–Serre の定理，Grauert の定理等を予備知識として仮定するのは，第5章において層の理論の解説を丁寧に書いた後ではいささか空々しい感じもする．そうした筆者の主観もあって，ここでは全てを自前で用意した．そのため必要最小限のものを見出すことに努めた．

§1の柱状領域(或は多重円板)におけるコホモロジー消滅定理は，他に $\mathcal{E}$-係数の Dolbeault 分解を用いる方法がある (Gunning–Rossi[1]等)．さらに，Hörmander[1] のよ

うにそれを擬凸領域で直接行なう方法もある．函数解析的偏微分方程式の研究者には，最近ではむしろこちらの方が馴染みなくらいである．しかしここではむしろ Cousin の問題を解く古典的方法に近い被覆コホモロジーの方法を用いた（一松［1］等）．現在その最も華々しい応用を偏微分方程式の分野に見出している超函数論にとって，その基礎付けのためにかなり高級な偏微分方程式系を解かねばならぬというのはいささか自家撞着の感もしたからである．

§2-§3 は通常の函数論の教科書と大差無い．ただし連接層の理論を省略して岡-Cartan-Serre の定理の証明を Runge 領域に限定した．それは§4 で Grauert の定理の証明を初等化し，かつ結果を改良できた成果である．今迄の同定理の証明は擬凸近傍の存在しか示さなかったので，更に擬凸領域の理論と Levi の問題の話を準備する必要があった．なお，§4 で用いた論法は Bros-Iagolnitzer[2] でも行っている（が，境界付近の処理が甘いため Grauert の定理の再証明までは与えていないように思われる）．以上で準備の部分が終わるわけであるが，始めにも注意したようにこれは超函数論の準備負担を理論的にどこまで軽減できるかという試みの一つなのであって，一般の読者にはこれで十分であろうが今後超函数を研究の対象としてゆくつもりの読者は，回り道でも上に掲げたような本格的な教科書を用いて多変数函数論を本書で触れずに済んだ部分（特に擬凸領域や連接層の理論）まで含めてきっちり勉強するのがあくまでも正道であろう．

§5 から超函数の本論が始まる．佐藤の基本定理の証明は佐藤の原論文［2］には Cauchy-Weil 積分を用いるという指示しか与えられていない．その後 Martineau［1］，Harvey［1］により双対性を用いた函数解析的な証明が与えられた．（その粗筋は参考 8.4 に述べられている．）小松［3］，Schapira［1］の証明もそれを踏襲している．森本［1］は Cauchy-Fantappié 積分の一種を用いて佐藤の指示に近い形での証明を与えた．この他局所型 Bochner の定理に基いた代数的な証明が小松［4］により，また解析接続の一意性のみに基いた美しい証明が柏原［4］により与えられた．本書の証明は主にこの柏原のものを下敷としてこれらを混ぜ合わせ代数も解析もなるべく初等的なものしか使わぬよう心掛けた．

第7章　超函数のコホモロジー的性質

前章まで，層のコホモロジーについていろいろと準備して来たことを，ここで超函数の層に対して応用する．まず§1において超函数の層$\mathscr{B}$をコホモロジー的に定義し，本書の前半で与えた超函数の直観的定義と一致することを示す．次いで§2において実解析函数の層$\mathscr{A}$が$\mathscr{B}$の部分層となることを示し，商層$\mathscr{B}/\mathscr{A}$に関する結果を確立する．また§3においては超函数の層$\mathscr{B}$の脆弱性を証明し，これに関連した諸事実を述べる．最後に§4において正則パラメータを持つ超函数のコホモロジー的基礎付けを与え，本書の前半で仮定した基礎的諸定理の証明を完結させる．

§1　超函数のコホモロジー的定義

超函数の層$\mathscr{B}$はコホモロジーの言葉を用いると次のように定義することができる．

定義 7.1.1　$\mathscr{B}=\mathscr{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathscr{O})$(を$\boldsymbol{R}^n$上の層とみなしたもの)

ただし，この定義は$\boldsymbol{R}^n$の向き付けを考慮していないのでやや不正確である．これについてはこの節を読み通した後，参考7.2を見られたい．上の定義を前章までの結果と合わせると$\mathscr{B}$の大域的切断に関する次の表現が得られる：

系 7.1.2　実開集合$\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$に対し，その複素近傍$U$を勝手にとるとき

(7.1.1)　$$\mathscr{B}(\Omega)=H^n{}_\Omega(U,\mathscr{O})=H^n{}_\Omega(\boldsymbol{C}^n,\mathscr{O})$$

実際，定義5.3.4の後に注意したことと，補題5.3.5及び佐藤の基本定理6.5.6により

$$\mathscr{B}(\Omega) = \mathscr{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathscr{O})(\Omega) = \mathscr{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathscr{O})(U) = H^n{}_\Omega(U, \mathscr{O})$$

となる．切除定理によれば U のところには Ω を含むどんな複素開集合を書いても良い．

コホモロジー $H^n{}_\Omega(U, \mathscr{O})$ を具体的に把握するため，いくつかの相対 Stein 被覆を導入しよう．以下 U を Ω の Stein 近傍で $U \cap \boldsymbol{R}^n = \Omega$ なるものとする．良く用いられる被覆として次のものがある．

例 7.1.3　a)　(補題 6.5.1 b)の証明で用いたもの)　$U_j = U \cap \{\mathrm{Im}\, z_j \neq 0\}$, $j = 1, \cdots, n$ とおけば，$\mathfrak{U} = \{U, U_1, \cdots, U_n\}$，$\mathfrak{U}' = \{U_1, \cdots, U_n\}$ は開集合対 $(U, U \setminus \Omega)$ の相対 Stein 被覆となるのであった．故に

$$H^n{}_\Omega(U, \mathscr{O}) = H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathscr{O}) \tag{7.1.2}$$

この被覆に関する n 次の相対余鎖(即ち相対余輪体)はただ一項のみを有し，

$$F(z) U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n, \qquad F(z) \in \mathscr{O}(U_1 \cap \cdots \cap U_n)$$

の形をしている．また $n-1$ 次の相対余鎖は

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(z) U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{U_j} \wedge \cdots \wedge U_n,$$
$$F_j(z) \in \mathscr{O}(U_1 \cap \cdots \cap \widehat{U_j} \cap \cdots \cap U_n), \qquad j = 1, \cdots, n$$

の形をしており，この余境界は

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j F_j(z) U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n$$

となる．ここで以下$\widehat{\ }$はこの記号の下にある因子を取り除く意味で用いる．また定義域の制限記号も省略してある．そこで (6.5.9)-(6.5.10) に類似の

$$U \sharp \Omega = U_1 \cap \cdots \cap U_n = \{z \in U; \mathrm{Im}\, z_j \neq 0,\ j = 1, \cdots, n\} \tag{7.1.3}$$

$$\begin{aligned} U \sharp_j \Omega &= U_1 \cap \cdots \cap \widehat{U_j} \cap \cdots \cap U_n \\ &= \{z \in U; k \neq j \text{ なるすべての } k \text{ について } \mathrm{Im}\, z_k \neq 0\} \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

という記号を導入すれば，

$$H^n{}_\Omega(U, \Omega) \cong \mathscr{O}(U \sharp \Omega) / \sum_{j=1}^{n} \mathscr{O}(U \sharp_j \Omega) \tag{7.1.5}$$

という表現が得られた．第 σ 象限を Γ_σ と書くとき，$U \sharp \Omega$ は $(\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_\sigma) \cap U$ という $\Omega + i\Gamma_\sigma 0$ 型の無限小楔の σ に関する非連結な和集合になっていることに注意せよ．

b)　0 と異なるベクトル $\eta \in \boldsymbol{R}^n$ に対し，それが定める開半空間を一般に

$$E_\eta = \{y \in \boldsymbol{R}^n; \langle \eta, y\rangle > 0\}$$

で表わすことにしよう．今，ベクトル $\eta^0, \eta^1, \cdots, \eta^n \in \boldsymbol{R}^n$ を

(7.1.6) $$E_{\eta^0} \cup E_{\eta^1} \cup \cdots \cup E_{\eta^n} = \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$$

を満たすように選び，

$$U_j = (\boldsymbol{R}^n + iE_{\eta^j}) \cap U, \quad j = 0, 1, \cdots, n$$

とおく．$\mathfrak{U} = \{U, U_0, U_1, \cdots, U_n\}$，$\mathfrak{U}' = \{U_0, U_1, \cdots, U_n\}$ は明らかに開集合対 $(U, U \setminus \Omega)$ の相対 Stein 被覆となる．故に再び(7.1.2)が成り立つ．この被覆に関する n 次相対余鎖は

(7.1.7) $$\sum_{j=0}^{n} F_j(z) U \wedge U_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{U_j} \wedge \cdots \wedge U_n,$$
$$F_j(z) \in \mathcal{O}(U_0 \cap \cdots \cap \widehat{U_j} \cap \cdots \cap U_n), \quad j = 0, 1, \cdots, n$$

の形をしている．ところで仮定(7.1.6)から $U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n = \phi$ となっているので(下の補題 7.1.4 参照)，$n+1$ 次の相対余鎖は存在せず，従って(7.1.7)はこの場合も必然的に余輪体となる．また，$n-1$ 次相対余鎖は

(7.1.8) $$\sum_{j<k} F_{jk}(z) U \wedge U_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{U_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{U_k} \wedge \cdots \wedge U_n,$$
$$F_{jk}(z) \in \mathcal{O}(U_0 \cap \cdots \cap \widehat{U_j} \cap \cdots \cap \widehat{U_k} \cap \cdots \cap U_n), \quad j, k = 0, \cdots, n$$

の形をしており，その余境界は

$$\sum_{j=0}^{n} \Bigl(\sum_{k>j} (-1)^k F_{jk}(z) + \sum_{k<j} (-1)^{k+1} F_{kj}(z)\Bigr) U \wedge U_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{U_j} \wedge \cdots \wedge U_n$$

となる．今

(7.1.9) $$\Gamma_j = E_{\eta^0} \cap \cdots \cap \widehat{E_{\eta^j}} \cap \cdots \cap E_{\eta^n}$$

とおけば，これは固有錐となり，また

$$U_0 \cap \cdots \cap \widehat{U_j} \cap \cdots \cap U_n = (\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_j) \cap U.$$
$$U_0 \cap \cdots \cap \widehat{U_j} \cap \cdots \cap \widehat{U_k} \cap \cdots \cap U_n = (\boldsymbol{R}^n + i(\Gamma_j + \Gamma_k)) \cap U$$

が成立する(下の補題 7.1.4 参照)．故に結局

(7.1.10) $$H^n{}_\Omega(U, \mathcal{O}) \cong \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}((\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_j) \cap U) / \bigoplus_{j<k} \mathcal{O}((\boldsymbol{R}^n + i(\Gamma_j + \Gamma_k)) \cap U)$$

という表現が得られた．ただし分母の分子への入り方はやや複雑である：

$$\mathcal{O}((\boldsymbol{R}^n + i(\Gamma_j + \Gamma_k)) \cap U) \ni F_{jk}(z) \begin{cases} \nearrow (-1)^k F_{jk}(z)|_{(\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_j) \cap U} \in \mathcal{O}((\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_j) \cap U) \\ \searrow (-1)^{j+1} F_{jk}(z)|_{(\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_k) \cap U} \in \mathcal{O}((\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_k) \cap U) \end{cases}$$

実際の計算においては符号を間違えぬために因子 $U\wedge U_0\wedge\cdots\wedge\widehat{U_j}\wedge\cdots\wedge\widehat{U_k}\wedge\cdots\wedge U_n$ をつけておいた方がよい.

上の例 b) で用いた線型不等式系の初等的性質をここでまとめて証明しておこう. 以下の議論で使うための準備事項も含んでいる.

補題 7.1.4　ベクトル $\eta^0,\eta^1,\cdots,\eta^n\in\boldsymbol{R}^n$ は (7.1.6) を満たすものとする. このとき

a)　$E_{\eta^0}\cap E_{\eta^1}\cap\cdots\cap E_{\eta^n}=\phi$

b)　$\eta^0,\eta^1,\cdots,\eta^n$ のうちの任意の n 個は $\boldsymbol{R}$ 上一次独立である. 従ってそれらに対応する半空間の交わりは固有開凸錐となる.

c)　錐 Γ_j を (7.1.9) で定義すれば, その双対

(7.1.11)　　$$\Gamma_j{}^\circ=\{\sum_{k\neq j}\lambda_k\eta^k;\lambda_k\geq 0\}$$

は $\eta^k(k\neq j)$ で生成される凸閉多角錐となり, $\eta^j\in-\mathrm{Int}(\Gamma_j{}^\circ)$. 従って $\Gamma_0{}^\circ,\Gamma_1{}^\circ,\cdots,\Gamma_n{}^\circ$ は $\boldsymbol{R}^n$ の双対空間の凸閉多角錐による分割となっている.

d)　j,k を番号 $0,1,\cdots,n$ の中から任意に選ぶとき

(7.1.12)　　$$\Gamma_j+\Gamma_k=E_{\eta^0}\cap\cdots\cap\widehat{E_{\eta^j}}\cap\cdots\cap\widehat{E_{\eta^k}}\cap\cdots\cap E_{\eta^n}.$$

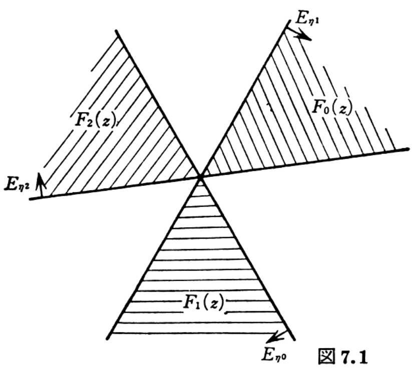


図 7.1

証明　a)　もし0と異なるベクトル $\eta\in E_{\eta^0}\cap E_{\eta^1}\cap\cdots\cap E_{\eta^n}$ が存在すれば, $-\eta\notin E_{\eta^0}\cup E_{\eta^1}\cup\cdots\cup E_{\eta^n}=\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ となり不合理である.

b)　例えば $\eta^1,\cdots,\eta^n$ が一次従属とすれば, $y\neq 0$ で $\langle\eta^j,y\rangle=0$, $j=1,\cdots,n$ を満たすものが存在する. このとき $\langle\eta^0,y\rangle\leq 0$ なら $y\notin E_{\eta^0}\cup E_{\eta^1}\cup\cdots\cup E_{\eta^n}$ となり, また $\langle\eta^0,y\rangle>0$ なら $-y\notin E_{\eta^0}\cup E_{\eta^1}\cup\cdots\cup E_{\eta^n}$ となって, いずれにしても不合理

である.

c)　(7.1.11)の検証は初等的にできる.（或は Γ_j を第一象限に線型変換しておいて確かめても良い.）さて，記号を簡単にするため $\eta^0\in-\mathrm{Int}(\Gamma_0{}^\circ)$ を示そう. b)により $\eta^0=\sum_{j=1}^n\lambda_j\eta^j$ と 0 ならざる係数を持つ一次結合で表わせるが，この係数 λ_j がすべて <0 なることを言えばよい. そこで例えば $\lambda_1>0$ とせよ. y に関する連立一次方程式

$$\langle\eta^1,y\rangle=\frac{1}{\lambda_1}>0,\ \langle\eta^j,y\rangle=\frac{1}{n|\lambda_j|}>0,\qquad j=2,\cdots,n$$

は b)により解を持つが，このとき

$$\langle\eta^0,y\rangle\geq\lambda_1\langle\eta^1,y\rangle-\sum_{j=2}^n|\lambda_j|\langle\eta^j,y\rangle=1-\frac{n-1}{n}>0$$

となり，従って $y\in E_{\eta^0}\cap E_{\eta^1}\cap\cdots\cap E_{\eta^n}$ となって a)に反する.

d)　(7.1.12)の $\subset$ の向きの包含関係は明らかである. 両辺とも開凸錐であるから，逆向きの包含関係を言うには左辺の集合を含むような半空間 $\langle\eta,y\rangle\geq0$ は必ず右辺の集合をも含むことを示せば良い. このような η は即ち双対錐 $(\Gamma_j+\Gamma_k)^\circ$ の元であるが，ここで第3章(3.1.8)の関係式を用いれば,

$$(\Gamma_j+\Gamma_k)^\circ=\Gamma_j{}^\circ\cap\Gamma_k{}^\circ$$

となる. 故に c)で調べたことから，これは二つの錐の共通側面

$$\{\sum_{l\neq j,k}\lambda_l\eta^l;\lambda_l\geq0\}$$

に一致する. この形の η に対して，半空間 $\langle\eta,y\rangle\geq0$ が(7.1.12)の右辺の集合を含むことは明らかである. 証了.

さて，いよいよ本節の目的である，本書前半で与えた直観的な超函数の定義と，上に与えた相対コホモロジーによる超函数の定義との一致の証明にとりかかろう. 話を明確にするため当座の記号として，本書前半で与えた正則函数の形式的境界値としての“直観的超函数”のなす前層 $\mathcal{B}$ に対し，上で定義された相対コホモロジーによる超函数の層 $\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O})$ を $\check{\mathcal{B}}$ で表わして区別することにしよう. さて，例 7.1.3 a)によれば，$\check{\mathcal{B}}(\Omega)$ の元は，Ω の Stein 近傍を U とするとき $F(z)\in\mathcal{O}(U\#\Omega)$ で代表されるが，そこでも注意したように，これは，$F_\sigma(z)\in\mathcal{O}((\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma)\cap U)$ という 2^n 個の独立な正則函数の組から成っている. そこでこれに

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma F_{\sigma}(x+i\Gamma_{\sigma}0) \tag{7.1.13}$$

という直観的超函数を対応させよう．商空間(7.1.5)の分母の元 $G_j(z) \in \mathcal{O}(U\sharp_j\Omega)$ は，$\operatorname{Im} z_j=0$ という境界面を通して正則につながっており，従って(7.1.13)のような符号付きの和をとれば直観的超函数の意味で二項ずつ互いに打ち消し合うことは明らかである．故に，$\check{\mathcal{B}}(\Omega)\to\mathcal{B}(\Omega)$ という写像が確定する．この写像が $\boldsymbol{C}$-線型であること，及び各前層の制限写像と両立することは各々の定義から明らかであるから，$\check{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$ という前層の準同型が得られたことになる．同様に，例 7.1.3 b) の方の表現を用いても準同型 $\check{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$ を定義することができる．今度は(7.1.7)に

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j F_j(x+i\Gamma_j 0) \tag{7.1.14}$$

という直観的超函数を対応させればよい．この二つが同一の準同型を定義することは後で示されるであろう．

次にこの逆対応を与えよう．直観的超函数 $F(x+i\Gamma 0)\in\mathcal{B}(\Omega)$ をとる．これに対しベクトル $\eta^0,\eta^1,\cdots,\eta^n\in\boldsymbol{R}^n$ を

$$E_{\eta^1}\cap\cdots\cap E_{\eta^n}\subset\Gamma \tag{7.1.15}$$

かつ(7.1.6)が成り立つように選ぶ．また簡単のため $\eta^1,\cdots,\eta^n$ の作る n-単体は $\boldsymbol{R}^n$ の向きに同調しているとしよう．（そうでなければ下の(7.1.16)式に負の符号をつければ良い．）Ω の複素近傍 U を十分小さく選び，$F(z)$ が無限小楔 $(\Omega+iE_{\eta^1}\cap\cdots\cap E_{\eta^n})\cap U$ で正則となるようにする．（これは(7.1.15)の左辺が Γ の固有部分錐となるように(すなわち記号 $\subset$ の代わりに $\Subset$ を)とっておけば常に可能である．しかし $F(z)$ の定義域である無限小楔 $\Omega+i\Gamma 0$ の形によってはそこまで必要ないこともあるので一般的にしておいた．）そこで

$$U_j=(\Omega+iE_{\eta^j})\cap U,\qquad j=0,1,\cdots,n$$

とおく．このとき $F(z)$ は，開集合の対 $(U, U\setminus\Omega)$ の相対被覆 $\mathfrak{U}=\{U, U_0,\cdots, U_n\}$，$\mathfrak{U}'=\{U_0,\cdots,U_n\}$ に対して

$$F(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n\in C^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}',\mathcal{O}) \tag{7.1.16}$$

という n 次余輪体を定め，従って $H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}',\mathcal{O})$ の元を定める．これから定理 5.5.6 により $H^n{}_\Omega(U,\mathcal{O})$ の元が誘導される．（以上の議論には U が Stein である必要は無いことに注意せよ．）

補題 7.1.5(森本) (7.1.16)が定める $H^n{}_\Omega(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O})$ の元は $\eta^0, \eta^1, \cdots, \eta^n$ の選び方によらない.

証明 $(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}')$ を上の $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ と同様の性質を持つ相対被覆とする. この二つの被覆の間を次の三種類の微小な変形 $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') \to (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$ (またはその逆向きの変形)の有限個の組み合わせで繋ぐことができる:

a) 複素近傍 U を V に縮める操作: $\mathfrak{V} = \{U \cap V, U_0 \cap V, \cdots, U_n \cap V\}$

b) η^0 をそれに十分近い $\eta^{0\prime}$ で取り替える操作: $\mathfrak{V} = \{U, U_0', U_1, \cdots, U_n\}$

c) η^1 をそれに十分近い $\eta^{1\prime}$ で取り替える操作: $\mathfrak{V} = \{U, U_0, U_1', U_2, \cdots, U_n\}$

ここで $\mathfrak{V}'$ の方は常に $\mathfrak{V}$ から第一成分 U を省いたものになっているので書くのを省略した. 各相対被覆 $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$ も同じ条件(7.1.15)及び(7.1.6)の下で作られていることは言うまでもない. これらの変形の各々について, $F(z)$ からそれぞれ $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ および $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$ に関して(7.1.16)で定まる $H^n{}_\Omega(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O})$ の元が一致することを示せば良い.

まず a)の場合は

$$F(z)U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n \longmapsto F(z)(U \cap V) \wedge (U_1 \cap V) \wedge \cdots \wedge (U_n \cap V)$$

という対応が, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^n(\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}', \mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n{}_\Omega(U, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^n{}_\Omega(U \cap V, \mathcal{O}) \end{array}$$

を通じて複素近傍の自然な制限写像に対応していることから明らかである(切除定理による). 次に b)の場合は, $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} = \{U, U_0, U_0', U_1, \cdots, U_n\}$ という新しい被覆を中間に考えれば, 自然な埋め込み写像により $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$, $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$ はいずれも $(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}), (\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V})')$ の細分となる.

$$(7.1.17) \quad \begin{array}{ccccc} & \nearrow & H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{O}) & \searrow & \\ H^n(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} \bmod (\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V})', \mathcal{O}) & & \longrightarrow & & H^n{}_\Omega(U, \mathcal{O}) \\ & \searrow & H^n(\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}', \mathcal{O}) & \nearrow & \end{array}$$

という可換図式において, 余輪体 $F(z)U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n$ がそれぞれの被覆 $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$, $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$ に関して定めるコホモロジー類は, 同じ表記を持つ $H^n(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} \bmod (\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V})', \mathcal{O})$ の元の細分写像による像となっているから, $H^n{}_\Omega(U, \mathcal{O})$ へ行けば一致することは明らかである.

最後に c)の場合を考えよう. 上と同様に $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} = \{U, U_0, U_1, U_1', U_2, \cdots,$

$U_n\}$ という被覆を中間に考える．今度は可換図式(7.1.17)において，$F(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n$ および $F(z)U\wedge U_1'\wedge U_2\wedge\cdots\wedge U_n$ が定める $H^n(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathcal{O})$，$H^n(\mathfrak{V}\bmod\mathfrak{V}',\mathcal{O})$ の元は，次のような余鎖が定める $H^n(\mathfrak{U}\cup\mathfrak{V}\bmod(\mathfrak{U}\cup\mathfrak{V})',\mathcal{O})$ の元の，それぞれの細分写像による像となる：

(7.1.18)　$F(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n+F(z)U\wedge U_1'\wedge U_2\wedge\cdots\wedge U_n$

もっとも今度は $U_1\cap U_1'\cap U_2\cap\cdots\cap U_n=\phi$ とは限らないので，これが余輪体になることは一応確かめておく必要があるが，それは $U_1'\wedge U_1+U_1\wedge U_1'=0$ より直ちにわかる．故に再び $H^n{}_\Omega(U,\mathcal{O})$ への像は一致する．証了．

以上により $\mathcal{B}(\Omega)\to\check{\mathcal{B}}(\Omega)$ という写像が確定した．

系 7.1.6　上に定義された写像 $\mathcal{B}(\Omega)\to\check{\mathcal{B}}(\Omega)$ は $\boldsymbol{C}$-線型空間の準層の準同型 $\mathcal{B}\to\check{\mathcal{B}}$ を誘導する．

実際，この写像が制限写像と両立することは上の補題の証明の a) の場合と同様にして示される．また

$$\lambda_1F_1(x+i\Gamma_10)+\lambda_2F_2(x+i\Gamma_20)=(\lambda_1F_1+\lambda_2F_2)(x+i\Gamma_1\cap\Gamma_20)$$

という直観的超函数に対する $\boldsymbol{C}$-線型演算の定義は，両辺を特に $E_{\eta^1}\cap\cdots\cap E_{\eta^n}\subset\Gamma_1\cap\Gamma_2$ なる被覆を用いてコホモロジーに翻訳すれば，正しく余輪体の $\boldsymbol{C}$-線型演算に対応していることがわかる．

定理 7.1.7　直観的超函数の前層 $\mathcal{B}$ は，n 次導来層 $\mathcal{H}^n{}_{R^n}(\mathcal{O})$ と前層として同型になり，従って実は層となる．

証明　上に定義した前層の準同型が同型となることを言えばよい．まず直観的超函数 $F(x+i\Gamma0)\in\mathcal{B}(\Omega)$ をとろう．これに対し，Stein 被覆 $U,U_0,U_1,\cdots,U_n$ を上のように選べば，系 7.1.6 の準同型によりこれに対応する $\check{\mathcal{B}}(\Omega)$ の元は $F(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n$ で代表される．次に例 7.1.3 b) の表現に関連して先に述べた準同型 $\check{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$ によりこのコホモロジー類に対応する直観的超函数を作れば，$F(x+i\Gamma_00)$ となる．ここに $\Gamma_0=E_{\eta^1}\cap\cdots\cap E_{\eta^n}\subset\Gamma$ であり，従って直観的超函数の意味で明らかに $F(x+i\Gamma0)=F(x+i\Gamma_00)$ が成り立っている．故に準同型の結合 $\mathcal{B}\to\check{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$ が恒等写像となることがわかった．

$F(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n\in\check{\mathcal{B}}(\Omega)$ から出発しても結合 $\check{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}\to\check{\mathcal{B}}$ が恒等写像となることが全く同様にして確かめられる．証了．

系 7.1.8　例 7.1.3 a) の表現から(7.1.13)により導かれる準同型 $\check{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$ と例

7.1.3 b)の表現から(7.1.14)により導かれる準同型 $\check{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$ とは一致する.

証明 Stein 近傍 $U\supset\Omega$ を選び $U_j=U\cap\{\mathrm{Im}\,z_j\neq0\}$, $j=1,\cdots,n$, $\mathfrak{U}=\{U, U_1,\cdots,U_n\}$, $\mathfrak{U}'=\{U_1,\cdots,U_n\}$ とおく. また, $\eta^1,\cdots,\eta^n$ をそれぞれの座標軸方向の単位ベクトルとし,

$$\eta^0=-(\eta^1+\cdots+\eta^n)$$

を選んで $V_j=(\Omega+iE_{\eta^j})\cap U$, $j=0,1,\cdots,n$, $\mathfrak{V}=\{U,V_0,V_1,\cdots,V_n\}$, $\mathfrak{V}'=\{V_0, V_1,\cdots,V_n\}$ とおく. 簡単のため第一象限を Γ で表わそう. さて, 直観的超函数 $F(x+i\Gamma 0)$ は例 7.1.3 a)の被覆コホモロジー表現において

$$F_\sigma(z)=\begin{cases}F(z), & \sigma=(1,\cdots,1)\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

という成分を持つ $\mathcal{O}(U\#\Omega)$ の元 $G(z)=\{F_\sigma(z)\}$ を係数とする n 次余輪体 $G(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n$ が代表するコホモロジー類から来る. 一方, それは上の定理で同型 $\check{\mathcal{B}}\simeq\mathcal{B}$ の示された例 7.1.3 b)の方の表現において, $F(z)U\wedge V_1\wedge\cdots\wedge V_n$ という n 次余輪体が代表するコホモロジー類からも来ている. 故にこれらの余輪体が $H^n{}_\Omega(U,\mathcal{O})$ の同一の元を定めていることがわかれば証明が終わる. これは $\mathfrak{W}=\{U,U_1,\cdots,U_n,V_0\}$, $\mathfrak{W}'=\{U_1,\cdots,U_n,V_0\}$ という中間的な被覆を導入することにより示される. すなわち, $(\mathfrak{W},\mathfrak{W}')$ も $(U, U\setminus\Omega)$ の相対 Stein 被覆であり, $\mathfrak{U}\succ\mathfrak{W}$ は自明な埋め込みで, また $\mathfrak{V}\succ\mathfrak{W}$ は $V_j\subset U_j$, $j=1,\cdots,n$ という対応でそれぞれ $\mathfrak{W}$ の細分となっている, $(\mathfrak{W},\mathfrak{W}')$ に関する n 次元余鎖

(7.1.19) $$G(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n$$

は $G(z)$ が V_0 上で消えていることから余輪体となるが, これらの細分写像でそれぞれ $G(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n$ および $F(z)U\wedge V_1\wedge\cdots\wedge V_n$ に写る. すなわち, これらはいずれも(7.1.19)が定める $H^n{}_\Omega(U,\mathcal{O})$ の同一の元に対応する. 証了.

以上で超函数のコホモロジー的意味付けが完了したわけである. ところで, 一般に $\eta^1,\cdots,\eta^N\in\boldsymbol{R}^n$ を, $E_{\eta^1}\cup\cdots\cup E_{\eta^N}=\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ を満たす任意個のベクトルの組とし, Stein 近傍 $U\supset\Omega$ を選んで $U_j=(\Omega+iE_{\eta^j})\cap U$ とおけば, $\mathfrak{U}=\{U, U_1,\cdots,U_N\}$, $\mathfrak{U}'=\{U_1,\cdots,U_N\}$ はやはり $(U,U\setminus\Omega)$ の相対 Stein 被覆となる. $H^n(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathcal{O})$ の元は

(7.1.20) $$\sum_{j_1,\cdots,j_n}F_{j_1\cdots j_n}(z)U\wedge U_{j_1}\wedge\cdots\wedge U_{j_n}$$

の形の n 次余輪体で表わされるけれども, 今度は(7.1.20)の係数 $F_{j_1\cdots j_n}(z)$ は勝

手に与えることはできず，余輪体の条件を満たさなければならない．このコホモロジー類に対応する超函数は

$$(7.1.21)\qquad \sum_{j_1,\cdots,j_n} \operatorname{sgn}(\eta^{j_1},\cdots,\eta^{j_n})F_{j_1\cdots j_n}(x+iE_{\eta^{j_1}}\cap\cdots\cap E_{\eta^{j_n}}0)$$

となる．ここに

$$\operatorname{sgn}(\eta^{j_1},\cdots,\eta^{j_n})=\begin{cases}+1 & \eta^{j_1},\cdots,\eta^{j_n}\text{ の作る } n \text{ 単体の向きが正のとき}\\ -1 & \quad〃\qquad〃\qquad\text{負のとき}\\ \ \ 0 & \eta^{j_1},\cdots,\eta^{j_n}\text{ が一次従属のとき}\end{cases}$$

である．$\eta^1,\cdots,\eta^N$ のうちの任意の $n+1$ 個 $\eta^{j_1},\cdots,\eta^{j_{n+1}}$ について $E_{\eta^{j_1}}\cap\cdots\cap E_{\eta^{j_{n+1}}}=\phi$ という条件が成り立つときは，余輪体の条件は無くなり，係数 $F_{j_1\cdots j_n}(z)$ は勝手に与えることができる．例 7.1.3 b)はこのような場合の最も簡単な例であるが，例 7.1.3 a)の方についても，$\eta^j{}_\pm=(0,\cdots,0,\pm1,0,\cdots,0)$, $j=1,\cdots,n$ という 2^n 個のベクトルを用意すれば，対応(7.1.13)はこのような場合の例となる．この見方は $U_j=U\cap\{\operatorname{Im} z_j\neq0\}$ を $U_j{}^\pm=U\cap\{\pm\operatorname{Im} z_j>0\}$ という二つの成分に分け，$U_j=U_j{}^+-U_j{}^-$ を形式的に代入したものとなっている．

参考 7.1　上述の議論を通じて，因子 $U\wedge$ の存在が目障りに思われた読者が多いであろう．実際，実質的計算においてはこの因子は余鎖の次数を一つ上げている以外に何の意味も持っていないからである．実は理論的にもこの因子を一斉に取り去ってしまって一向に構わない．というのは

$$F(z)U_1\wedge\cdots\wedge U\longmapsto F(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n$$

という対応がまさに長完全列

$$\cdots\to H^{n-1}(U,\mathcal{O})\to H^{n-1}(U\setminus\Omega,\mathcal{O})\xrightarrow{\delta} H_\Omega{}^n(U,\mathcal{O})\to H^n(U,\mathcal{O})\to\cdots$$

を成す写像 δ の被覆コホモロジーによる表現となっており，しかも U が Stein のときは両端の二項が消えるため δ が同型となるからである．

参考 7.2　同型 $\mathcal{B}\simeq\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O})$ を定義するのに $\boldsymbol{R}^n$ の向き付けが現われたのを奇妙に思われた読者もあろう．函数の概念は空間の向き付けには依存しないものであるから，その拡張である超函数の概念も向き付けに依存するべきではない．実際，前半で与えられた直観的超函数については $F(x+i\Gamma0)$ という形式的記号は Γ の向きとは無関係であった．これに対し相対コホモロジーの方は自然に空間の向き付けとの関係が生じる．（詳しく言うと，相対コホモロジー $H^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})$ には実解析的部分多様体 $\boldsymbol{R}^n\subset\boldsymbol{C}^n$ の余法線束の繊維の向きが混入するのであるが，複素多様体は実解析多様体とみなされたとき標準的な向きを持っているのでこのことは基底空間 $\boldsymbol{R}^n$ の向きを考えるのと同値にな

る.）実際, $\boldsymbol{C}^n$ 上の正則函数の層 $\mathcal{O}$ は定数層 $\boldsymbol{C}$ を部分層として含み,

$$\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}) \hookrightarrow \mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}),\quad H^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}^n, \boldsymbol{C}) \hookrightarrow H^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}) \tag{7.1.22}$$

となっている.（写像(7.1.22)の単射性は自明ではない. 次節に述べる $\mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{B}$ の埋め込みの結果又は下の問 7.1.1 参照.）左辺の元は今まで計算して来た余輪体において係数 $F(z)$ 等がすべて局所的に定数のものに対応している. 例 7.1.3 a)の被覆は U が凸のときは定数層 $\boldsymbol{C}$ についても Leray 被覆となり, 従って

$$H^n{}_{\boldsymbol{R}^n\cap U}(U, \boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{C} \tag{7.1.23}$$

となる(問 6.5.1 参照). この同型は例えば

$$1_\sigma = \begin{cases} 1 & \sigma=(1,\cdots,1)\text{のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

なる局所定数 $\mathbf{1}=\{1_\sigma\}$ を用い,

$$\mathbf{1}U \wedge U_1 \wedge\cdots\wedge U_n \longleftrightarrow 1 \tag{7.1.24}$$

で与えられるが, 余輪体の方は被覆の順番を変えれば符号を変えるので, この同型は向き付けに依存する. 或はむしろ, この同型を一つ固定することが $\boldsymbol{R}^n$ に向きを与えることと同値になっている.

実解析多様体 M 上の超函数を扱うとき, 問題はもう少し複雑となる. M の複素近傍(参考 6.4 を見よ)を X とするとき, $M\subset X$ は局所的には $\boldsymbol{R}^n\subset\boldsymbol{C}^n$ と同じ関係だから, 正則函数の層 $\mathcal{O}_X$ に関して M は純 n 余次元的となり, 導来層 $\mathcal{H}^n{}_M(\mathcal{O}_X)$ が考えられる. 同様に $\mathcal{H}^n{}_M(\boldsymbol{C}_X)\subset\mathcal{H}^n{}_M(\mathcal{O}_X)$ となるが, M が向き付けできないときには, この部分層 $\mathcal{H}^n{}_M(\boldsymbol{C}_X)$ には 0 以外の大域的切断が存在しなくなる. 従って $\mathcal{H}^n{}_M(\mathcal{O}_X)$ はそのままでは定数 1 さえ大域的切断として許さず, M 上の超函数の層とみなすことはできない. $\mathcal{H}^n{}_M(\boldsymbol{C}_X)$ は上に見たように M の向き付けを制禦する層なので, しばしば M の**向き付け層**と呼ばれ ω_M または ω で表わされる. 相対コホモロジー $\mathcal{H}^n{}_M(\mathcal{O}_X)$ の元を超函数と見做すには向きを忘れれば良い. この“向きを忘れる”という操作は代数的には ω_M をテンソルすることで表わされる. 実際, ω_M 同士のテンソル積は向きによる符号の食い違いが打ち消し合って, M 上の定数層 $\boldsymbol{C}_M$ と標準的に同型になる. 故に M 上の超函数の層の正確な定義として

$$\mathcal{B}_M = \mathcal{H}^n{}_M(\mathcal{O}_X)\otimes_{\boldsymbol{C}_M}\omega_M \tag{7.1.25}$$

が得られた.

問 7.1.1 写像(7.1.22)の単射性を正則 de Rham 列 $0\to\boldsymbol{C}\to\mathcal{O}^{(0)}\xrightarrow{d^0}\mathcal{O}^{(1)}\xrightarrow{d^1}\cdots\xrightarrow{d^{n-1}}\mathcal{O}^{(n)}\to 0$ を用いて確かめよ.

以上で超函数の $\mathcal{O}$-係数コホモロジーとしての解釈が確立した. これに伴い前半において直観的立場で導入した超函数に対する種々の局所的演算（即ち層

$\mathcal{B}$ の自己準同型)がコホモロジーの立場からどう解釈されるかを調べておこう.典型的な例として微分作用素を取る.

命題 7.1.9　$P(z, D_z)$ を複素開集合 U で定義された正則函数を係数に持つ線型偏微分作用素とする．このとき，任意の実開集合 $\Omega\subset U$ に対し上巻第3章§2で定義した実解析係数線型偏微分作用素 $P(x, D_x)$ の $\mathcal{B}(\Omega)$ への作用は，U 上の層準同型 $h=P(z, D_z):\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ から第5章§3で述べた仕方で自然に定まる写像 $h_*{}^n: H^n{}_\Omega(U,\mathcal{O})\to H^n{}_\Omega(U,\mathcal{O})$ と一致する.

実際，補題 5.5.13 で与えた $h_*{}^n$ の被覆コホモロジーによる表現をこの節の議論に当てはめてみれば，正に超函数の定義函数に $h=P(z, D_z)$ を作用させることになっている.

問 7.1.2　$P_j(z, D_z)$, $0\leq j\leq N$, は実開集合 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ の近傍で定義された正則な係数を持つ線型偏微分方程式系の列とし，そこにおいて $0\to\mathcal{O}_{P_0}\to\mathcal{O}^{l_0}\xrightarrow{P_0}\mathcal{O}^{l_1}\xrightarrow{P_1}\cdots\to\mathcal{O}^{l_N}\to 0$ は完全とする.（$\mathcal{O}_{P_0}$ は $P_0u=0$ の正則函数解のなす層を表わす.）このとき Ω 上に $0\to\mathcal{B}_{P_0}\to\mathcal{B}^{l_0}\xrightarrow{P_0}\mathcal{B}^{l_1}\xrightarrow{P_1}\cdots\to\mathcal{B}^{l_N}\to 0$ という自然な複体が誘導される．ここに $P_j=P_j(x, D_x)$ であり，$\mathcal{B}_{P_0}$ は $P_0u=0$ の超函数解のなす層である.（注 31 に続く.）

§2　実解析函数の埋め込み

この節では自然な写像 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を定義し，その単射性を証明した後，商層 $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の性質を調べる．埋め込み $\mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{B}$ の議論には大きく分けて代数的方法と解析的方法とがあるが，ここでは解析的方法を扱い，後で代数的方法の一つを参考として紹介しておく.

解析的方法とは，$\mathcal{A}$ をまず $L_{1,loc}$ などの通常の函数の層に埋め込み，次いで後者を積分論を用いて超函数の層に埋め込むものである．この議論は既に上巻第3章§5で一通り済んでいるが，それは層 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ の諸性質を漫然と仮定した上での議論であったので，理論的基礎付けとする際には必要なところだけを注意して読み直す必要がある．故にここでは読者の便宜を考え，超函数の積分論の別法としてそれ自身も興味深いと思われるコホモロジー的積分論の紹介を兼ねつつ，同じ議論の要点を繰返しておこう．そのためまず，特殊な台を持つ超函数の構造を調べることから始める.

補題 7.2.1 $K\subset \boldsymbol{R}^n$ を閉集合とするとき，台が K に含まれるような超函数の全体 $\Gamma_K(\boldsymbol{R}^n, \mathscr{B})$ は，(向き付けの分を除き)

(7.2.1) $$\Gamma_K(\boldsymbol{R}^n, \mathscr{B}) \cong H^n{}_K(\boldsymbol{C}^n, \mathscr{O})$$

というコホモロジー群で表わされる．特に $K=K_1\times\cdots\times K_n$ が柱状集合のときは，$U=U_1\times\cdots\times U_n$ を K の任意の柱状近傍とするとき，

(7.2.2) $$\Gamma_K(\boldsymbol{R}^n, \mathscr{B}) \cong \mathscr{O}(U\sharp K)/\sum_{j=1}^{n}\mathscr{O}(U\sharp_j K)$$

と表現される．ここに $U\sharp K, U\sharp_j K$ はそれぞれ(6.5.9)及び(6.5.10)で定義される開集合である．

これは，$\mathscr{B}=\mathscr{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathscr{O})$ が純 n 余次元の成分であることと定理 5.4.4 とから従う：

$$\Gamma_K(\boldsymbol{R}^n, \mathscr{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathscr{O})) = H^n{}_K(\boldsymbol{C}^n, \mathscr{O}) = H^n{}_K(U, \mathscr{O})$$

後半の同型は(6.5.11)式に他ならない．なお，K がコンパクトのときには，空間 $\Gamma_K(\boldsymbol{R}^n, \mathscr{B})$ を $\mathscr{B}[K]$ で表わしたことを思い出しておこう．以下主に使うのはこの場合である．

補題 7.2.2 a) 閉集合 $F\subset \boldsymbol{R}^n$ は有限個の柱状閉集合 F_j，$j=1, \cdots, N$ の和集合になっているとする．このとき，台が F に含まれる超函数 $f(x)$ は，台が F_j に含まれる超函数 $f_j(x)$，$j=1, \cdots, N$ を適当にとるとき，

$$f(x) = f_1(x)+\cdots+f_N(x)$$

と分解される．

b) 開集合 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ は有限個の開直方体(即ち一次元開区間の直積)の和集合の形をしているとする．このとき，任意の超函数 $f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$ は台が $\bar{\Omega}$ に含まれるような超函数 $\tilde{f}(x)$ に延長できる．

証明 a) F, G をこのような閉集合とするとき $H^n{}_{F\cup G}(\boldsymbol{C}^n, \mathscr{O})$ の元が $H^n{}_F(\boldsymbol{C}^n, \mathscr{O})$ の元と $H^n{}_G(\boldsymbol{C}^n, \mathscr{O})$ の元の和に分解できることを示せば十分である．Mayer-Vietoris の定理 5.3.8 b)により

$$H^n{}_F(\boldsymbol{C}^n, \mathscr{O})\oplus H^n{}_G(\boldsymbol{C}^n, \mathscr{O}) \to H^n{}_{F\cup G}(\boldsymbol{C}^n, \mathscr{O}) \to H^{n+1}{}_{F\cap G}(\boldsymbol{C}^n, \mathscr{O})$$

という完全列があるが，ここで

$$F\cap G = \bigcup_{j=1}^{N} F_j \cap \bigcup_{k=1}^{M} G_k = \bigcup_{j,k} F_j\cap G_k$$

も柱状閉集合 $F_j\cap G_k$ の和集合となるから，補題 6.5.8 b)により $H^{n+1}{}_{F\cap G}(\boldsymbol{C}^n,$

$\mathcal{O})=0$ となる．故に上述の分解が存在する．

b)　長完全列

$$H^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\to H^n{}_{\boldsymbol{R}^n\setminus\partial\Omega}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\to H^{n+1}{}_{\partial\Omega}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})$$

を考察する．今 f を $\boldsymbol{R}^n\setminus\bar{\Omega}$ においては0で自明に拡張しておけば，これは第2項，すなわち $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n\setminus\partial\Omega)$ の元とみなせる．ところで，$\partial\Omega$ は a) に述べたような形の閉集合となるので，補題6.5.8により最後の項は0である．故に，$H^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\cong\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ の元 $\tilde{f}$ で，制限写像により上のように拡張した f に写るものが存在する．これが求める延長である．証了．

上の補題から，定義5.7.1とその後の注意により超函数の層 $\mathcal{B}$ が所謂軟層，すなわち閉集合上に与えられた切断が必ず全空間まで延長できるようなものとなることがわかる．$\mathcal{B}$ は最終的には脆弱層であることが証明されるのだから，このような注意は結局は不要となるわけだが，大抵の初等演算の定義はこの軟層の性質だけで片が付き，特に本節と次節における議論で大変重宝する．

定義7.2.3　a)　超函数 f は柱状実コンパクト集合 $K=K_1\times\cdots\times K_n$ に台が含まれるようなものとし $\varphi(z)$ は整函数とする．このとき，**コホモロジー的積分** $\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\varphi(x)dx$ を次のように定義する：K の柱状近傍 $U=U_1\times\cdots\times U_n$ を選び，$H_K{}^n(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})$ の元としての f を代表する函数 $F(z)\in\mathcal{O}(U\sharp K)$ を選んで，

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\varphi(x)dx=(-1)^n\oint_{\gamma_1}\cdots\int_{\gamma_n}F(z)\varphi(z)dz_1\cdots dz_n \tag{7.2.3}$$

とおく．ここに γ_j は K_j を正の向きに一周する $U_j\setminus K_j$ 内の積分路である．

b)　超函数 f の台が上述のような柱状実コンパクト集合 $K_1,\cdots,K_N$ の和集合で覆われているときは，これに応じて $f=f_1+\cdots+f_N$ と分解した上で

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\varphi(x)dx=\sum_{j=1}^N\int_{\boldsymbol{R}^n}f_j(x)\varphi(x)dx \tag{7.2.4}$$

と定める．

積分(7.2.3)は実質的には上巻(3.5.7)で論じたものと同じである．一次元の Cauchy の積分定理により，(7.2.3)の値が表現(7.2.2)の分母の元に対しては0となること，従って積分の定義が代表元 $F(z)$ や近傍 U の選び方によらないことが直ちにわかる．このことから(7.2.4)の値も分解の仕方によらないことがわかる．実際，$K_1\cup\cdots\cup K_N$ を含む十分大きな柱状実コンパクト集合 K を

とり，柱状近傍 $U \supset K$ を選んでこれを各 K_j に共用し(7.2.4)を $\mathcal{B}[K]$ における等式と考えれば，これは正則函数に対する通常の積分の線型性を表わしたものにすぎない．このように被積分超函数を分解して考える理由は，台の評価などを精密にするためである．

補題 7.2.4 台が柱状実コンパクト集合 K に含まれるような L_1 級函数 $f(x)$ に対し

$$(7.2.5) \qquad G(z) = \frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_K \frac{f(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw \in \mathcal{O}((\boldsymbol{P}^1)^n \# K)$$

で定まる超函数 $\iota(f) \in \mathcal{B}[K]$ を対応させると，この対応 $f \mapsto \iota(f)$ は $\boldsymbol{C}$-線型となる．特に $f(x)$ の台の分割 $f=f_1+\cdots+f_N$ に応じて $\iota(f)=\iota(f_1)+\cdots+\iota(f_N)$ となり，従って

$$(7.2.6) \qquad \operatorname{supp}\iota(f) \subset \operatorname{supp} f$$

が成り立つ．

証明 対応 $f \mapsto \iota(f)$ の線型性は明らかであろう．$\operatorname{supp} f$ を柱状実コンパクト集合 $K_j, j=1,\cdots,N$ で覆い，それに応じて $f=f_1+\cdots+f_N$ と f の台を分割すれば，各 f_j に対する積分(7.2.5)に積分路変更を行うことにより $\operatorname{supp}\iota(f_j) \subset K_j$ がわかる．故に

$$\operatorname{supp}\iota(f) \subset K_1 \cup \cdots \cup K_N$$

となる．$\operatorname{supp} f$ はこの形の集合で外側からいくらでも精密に近似できるので，結局(7.2.6)が成り立つ．証了．

定理 7.2.5 $f(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ に対し，これをコンパクトな台を持つ L_1 級函数 $f_\lambda(x)$ の局所有限和

$$(7.2.7) \qquad f(x) = \sum_\lambda f_\lambda(x)$$

に分解し，各 $f_\lambda(x)$ について補題 7.2.4 で定めた $\iota(f_\lambda)$ を用いて

$$(7.2.8) \qquad \iota(f) = \sum_\lambda \iota(f_\lambda)$$

とおけば，$L_{1,loc}(\Omega) \to \mathcal{B}(\Omega)$ という写像が確定し，これは層の単射準同型 ι: $L_{1,loc} \hookrightarrow \mathcal{B}$ をひき起こす．さらに，これから誘導される埋め込み写像 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ は，第3章定理 3.1.2 で定義されたものと一致する．

証明 関係式(7.2.6)により(7.2.8)の右辺も再び局所有限和となる．$\mathcal{B}$ が層をなすことが既に示されているので，これよりある超函数 $\iota(f) \in \mathcal{B}(\Omega)$ が確

定する．$\iota(f)$ が分解(7.2.7)の選び方によらぬことは関係式(7.2.6)を用いて一変数の場合の定理1.3.10の証明と同様にして示すことができる．ι が層の準同型となることもそれからわかる．

ι が単射となることの証明も一変数の場合と大体同様だが，ここは一番大切なところなので念の為詳しく見ておこう．$L_{1,loc}$ の自明でない芽が ι により $\mathcal{B}$ の芽として0にゆかぬことを言えばよいから，台を適当に切り落とすことにより，コンパクトな台を持つ L_1 級函数 $f(x)$ について(7.2.6)と逆向きの包含関係

(7.2.9) $$\operatorname{supp}\iota(f)\supset\operatorname{supp}f$$

を示せばよいことがわかる．そこで $\varphi(x)$ を有界な台を持つ連続函数で，$\operatorname{supp}\varphi\cap\operatorname{supp}\iota(f)=\phi$ なるものとし

(7.2.10) $$\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{(\sqrt{\pi}\,\varepsilon)^n}e^{-(x/\varepsilon)^2}*\varphi(x)=\frac{1}{(\sqrt{\pi}\,\varepsilon)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{-(x-t)^2/\varepsilon^2}\varphi(t)dt$$

とおこう．ここに $x^2=x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2$ 等の略記法を用いている．一変数の場合と同様，$\varphi_\varepsilon(x)$ は整函数 $\varphi_\varepsilon(z)$ に拡張され，また $t\in\operatorname{supp}\varphi$ 且つ $z\in\boldsymbol{C}^n\setminus[\operatorname{supp}\varphi+\{|\operatorname{Im}z|^2\geq|\operatorname{Re}z|^2-\delta^2\}]$ のとき

(7.2.11) $$\operatorname{Re}[-(z-t)^2/\varepsilon^2]=-(x-t)^2/\varepsilon^2+y^2/\varepsilon^2\leq-\delta^2/\varepsilon^2$$

という評価が成り立つ．故に $\varepsilon\downarrow0$ のとき $\varphi_\varepsilon(z)$ はそこで一様に0に収束する．特に，δ を十分小さく選べば，$\operatorname{supp}\iota(f)$ のある近傍でこの収束が成り立つ．故にいま積分

(7.2.12) $$\int_{\boldsymbol{R}^n}\iota(f)\varphi_\varepsilon(x)dx$$

を定義7.2.3で与えたようなコホモロジー的意味に解釈し，$\iota(f)$ を台が十分小さな直方体に入るような成分の和に分解して，各々に対する積分を Cauchy 積分(7.2.3)で計算すれば，(7.2.12)は $\varepsilon\downarrow0$ のとき0に収束することがわかる．

さて，ε を止めたとき(7.2.12)は $\operatorname{supp}\iota(f)$，或は更に $\operatorname{supp}f$ をも含むような直方体 $K=K_1\times\cdots\times K_n$ を選び，K_j を正の向きに一周する積分路 γ_j をとって

(7.2.13) $$(-1)^n\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz_1\cdots dz_n$$

で計算することができる．ここに $G(z)$ は $f(x)$ から(7.2.5)により計算される

$\iota(f)$ の定義函数である．(7.2.13)に(7.2.5)を実際に代入し，積分順序変更と Cauchy の積分公式を用いれば，

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\int_K \frac{f(w)dw}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}\varphi_\varepsilon(z)dz_1\cdots dz_n$$
$$=\int_K f(w)dw\cdot\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{\varphi_\varepsilon(z)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dz_1\cdots dz_n$$
$$=\int_K f(w)\varphi_\varepsilon(w)dw$$

を得る．ところで $\varphi_\varepsilon(w)$ は(上巻の参考1.3で示されているように) $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $\boldsymbol{R}^n$ 上一様に $\varphi(w)$ に収束するので，この実積分は

$$\int_K f(w)\varphi(w)dw \tag{7.2.14}$$

に収束する．即ち，$\mathrm{supp}\,\varphi\cap\mathrm{supp}\,\iota(f)=\phi$ を満たす任意の $\varphi(x)$ について(7.2.14)が0に等しいことがわかった．このことから積分論で良く知られているように $\mathrm{supp}\,f\subset\mathrm{supp}\,\iota(f)$ が出て来る．(もっともここでは今までのところと違って $\mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{B}$ の埋め込みの証明の途中の話なので，解析の話をあまり仮定するのは良くないという意見があるかもしれない．それに対しては実解析函数を直方体の定義函数で切り落としたような $f(x)$ について上の主張を確かめておけば十分であることを指摘しておこう．その場合には上の主張は連続性を用いて全く初等的に示される)．

最後に，上で定めた埋め込み $L_{1,loc}\hookrightarrow\mathcal{B}$ と通常の埋め込み $\mathcal{A}\hookrightarrow L_{1,loc}$ とをつなげて得られる埋め込み $\mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{B}$ が第3章定理3.1.2で定めたものと一致することを示そう．$f(x)$ を直方体 $D=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ の近傍で実解析的な函数とし，$\chi(x)$ を D の定義函数とすれば，L_1 級函数 $\chi(x)f(x)$ をコンパクト台の超函数と見做したものは，コホモロジー類として

$$G(z)=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\chi(w)f(w)dw}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}$$
$$=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\frac{f(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw_1\cdots dw_n$$

が定める $H^n{}_D(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})$ の元に相当する．埋め込み $H^n{}_D(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})\hookrightarrow H^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O})$ によりこれを $\boldsymbol{R}^n$ 上の大域的な超函数と見たものは，$G(z)|_{\boldsymbol{C}^n\sharp\boldsymbol{R}^n}$ が定める後者の元，すなわち，

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma\, G(x+i\Gamma_{\sigma}0)$$

という直観的超函数に対応する．しかるに直方体Dの内部においては，各σについて一変数連続函数 $\varepsilon_j(x_j)$ で $\varepsilon_j(a_j)=\varepsilon_j(b_j)=0$，かつ $a_j<x_j<b_j$ において $\sigma_j\varepsilon_j(x_j)>0$ を満たすものを用意し，$f(x)$ の実解析性を考慮して各積分路$[a_j, b_j]$を

$$\gamma_j{}^{\sigma} = \{x_j+i\varepsilon_j(x_j); a_j \leq x_j \leq b_j\}$$

という複素領域内の道に変形するとき

$$G(z) = \frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_{\gamma_1{}^{\sigma}}\cdots\int_{\gamma_n{}^{\sigma}} \frac{f(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw_1\cdots dw_n$$

が $\mathrm{Int}(D)+i\Gamma_{\sigma}$ から実軸の $\mathrm{Int}(D)$ まで解析函数 $G_{\sigma}(x)$ として解析接続できることがわかる．故に各 $G(x+i\Gamma_{\sigma}0)$ は上巻の定理 3.1.2 の定義の意味でこの実解析函数 $G_{\sigma}(x)$ を超函数と見做したものに他ならない．故に

$$\iota(f)|_{\mathrm{Int}(D)} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma\, G(x+i\Gamma_{\sigma}0)|_{\mathrm{Int}(D)} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma\, G_{\sigma}(x)$$

となる．この最後の和が $\mathrm{Int}(D)$ において $f(x)$ を与えることは，一変数の場合に定理 1.3.10 の証明の最後の部分において Cauchy の積分公式を用いて行った論法を各変数について順番に適用すればわかる．証了．

問 7.2.1　$\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ の単射性の証明を問 7.1.1 を用いて行なって見よ．

以上で前半での公理であった定理 3.1.2 が，層 $\mathscr{B}$ の脆弱性を除き確認された．以下この節の残りの部分で，商層 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の性質を調べよう．特に，次節で証明する層 $\mathscr{B}$ の脆弱性よりは一足先に $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の脆弱性を証明する．従ってそれにより第4章§6に述べたミクロ函数の諸性質が確立されることになる．つまり，いささか逆説的だが，$\mathscr{C}$ の脆弱性の方が $\mathscr{B}$ の脆弱性よりも易しい(正確には，より代数的である)と言えよう．

定理 4.6.1(再掲)　商層 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ は脆弱層となり，開集合 Ω に対し

(7.2.15)　$$\mathscr{B}/\mathscr{A}(\Omega) = \mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)$$

が成り立つ．

証明　まず等式(7.2.15)から証明しよう．我々はこれを実解析多様体 M の一般の開集合 Ω に対して証明する必要があった．ただし，簡単のため M は系

6.4.3に示したような $\boldsymbol{R}^n$ への埋め込みを許すと仮定しても良いのであった．以下，$\iota(M)$ の複素近傍を $\iota(\Omega)$ のそれでおき換えることにより一般性を失うことなく $\Omega=M$ と仮定しよう．さて，M 上の層の完全列

$$0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \mathscr{B}/\mathscr{A} \to 0 \tag{7.2.16}$$

を考えよう．(層の完全性は局所的に判定でき，また直観的超函数としての写像 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ は座標に依らぬことが確認されていたので，この完全列の存在は定理7.2.5により実解析多様体の上でも確認されたことになる)．これからコホモロジーの長完全列をとれば

$$0 \to \mathscr{A}(M) \to \mathscr{B}(M) \to \mathscr{B}/\mathscr{A}(M) \to H^1(M, \mathscr{A}) \to \cdots$$

を得る．ここで系6.4.3により $H^1(M, \mathscr{A})=0$ であるから，(7.2.15)が得られる．

商層 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の脆弱性の方は，補題4.2.2で注意したように局所的に確かめておけば十分であるから，$\boldsymbol{R}^n$ の上で証明すればよい．そこで $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を任意の開集合とし，$[f(x)]\in\mathscr{B}/\mathscr{A}(\Omega)$ をとる．既に示した等式(7.2.15)により，この元は大域的に $f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$ で代表されていると考えることができる．今，Ω の Stein 近傍 U を一つ選び，例7.1.3 a)，或はむしろ公式(7.1.13)により $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma\cdot F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0),\quad F_\sigma(z)\in\mathcal{O}((\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma)\cap U)$$

と表現しよう．補題6.4.4によれば，各 $F_\sigma(z)$ に対し $G_\sigma(z)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma 0)$, $H_\sigma(x)\in\mathscr{A}(\Omega)$ で，$F_\sigma(z)=G_\sigma(z)-H_\sigma(z)$ を共通の定義域において満たすものがある．故に

$$g(x) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma\, G_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0)\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n),\quad h(x) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma\, H_\sigma(x)\in\mathscr{A}(\Omega)$$

とおけば，超函数の意味で

$$f(x) = g(x)|_\Omega - h(x)$$

となる．これは $[g(x)]\in\mathscr{B}/\mathscr{A}(\boldsymbol{R}^n)$ が $[f(x)]=[f(x)+h(x)]$ の求める延長であることを示している．証了．

参考7.3 前節から本節へかけての議論を代数的に整理してみよう．まず，$\mathcal{O}|_{\boldsymbol{C}^n\setminus\boldsymbol{R}^n}$ から $\boldsymbol{R}^n$ への境界値の層 $\tilde{\mathscr{A}}$ を考える．これは次のような対応で $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の層となる：

$$\tilde{\mathscr{A}}(\Omega+i\Gamma\cap \boldsymbol{S}^{n-1})=\varinjlim_{\Omega+i\Gamma 0}\mathscr{O}(\Omega+i\Gamma 0)$$

ここで帰納極限は $\Omega+i\Gamma 0$ 型の無限小楔を縮めてゆく向きにとられる．Γ が一定である必要は無いので，$\tilde{\mathscr{A}}$ の切断加群は $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ の任意の開集合についても同様の式で表わされ，$\tilde{\mathscr{A}}$ が確かに $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の層となることがわかる．（$\tilde{\mathscr{A}}$ のより形式的な定義は，$j:\boldsymbol{C}^n\setminus\boldsymbol{R}^n\hookrightarrow(\boldsymbol{C}^n\setminus\boldsymbol{R}^n)\sqcup\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ を自然な埋め込みとして，$\tilde{\mathscr{A}}=j_*(\mathscr{O}|_{\boldsymbol{C}^n\setminus\boldsymbol{R}^n})|_{\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}}$ となる．ここに $(\boldsymbol{C}^n\setminus\boldsymbol{R}^n)\sqcup\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ は，$\boldsymbol{C}^n$ から実軸を除いた跡に，実軸の法球束 $i\boldsymbol{SR}^n\cong\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ を自然な仕方で挿入したもので，$\boldsymbol{R}^n$ を中心とする $\boldsymbol{C}^n$ の（実の）爆裂（blowing up）と呼ばれる．）前節の議論は，$\tau:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}\to\boldsymbol{R}^n$ を自然な射影としたとき

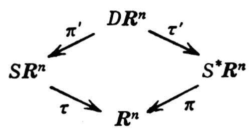
$$\tilde{\mathscr{A}}\to\tau^{-1}\mathscr{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathscr{O})\otimes\omega$$

という自然な写像が存在することを意味している．$\mathscr{A}\to\mathscr{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathscr{O})\otimes\omega$ の単射性が証明された現在，上の写像も単射なことが第3章補題3.1.3からわかる．これらの写像の単射性は定理6.5.7′に依拠した高次順像の計算で直接代数的に証明できることも知られている．それは層 $\mathscr{C}$ のコホモロジー的定義と密接に関連している．ここでは詳しいことは省略するが，歴史的重要性を考慮して事実だけを簡単に記しておこう．まず層 $\mathscr{C}$ の定義に用いた $\pi:iS^*\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ という余法球束を思い出す．（以下簡単のため因子 i を略す．）$\boldsymbol{SR}^n$ の点 (x,ξ) と $S^*\boldsymbol{R}^n$ の点 (x,η) の間には自然な内積 $\langle\xi,\eta\rangle$ が存在するが，今，

(7.2.17)　　$D\boldsymbol{R}^n=\{(x,\xi,\eta)\in \boldsymbol{SR}^n\times_{\boldsymbol{R}^n}S^*\boldsymbol{R}^n;\ \langle\xi,\eta\rangle\geq 0\}$

という集合を考えると

(7.2.18)



という自然な射影より成る可換図式が得られる．$\boldsymbol{SR}^n$ 上に層 $\mathscr{Q}=\tilde{\mathscr{A}}/\tau^{-1}\mathscr{A}$ を考えよう．これは境界値の正則性を表わすもので，層 $\mathscr{C}$ との密接な関係が想像されるが，実際この層について τ が純 $n-1$ 次元的となり，$0\to\tau^{-1}\mathscr{A}\to\tilde{\mathscr{A}}\to\mathscr{Q}\to 0$ に $R^{n-1}\tau_*$ を施せば $0\to\mathscr{A}\to\mathscr{B}\to R^{n-1}\tau_*\mathscr{Q}\to 0$ という $\boldsymbol{R}^n$ 上の完全列が得られる．層 $\mathscr{C}$ 自身を得るために $\pi'^{-1}\mathscr{Q}$ を考えると，これについて π' は純0次元的，τ' は純 $n-1$ 次元的となることがわかり，従って $\mathscr{C}=R^{n-1}\tau'_*\pi'^{-1}\mathscr{Q}$ とおけば，π はこれに関して純0次元的となり π_* により $0\to\mathscr{A}\to\mathscr{B}\to\pi_*\mathscr{C}\to 0$ という $\boldsymbol{R}^n$ 上の完全列が得られる．この層 $\mathscr{C}$ が我々の知っているものと一致することを確かめるのはまだかなり大変である．まず $\boldsymbol{SR}^n$ 上に $0\to\tilde{\mathscr{A}}\to\tau^{-1}\mathscr{B}\to\pi'_*\tau'^{-1}\mathscr{C}\to 0$ という完全列の存在を示す．次に図式(7.2.18)中の $D\boldsymbol{R}^n$ を，その定義式中の不等号 $\geq$ を $>$ に取り替えて得られる集合 $I\boldsymbol{R}^n$ でおき換えると，$\pi'^{-1}\tilde{\mathscr{A}}$ は $\tau'_!$ について純 $n-1$ 次元的となり，実際に $R^{n-1}\tau'_!\pi'^{-1}\tilde{\mathscr{A}}$ を計算してみると，定義により $(\mathscr{A}^*)^a$ に等しいことがわかる．（ここに $(\cdot)^a$ は対蹠写像による変換を表わす．）そこで上の列を $R^{n-1}\tau'_!$

π'^{-1} で $S^*\boldsymbol{R}^n$ 上に移すと，所要の完全列 $0\to\mathscr{A}^*\to\pi^{-1}\mathscr{B}\to\mathscr{C}\to 0$ が得られる．なお，ここで与えた $\mathscr{C}$ の定義を解読すると

$$\mathscr{C}_{(x,\xi)} = H^{n-1}(\{x\}\times\bar{E}_\xi\cap\boldsymbol{S}^{n-1}, \tilde{\mathscr{A}}) = \varinjlim_{U\downarrow\{x\},\Gamma\uparrow E_{-\xi}} H^{n-1}((\boldsymbol{R}^n+i(\boldsymbol{R}^n\setminus\bar{\Gamma}))\cap U, \mathscr{O}) = \varinjlim_{U\downarrow\{x\},\Gamma\uparrow E_{-\xi}} H^n{}_{(\boldsymbol{R}^n+i\bar{\Gamma})\cap U}(U,\mathscr{O}) \tag{7.2.19}$$

であることがわかる．ここに U は x の複素近傍を，また Γ は（原点を除き）半空間 $E_{-\xi}=\{\langle y,\xi\rangle<0\}$ に含まれる固有閉凸錐を動く．故に，双対爆裂 $\widetilde{\boldsymbol{C}}^n=(\boldsymbol{C}^n\setminus\boldsymbol{R}^n)\sqcup S^*\boldsymbol{R}^n$ の位相を定めるのに，点 $(x_0,\xi_0)\in S^*\boldsymbol{R}^n$ の基本近傍系として，x_0 の複素近傍 U 及び $\xi_0\in\boldsymbol{S}^{n-1}$ の近傍 Ω に対し

$$U\cap(\boldsymbol{R}^n+i\bigcup_{\xi\in\Omega}E_\xi)\sqcup\Omega$$

を採用しておけば，

$$\mathscr{C} = \mathscr{H}^n{}_{S^*R^n}(\pi^{-1}\mathscr{O}) \tag{7.2.20}$$

と導来層を用いて表わすことができる．我々は既に脆弱層 $\mathscr{C}$ の存在を知っているのでそれをもとに定理 6.5.7′ に依らず以上の主張を順に確かめて見るのも面白かろう．（なお上の議論における対蹠写像 $(\cdot)^a$ の付き方は集合 (7.2.17) の定義式中の不等号 $\geq$ の向きの選び方等によって違ってくるので，他の文献と比較の際は注意されたい．）（注 32）

§3　超函数の層の脆弱性

この節では $\mathscr{B}$ の基礎付けとして最後に残ったその脆弱性の証明を与える．次いで $\mathscr{B}$-係数微分形式に対する de Rham の定理を証明し，$\mathscr{B}$ の脆弱性の応用を述べる．さて，補題 4.2.2 により，次の命題を証明しておけば一般に実解析多様体 M 上の超函数の層についてその脆弱性がわかるのであった．

命題 7.3.1　$\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を有界な開集合とするとき，$f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$ は台が $\bar{\Omega}$ に含まれるような超函数 $\tilde{f}(x)\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n)$ に延長できる．

証明　簡単のため Ω は連結と仮定しよう．以下この証明では上巻で予告したように第 4 章 §1 で準備した位相の話を用いる．Ω を内側から取り尽すような，直方体の有限和の形の連結開集合の増大列 Ω_k, $k=1,2,\cdots$ を用意する．補題 7.2.2 によれば，各 $f(x)|_{\Omega_k}$ は台が $\overline{\Omega_k}$ に含まれるような全空間への延長 f_k を有する．列 $\{f_k\}$ を適当に修正したものの極限として求める延長 $\tilde{f}(x)$ を得たいのであるが，上巻第 4 章 §1 で注意したように超函数の位相は局所性を持た

ないので，$\{f_k\}$ を単に $\bar{\Omega}$ で収束するように調節しただけではもとの f の延長になるとは限らない．そこで次のように工夫する．$K_k=\bar{\Omega}\backslash\Omega_k$ とおこう．$\partial\Omega$ が K_k の各連結成分と交わるように Ω_k は作ってあるとしてよい．K_k はコンパクト集合の減少列となり

$$\mathrm{supp}\,(f_{k+1}-f_k)\subset\overline{\Omega_{k+1}}\setminus\Omega_k\subset K_k$$

定理 4.1.1 によれば各 $\mathcal{B}[K_k]$ は Fréchet 空間の構造を持つ．しかもそこでの位相の定義から明らかに，自然な包含写像 $\mathcal{B}[K_{k+1}]\hookrightarrow\mathcal{B}[K_k]$ は連続である．故

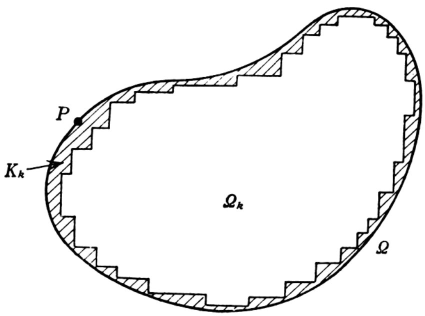


図 7.2

に各 $\mathcal{B}[K_k]$ の位相を定める可算セミノルム系 $\|\cdot\|_{k,l}$，$l=1,2,\cdots$ を，各 k について $\|f\|_{k,l}\leq\|f\|_{k,l+1}$，$l=1,2,\cdots$ のみならず

$$f\in\mathcal{B}[K_{k+1}]\text{に対し}\qquad\|f\|_{k,l}\leq\|f\|_{k+1,l},\qquad l=1,2,\cdots$$

と k についても順に強くなるようにとっておくことができる．この様なものは $\mathcal{B}[K_1]$ のセミノルム系から始めて帰納的に構成すれば得られる．さて，定理 4.1.14 によれば $\mathcal{B}[\partial\Omega]$ は各 $\mathcal{B}[K_k]$ の中で稠密だから（なお問 7.4.3 も参照），上に定めたセミノルム系について $g_k\in\mathcal{B}[\partial\Omega]$ を

$$\|f_{k+1}-f_k-g_k\|_{k,k}\leq\frac{1}{2^k}\tag{7.3.1}$$

を満たすように選ぶことができる．そこで

$$\tilde{f}(x)=f_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}-f_k-g_k)\tag{7.3.2}$$

とおこう．任意の N について

$$\tilde{f}(x)=f_N(x)+\sum_{k=N}^{\infty}(f_{k+1}-f_k-g_k)+\sum_{k=1}^{N-1}g_k\tag{7.3.3}$$

と変形され，ここの無限和は $k\geq l\geq N$ のとき

$$\|f_{k+1}-f_k-g_k\|_{N,l} \leq \|f_{k+1}-f_k-g_k\|_{k,k} \leq \frac{1}{2^k}$$

を満たす．つまり $\mathcal{B}[K_N]$の各セミノルム $\|\cdot\|_{N,l}$，$l \geq N$ について収束している．故に(7.3.3)の第2項は $\mathcal{B}[K_N]$ のある元を定める．第3項は明らかに $\mathcal{B}[\partial\Omega]$ の元であるから，これより $\tilde{f}(x) \in \mathcal{B}[\bar{\Omega}]$，かつ

$$\tilde{f}(x)|_{\Omega_N} = f_N(x)|_{\Omega_N} = f(x)|_{\Omega_N}$$

がわかった．N は任意であるから，$\tilde{f}(x)$ は求める延長となる．証了．

問 7.3.1 前節で証明した定理4.6.1によれば，層 $\mathcal{B}$ の脆弱性を示すには有界領域 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ について $f(x) \in \mathcal{A}(\Omega)$ を超函数として全空間に延長すれば十分である．これを次の方針で証明せよ：$\Omega_k \nearrow \Omega$, $f_k = \chi_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} f$ とし，f_k の“標準的定義函数”の和

$$F_\sigma(z) = \int_\Omega f(w)\, W(z-w, \overline{\Gamma_\sigma})dw = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(w)\, W(z-w, \overline{\Gamma_\sigma})dw$$

が広義一様収束するよう，各項を $\mathcal{O}((\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_\sigma 0) \cup (\boldsymbol{R}^n \setminus \partial\Omega))$ の元で近似する．

$\mathcal{B}$-係数 de Rham 理論の準備として，まず次の補題を示そう．

補題 7.3.2 a) $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ を任意の開集合とするとき，$g(x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対し偏微分方程式 $\dfrac{\partial}{\partial x_1} f(x) = g(x)$ は常に大域解 $f(x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ を持つ．

b) 偏微分方程式 $\dfrac{\partial}{\partial x_1} f(x) = 0$ の解は変数 $x' = (x_2, \cdots, x_n)$ のみに依存するような超函数の全体と一致する．

証明 a) $\mathcal{B}$ の脆弱性により $g(x)$ はいつでも $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ の元に拡張できるから，与えられた方程式を $\boldsymbol{R}^n$ 上で大域的に解いておけば十分である．そこで $g(x) \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ とし，$G(z) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n)$ を例7.1.3 a)の表現によるその定義函数とする．補題4.3.3により各凸領域 $\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_\sigma$ において $\dfrac{\partial}{\partial z_1} F_\sigma(z) = G(z)$ の解が存在するから，これらを集めて $F(z) = \{F_\sigma(z)\} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^n \# \boldsymbol{R}^n)$ を定義し，これが定める超函数を $f(x)$ とすれば明らかに $\dfrac{\partial}{\partial x_1} f(x) = g(x)$ が成り立つ．

b) 解 $f(x)$ の構造は局所的に決定すればよいから，$\Omega = \{|x_j| < a, j = 1, \cdots, n\}$ を正 n 方体とし $f(x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ と仮定してもよい．Ω の凸複素近傍として $U = \Omega + i\boldsymbol{R}^n$ を選び $F(z) \in \mathcal{O}(U \# \Omega)$ を $f(x)$ の定義函数の一つとする．等式 $\dfrac{\partial}{\partial x_1} f(x) = 0$ をこの定義函数の言葉で述べれば，$H_j(z) \in \mathcal{O}(U \#_j \Omega)$，$j = 1, \cdots, n$ が存在して

$$\frac{\partial}{\partial z_1}F(z) = \sum_{j=1}^{n} H_j(z)|_{U\sharp\Omega} \tag{7.3.4}$$

と書けることになる．各 $U\sharp_j\Omega$ も凸な連結成分より成る複素開集合だから，補題 4.3.3 より $G_j(z)\in\mathcal{O}(U\sharp_j\Omega)$ で $\frac{\partial}{\partial z_1}G_j(z)=H_j(z)$ を満たすものがとれる．故に(7.3.4)は

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(F(z)-\sum_{j=1}^{n} G_j(z)|_{U\sharp\Omega}\right)=0$$

となるが，この式は(例えば Taylor 展開を考えれば直ちにわかるように)

$$G(z)=F(z)-\sum_{j=1}^{n} G_j(z)|_{U\sharp\Omega}\in\mathcal{O}(U\sharp\Omega)$$

が $z'=(z_2,\cdots,z_n)$ のみの函数であることを示す．従って特に，$\Omega'=\{|x_j|<a,\ j=2,\cdots,n\}$ とおくとき，各 $G_\sigma(z)=G(z)|_{\Omega+i\Gamma_\sigma}$ は z_1 につき定数として$(\{|x_1|<a\}+i\boldsymbol{R})\times(\Omega'+i\Gamma_{\sigma'})$ に延長され，超函数として

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\cdot F(x+i\Gamma_\sigma 0)=\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\cdot G(x+i\Gamma_\sigma 0)\\ &= \sum_{\sigma'}\operatorname{sgn}\sigma'(G_{(1,\sigma')}(x'+i\Gamma_{\sigma'}0)-G_{(-1,\sigma')}(x'+i\Gamma_{\sigma'}0)) \end{aligned}$$

となることがわかる．これは $f(x)$ が x' のみの超函数(を x の超函数と見做したもの)であることを示している．証了．

変数の一部にのみ依存する超函数の話は，第3章の中で $\frac{1}{x_1+i0}$ など，二三の例について説明しただけなので，ここで一応きっちりした定義を与えておこう．$\pi:\boldsymbol{R}^{n+m}\to\boldsymbol{R}^n$ を自然な射影とし，$\boldsymbol{R}^n$ の変数を x で，$\boldsymbol{R}^{n+m}$ の変数を (x,t) で表わそう．n 変数 x の超函数 $\mathcal{B}_x$ を $n+m$ 変数 (x,t) の超函数 $\mathcal{B}_{x,t}$ の一部分と見做すということは，$\pi^{-1}\mathcal{B}_x\hookrightarrow\mathcal{B}_{x,t}$ という自然な埋め込みを定義することである．この埋め込みはコホモロジー的にも定義できるが，次のように直観的超函数論を用いて定義する方がずっと手取り早い：点 $(x_0,t_0)\in\boldsymbol{R}^{n+m}$ を任意にとり，この点の直積状凸近傍 $\Omega\times T$ について $\pi^{-1}\mathcal{B}_x(\Omega\times T)\hookrightarrow\mathcal{B}_{x,t}(\Omega\times T)$ という埋め込みをまず定義しよう．$\pi^{-1}\mathcal{B}_x(\Omega\times T)\cong\mathcal{B}_x(\Omega)$ だから，この元 $f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0)$$

の形に書ける．これを $\mathcal{B}_{x,t}(\Omega\times T)$ の元と見做すには，各 $F_j(z)\in\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_j 0)$ を $(\Omega\times T)+i(\Gamma_j\times\boldsymbol{R}^m)0$ で正則な z,τ の函数と見なして

$$\sum_{j=1}^{N} F_j((x,t)+i(\Gamma_j\times\boldsymbol{R}^m)0)$$

と解釈すればよい．この対応が前層の（従って層の）準同型 $\pi^{-1}\mathcal{B}_x\to\mathcal{B}_{x,t}$ を引き起こすことは明らかである．また，これが実解析函数に対する同種の関係 $\pi^{-1}\mathcal{A}_x\to\mathcal{A}_{x,t}$ や，変数 x の実解析係数線型微分作用素の作用と整合的なことも明らかである．この写像の像は明らかに変数 t を実解析パラメータとして含むので，代入 $t=t_0$ が考えられるが，これは明らかに埋め込み写像の左逆写像となる．このことから埋め込みが実際に単射なこともわかる．

$\pi^{-1}\mathcal{B}_x\subset\mathcal{B}_{x,t}$ は，ちょうど次の偏微分方程式系の解の全体と一致する：

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}=0,\cdots,\ \frac{\partial f}{\partial t_m}=0$$

これは上の補題 7.3.2 を繰返し適用すれば得られる．

定理 7.3.3 a) M を n 次元実解析多様体，$\mathcal{B}_M{}^{(k)}$ をその上の超函数係数 k 次微分形式の層とする．このとき M 上に

(7.3.5) $$0\to\boldsymbol{C}_M\to\mathcal{B}_M{}^{(0)}\xrightarrow{d^0}\mathcal{B}_M{}^{(1)}\xrightarrow{d^1}\cdots\xrightarrow{d^{n-1}}\mathcal{B}_M{}^{(n)}\to 0$$

という層の完全列が存在する（de Rham 分解）．

b) M, N はそれぞれ $n+m$ 及び n 次元の実解析多様体で，$\Phi:M\to N$ は滑らかな（即ち最大階数の）実解析的写像とする．$\mathcal{B}_\Phi{}^{(k)}=\mathcal{B}_M{}^{(k)}/\Phi^*\mathcal{B}_N{}^{(1)}\wedge\mathcal{B}_M{}^{(k-1)}$ を超函数係数の写像 Φ に関する相対 k 次微分形式の層とするとき，M 上に

(7.3.6) $$0\to\Phi^{-1}\mathcal{B}_N\to\mathcal{B}_M\xrightarrow{d\Phi^0}\mathcal{B}_\Phi{}^{(1)}\xrightarrow{d\Phi^1}\cdots\to\mathcal{B}_\Phi{}^{(m)}\to 0$$

という層の完全列が存在する（相対 de Rham 分解）．

証明 層の列の完全性は局所的に示せば良いので，局所座標を導入して Euclid 空間の場合に帰着させよう．N の局所座標を x，M 上でこれを補う m 変数を t で表わせば，(7.3.6) は

(7.3.7) $$0\to\mathcal{B}_x\to\mathcal{B}_{x,t}\xrightarrow{d_t{}^0}\mathcal{B}_{x,t}\otimes_{\mathcal{A}_t}\mathcal{A}_t{}^{(1)}\xrightarrow{d_t{}^1}\cdots\to\mathcal{B}_{x,t}\otimes_{\mathcal{A}_t}\mathcal{A}_t{}^{(m)}\to 0$$

と書き直される．ここに $\mathcal{B}_{x,t}\otimes_{\mathcal{A}_t}\mathcal{A}_t{}^{(k)}$ は

(7.3.8) $$f=\sum f_{j_1\cdots j_k}(x,t)dt_{j_1}\wedge\cdots\wedge dt_{j_k}$$

の形の（即ち，パラメータ x を含む t の）超函数係数 k 次微分形式のなす層を表わしている．（テンソル積の記号は気にしなくてよい．）(7.3.5) の方はパラメータ x が一つも無い特別な場合にすぎないので，(7.3.7) を証明すれば十分で

ある．そのため Ω を $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の凸開集合とし，以下

(7.3.9) $$0 \to \mathcal{B}_x(\Omega) \to \mathcal{B}_{x,t}(\Omega) \xrightarrow{d_t{}^0} \mathcal{B}_{x,t} \otimes_{\mathcal{A}_t} \mathcal{A}_t{}^{(1)}(\Omega) \xrightarrow{d_t{}^1} \cdots \to \mathcal{B}_{x,t} \otimes_{\mathcal{A}_t} \mathcal{A}_t{}^{(m)}(\Omega) \to 0$$

という切断加群の列の完全性を列の長さ(即ち変数 t の個数) m に関する帰納法で証明しよう．

$m=1$ のとき，(7.3.9)の完全性は補題7.3.2に他ならない．(変数 t がそこでの変数 x_1 に相当する．) そこで，長さ $m-1$ 以下のものについては，(任意個のパラメータ x に対し)(7.3.9)の完全性が証明されていると仮定し，長さ m の列(7.3.9)を考察する．(7.3.8)をこの列の第 k 項の元で，$d_t{}^k f=0$ を満たすものとせよ．これを

(7.3.10) $$f = f' + f_m \wedge dt_m$$

の形に分解して書こう．ここに f_m, f' はそれぞれ $k-1$ 次及び k 次の微分形式で dt_m を含まない．今 $t'=(t_1, \cdots, t_{m-1})$ に関する k 次外微分を $d_{t'}{}^k$ で表わせば，$d_t{}^k f=0$ より

(7.3.11) $$d_{t'}{}^k f' + \left(d_{t'}{}^{k-1} f_m + (-1)^k \frac{\partial f'}{\partial t_m}\right) \wedge dt_m = 0$$

となる．ここに記号 $\partial f'/\partial t_m$ は t_m をただのパラメータと見て微分形式 f' の各係数を微分することを意味する．これよりまず $d_{t'}{}^k f'=0$．従って帰納法の仮定より $f'=d_{t'}{}^{k-1} g'$ を満たす $(x, t_m$ をパラメータとして含む$)$ t' の $k-1$ 次微分形式 g' が存在する．故に(7.3.11)より得られるもう一つの等式にこれを代入すれば，

(7.3.12) $$0 = d_{t'}{}^{k-1} f_m + (-1)^k \frac{\partial f'}{\partial t_m} = d_{t'}{}^{k-1}\left(f_m + (-1)^k \frac{\partial g'}{\partial t_m}\right)$$

となる．従って再び帰納法の仮定により

(7.3.13) $$f_m + (-1)^k \frac{\partial g'}{\partial t_m} = d_{t'}{}^{k-2} g_m$$

を満たす元 g_m がとれる．そこで

$$g = g' + g_m \wedge dt_m$$

とおこう．このとき

$$d_t{}^{k-1} g = d_{t'}{}^{k-1} g' + (-1)^{k-1} \frac{\partial g'}{\partial t_m} \wedge dt_m + d_{t'}{}^{k-2} g_m \wedge dt_m$$

$$= f' + f_m \wedge dt_m = f$$

となり，列(7.3.9)の第 k 項における完全性が示された．

以上の証明は k が両端の値のときには少し修正を要する．まず，$k=m$ のときは，$f'=0$ となり f は無条件でよい．しかし $d_{t'}{}^{m-1}f_m=0$ が常に成り立つので上の証明はそのまま通用する．問題は $k=1$ の場合である．今度は(7.3.13)式が意味をなさなくなるので，この部分の構成法を次のように修正する：(7.3.12)式は，超函数 $f_m+(-1)^k\dfrac{\partial g'}{\partial t_m}$ が変数 t' に依存しないことを意味している．そこで

$$\frac{\partial}{\partial t_m} g_m = f_m + (-1)^k \frac{\partial g'}{\partial t_m} \tag{7.3.14}$$

を満たす $g_m \in \mathcal{B}_{x,t}(\Omega)$ で，t' に依存しないものを求めよう．このような g_m は，(7.3.14)の右辺を Ω の $\boldsymbol{R}^{n+1}{}_{x,t_m}$ への射影像 $\pi(\Omega)$ 上の変数 x, t_m の超函数と見て，補題7.3.2により求めたものを Ω に引き戻せば得られる．ここで Ω が凸であることが用いられる．実際，Ω が凸でないと，Ω 上の超函数で t' に依存しないようなものと，$\pi(\Omega)$ 上の超函数とは，射影 π で一対一に対応せず(図7.3参照)，この方程式は Ω の上で必ずしも大域的に解けなくなる．この g_m を用いて $g=g'+g_m$ とおけば，$d_t g=f$ が容易に確かめられる．証了．

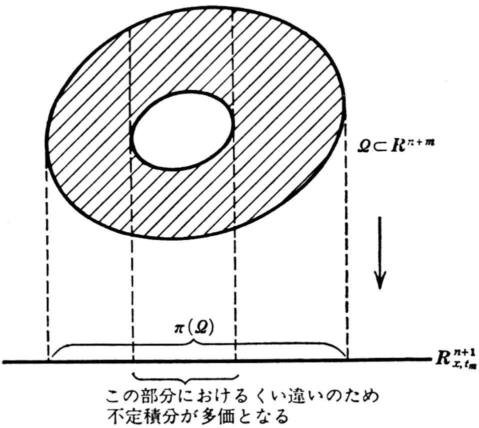


図7.3

系 7.3.4 n 次元実解析多様体 M 上の定数層 $\boldsymbol{C}_M$ の脆弱次元はちょうど n に等しい．

実際，$\mathcal{B}$ の脆弱性により，それを係数とする微分形式の層も局所的には $\mathcal{B}$ のいくつかの直和として脆弱だから，上の定理が与える de Rham 分解(7.3.5)は $\boldsymbol{C}_M$ に対する長さ n の脆弱分解となっている．故に fl. dim $\boldsymbol{C}_M \leq n$．逆に，M の上に一点 P をとり，$H^n{}_P(M, \boldsymbol{C}_M)$ を計算してみよう．これが 0 と異なることがわかれば定理 5.4.1 により fl. dim $\boldsymbol{C}_M \geq n$ となる．切除定理により P の近傍は何でもよいから $H^n{}_P(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{C})$ を計算すれば十分である．また P を $\boldsymbol{R}^n$ の原点と仮定しても一般性を失わない．これを脆弱分解(7.3.5)により計算しよう．外微分を局所座標で書いてみれば

$$H^n{}_P(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{C}) \cong \Gamma_P(\boldsymbol{R}^n, \mathcal{B}^{(n)})/d^{n-1}\Gamma_P(\boldsymbol{R}^n, \mathcal{B}^{(n-1)})$$
$$\cong \mathcal{B}[P] \Big/ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{B}[P] + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathcal{B}[P]\right)$$

となる．ところで台が一点に含まれる超函数の構造定理(系 4.1.6)によれば，$f(x) \in \mathcal{B}[P]$ は

$$f(x) = \sum_{\alpha_j \geq 0} b_\alpha D^\alpha \delta(x) = b_0 \delta(x) + \sum_{j=1}^n D_j f_j(x), \qquad f_j(x) \in \mathcal{B}[P],$$

と表わされるから，この右辺の係数 $b_0 \in \boldsymbol{C}$ を対応させることにより，上の商空間は結局 $\boldsymbol{C}$ と同型なことがわかる．

de Rham 分解と被覆コホモロジーとを用いると Euclid 空間内の種々の部分集合について $\boldsymbol{C}$-係数コホモロジー群を計算することができる．このコホモロジー群は位相幾何学で三角形分割を用いて定義したものと一致することを注意しておこう．このことは問 5.6.3 をコホモロジー公理論にあてはめれば直ちにわかるが，ここでは，組合わせ多様体に対してそれを直接的に説明しておこう．まず定理 7.3.3 の証明中に示した(7.3.5)の大域的完全性により凸開集合 Ω に対し $H^k(\Omega, \boldsymbol{C})=0\,(k\geq 1)$，従って命題 5.6.6 により凸閉集合 D についても $H^k(D, \boldsymbol{C})=0\,(k\geq 1)$ となる．集合の位相同型は定数層 $\boldsymbol{C}$ の同型をもたらすから，このことは凸閉集合と位相同型な任意の D についても成り立つ．（ここまでは問 6.1.1 からも直接導ける．）そこで今組合せ多様体 M をとり，その三角形分割を一回重心細分してもとの頂点のまわりに星状閉近傍を作ると，その全体は M の層 $\boldsymbol{C}$ に関する閉 Leray 被覆となる．故に第5章§7で注意したように $H^k(M, \boldsymbol{C})$ をこの被覆のコホモロジーとして計算できるが，その計算はもとの

三角形分割に関する位相幾何学的コホモロジー群のそれと全く同型になる.

問 7.3.2　任意の開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ に対し $H^n(\Omega, \boldsymbol{C})=0$ となることを de Rham 分解を用いて証明せよ.

問 7.3.3　$n-1$ 次元球面 S^{n-1} に対し $H^k(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})$ を計算せよ.

§4　正則パラメータを持つ超函数のコホモロジー的定義

正則パラメータを持つ超函数については，既に，第4章§3において，パラメータが一個の場合に初等的取扱いをしたが，ここで一般的定義を与え，かつ以前に仮定したいくつかの定理の証明を与えよう．本節を以て本書の前半で仮定されたすべての定理の証明が完結する.

定義 7.4.1　$\mathcal{O}=\mathcal{O}_{z,\tau}$ を $\boldsymbol{C}^{n+m}$ 上の正則函数の層とする．m 個の正則パラメータを含む x の超函数の層 $\mathcal{BO}=\mathcal{B}_n\mathcal{O}_m$ を

$$\mathcal{BO} = \mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{C}^m}(\boldsymbol{C}^{n+m}, \mathcal{O})$$

で定義する．これは普通 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{C}^m$ 上の層とみなされる.

この定義も正確には向き付けを考慮して $\otimes\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C})$ をつけておく必要があるが，超函数の場合(参考 7.2)と同様なので説明は省略する．系 7.1.2，補題 7.2.1 と同様，この層の大域的切断は次のようにコホモロジー群で書ける.

系 7.4.2　a)　任意の開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n, T\subset\boldsymbol{C}^m$ に対し，$U\supset\Omega$ を複素近傍とすれば

$$\mathcal{BO}(\Omega\times T) = H_{\Omega\times T}{}^n(U\times T, \mathcal{O}) \tag{7.4.1}$$

b)　$K\subset\boldsymbol{R}^n$ を閉集合とすれば，$U\supset K$ を任意の複素近傍として

$$\Gamma_{K\times T}(\boldsymbol{R}^n\times T, \mathcal{BO}) = H_{K\times T}{}^n(U\times T, \mathcal{O}) \tag{7.4.2}$$

c)　更に，$T\subset\boldsymbol{C}^m$ が Stein 開集合のときには，U も Stein 近傍にとれば，(7.4.1)は

$$\mathcal{BO}(\Omega\times T) \cong \mathcal{O}((U\sharp\Omega)\times T)/\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}((U\sharp_j\Omega)\times T) \tag{7.4.3}$$

となる．また更に，K が柱状のときは，U も柱状にとれば，(7.4.2)は

$$\Gamma_{K\times T}(\boldsymbol{R}^n\times T, \mathcal{BO}) \cong \mathcal{O}((U\sharp K)\times T)/\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}((U\sharp_j K)\times T) \tag{7.4.4}$$

となる.

第4章§3と同様，K がコンパクトのときには，$\Gamma_{K\times T}(\boldsymbol{R}^n\times T, \mathcal{BO})$ を，以下 $\mathcal{B}[K]\widehat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ とも記すことにしよう．この記号を用いるときは主に位相空間として扱っていることを示したい場合であるが，それは後の話として，まずこれらの表現を用いると，上に与えた正則パラメータを持つ超函数のコホモロジー的定義と第4章で与えた（1パラメータの場合の）直観的定義（定義4.3.1）との一致が示せることを注意しよう．議論の筋道は§1で行った超函数の場合と同じなので詳しいことは省略する．正則パラメータを持つ超函数

$$(7.4.5)\qquad f(x,\tau)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j0,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$$

を実 $n+2m$ 変数 $(x, \mathrm{Re}\,\tau, \mathrm{Im}\,\tau)$ の超函数と見做す方法も，上巻で与えたパラメータが一個の場合のものと同様である．すなわち，$\tau=t+is$ と書くとき

$$(7.4.6)\qquad f(x,t,s)=\sum_{j=1}^{N}F_j((x,t,s)+i(\Gamma_j\times\boldsymbol{R}^{2m})0)\in\mathcal{B}(\Omega\times T)$$

ここに，右辺の各項は $F_j(z,\tau+i\sigma)$ の境界値を表わしている．この函数は，

$$(7.4.7)\qquad T^{\boldsymbol{C}}=\{(\tau,\sigma)\in\boldsymbol{C}^{2m};\tau+i\sigma\in T\}$$

とおくとき，$(\Omega+i\Gamma_j0)\times T^{\boldsymbol{C}}$ という $(\Omega\times T)+i(\Gamma_j\times\boldsymbol{R}^{2m})0$ 型の無限小楔で正則になっている．集合 $T^{\boldsymbol{C}}$ は T を $\boldsymbol{R}^{2m}$ の開集合と見たときの複素近傍になっていることに注意せよ．

対応 $f(x,\tau)\mapsto f(x,t,s)$ が層の準同型 $\iota:\mathcal{BO}\to\mathcal{B}$ を与えることは明らかであるが，これが単射となることの証明が保留してあった．そのため次の補題を準備しよう．

補題 7.4.3　a)　閉集合 $F\subset\boldsymbol{R}^n$ は柱状閉集合 $F_j, j=1,\cdots,N$ の和集合になっているとし，$T\subset\boldsymbol{C}^m$ は Stein とする．このとき，$f(x,\tau)\in\Gamma_{F\times T}(\boldsymbol{R}^n\times T, \mathcal{BO})$ は $f_j(x,\tau)\in\Gamma_{F_j\times T}(\boldsymbol{R}^n\times T,\mathcal{BO})$，$j=1,\cdots,N$ を適当にとるとき

$$f(x,\tau)=f_1(x,\tau)+\cdots+f_N(x,\tau)$$

と分解される．

b)　開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ は有限個の開直方体の和集合の形をしており，$T\subset\boldsymbol{C}^m$ は Stein とする．このとき，任意の $f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ は $\Gamma_{\bar{\Omega}\times T}(\boldsymbol{R}^n\times T, \mathcal{BO})$ のある元 $\tilde{f}(x,\tau)$ に延長することができる．

証明は補題7.2.2と全く同じである．実際，そこで引用した補題6.5.8は，ここでも使える様に Stein 領域を一つ直積した形で述べられていたのであった．

埋め込み $\mathcal{BO}\hookrightarrow\mathcal{B}$ の単射性の証明　正則パラメータを一つずつ通常の変数に見直してゆけばよいから，1パラメータの時に証明すれば十分である．そこで $T\subset\boldsymbol{C}$ とし，$f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ をとる．まず $f(x,\tau)$ の台が x について柱状コンパクト集合 K に含まれる場合を考えよう．表現(7.4.4)による $f(x,\tau)$ の定義函数を $F(z,\tau)\in\mathcal{O}(U\sharp K)\times T)$ とすれば，$f(x,\tau)$ の埋め込み像 $\iota(f)(x,t,s)$ は

$$\iota(f)(x,t,s)=\sum_{\sigma}F((x,t,s)+i(\Gamma_\sigma\times\boldsymbol{R}^2)0)$$

もしこれが $n+2$ 変数の超函数として0ならば，積分

$$(7.4.8)\qquad G(z,t,s)=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\iota(f)(w,t,s)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw$$

は固定した各 $z\in U\sharp K$ について0となるはずである．しかるにこの積分は，補題3.4.4により定義函数 $F(z,\tau)$ を用いて次のように計算することができる:

$$(7.4.9)\qquad G(z,t,s)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(w,t+is)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw_1\cdots dw_n$$

ここに，γ_j は K_j を正の向きに一周する閉路である．一方(7.4.9)で計算される正則函数 $G(z,t+is)=G(z,t,s)$ は，(7.4.4)の表現に関してもとの $F(z,\tau)$ と同一のコホモロジー類を定めることが，パラメータ τ の無い場合と全く同様にして示される．故に $f(x,\tau)=0$ となる．

次に $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を有界な開直方体とし $f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ の埋め込み像 $\iota(f)(x,t,s)$ が0に等しいと仮定しよう．補題7.4.3により $f(x,\tau)$ はある元 $\tilde{f}(x,\tau)\in\mathcal{B}[\bar{\Omega}]\widehat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ に延長されるが，この埋め込み像 $\iota(\tilde{f})(x,t,s)$ は

$$\operatorname{supp}\iota(\tilde{f})(x,\mathrm{t},\mathrm{s})\subset\partial\Omega\times T$$

を満たす．$\partial\Omega$ は $2n$ 個のコンパクトな面 K_j の和集合の形をしており，各 K_j は柱状である．そこで $\iota(\tilde{f})(x,t,s)$ の台をこれに応じて分解することを考えよう．$L\subset T$ を座標軸に平行な辺を持つ任意の閉長方形とし，$\chi_L(t,s)$ をその定義函数とする．積 $\chi_L\cdot\iota(\tilde{f})$ は定理4.3.2の特異スペクトル評価により許され，

$$\operatorname{supp}\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}(\chi_L\cdot\iota(\tilde{f}))\subset\partial\Omega\times\partial L=\bigcup_{j=1}^{2n}\bigcup_{k=1}^{4}K_j\times L_k$$

となる．ここに L_k，$k=1,\cdots,4$ は L の辺を表わす．そこで $\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}(\chi_L\cdot\iota(\tilde{f}))$ を単に (x,t,s) の超函数として，台が $K_j\times L_k$ に含まれるもの $f_{j,k}$ の和に分解し，

次いで

$$g_{j,k}(x,t,s) = f_{j,k}(x,t,s) \underset{(t,s)}{*} \frac{1}{\pi(t+is)} \tag{7.4.10}$$

とおく．第3章(3.4.28)式と例4.3.12により

$$\sum_{j,k} g_{j,k}(x,t,s) = \frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}(\chi_L \cdot \iota(\tilde{f})) * \frac{1}{\pi(t+is)} = \chi_L \cdot \iota(\tilde{f})$$

であり，また畳み込みに関する台の評価から

$$\operatorname{supp} g_{j,k} \subset K_j \times \boldsymbol{C}$$

となっている．

ところで，積分(7.4.10)は $f_{j,k}$ の定義函数 $F_{j,k}(z,\tau,\sigma) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^{n+2} \sharp (K_j \times L_k))$ で計算することができ，それは

$$G_{j,k}(z,\tau,\sigma) = (-1)^2 \oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} \frac{1}{\pi} \frac{F_{j,k}(z,\xi,\eta)}{\tau-\xi+i(\sigma-\eta)} d\xi d\eta \tag{7.4.11}$$

の境界値となる．ここに γ_1, γ_2 は2次元の柱状コンパクト集合 L_k の各直積因子を正の向きに一周する積分路である．(7.4.11)で定まる函数 $G_{j,k}$ は，τ, σ をそれぞれ実数値 t, s に限定するとき，z と $\tau = t+is$ の函数として $(\boldsymbol{C}^n \sharp K_j) \times (\boldsymbol{C} \setminus L_k)$ で正則となり，従って $\mathcal{B}[K_j] \hat{\otimes} \mathcal{O}(\boldsymbol{C} \setminus L_k)$ のある元 $g_{j,k}(x,\tau)$ を定めるが，これと(7.4.10)とは明らかに埋め込み $\mathcal{BO} \hookrightarrow \mathcal{B}$ で対応している．故に以上をまとめれば $\boldsymbol{R}^n \times \operatorname{Int}(L)$ の上で

$$\iota(\tilde{f}(x,\tau) - \sum_{j,k} g_{j,k}(x,\tau)) = 0$$

が成り立つことがわかった．この括弧内のものの台は $\bar{\Omega} \times \operatorname{Int}(L)$ に含まれているので，前半の証明から，同じく $\boldsymbol{R}^n \times \operatorname{Int}(L)$ において

$$\tilde{f}(x,\tau) - \sum_{j,k} g_{j,k}(x,\tau) = 0$$

従って $g_{j,k}$ の台の評価より $\Omega \times \operatorname{Int}(L)$ において $f(x,\tau)=0$ が得られる．L は任意だから，これより $f(x,\tau) \equiv 0$ がわかる．証了．

この単射性の証明も代数的に行うことができるが，それは $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ の単射性の証明より更に複雑である．次に，正則パラメータを持つ超函数の，超函数部分の変数に関する脆弱性を証明しよう．

定理 7.4.4　$\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ を任意の開集合，$T \subset \boldsymbol{C}^m$ を Stein とするとき，制限写像

$$\mathcal{BO}(\boldsymbol{R}^n \times T) \longrightarrow \mathcal{BO}(\Omega \times T)$$

は全射となる．特に，Ω を有界開集合とするとき，$\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ の元 $f(x, \tau)$ は $\mathcal{B}[\bar{\Omega}]\widehat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ の元に延長することができる．

証明 T を固定したとき，対応

$$\Omega \longmapsto \mathcal{BO}(\Omega \times T)$$

は $\boldsymbol{R}^n$ 上の層と考えられる．(実は $\pi: \boldsymbol{R}^n\times T \to \boldsymbol{R}^n$ を自然な射影とするとき，これは $\pi_*\mathcal{BO}$ に等しい．) この層が脆弱なことを言えば良いのだから，Ω を有界開集合として後半の主張を証明すれば十分である．しかるにそれは，補題 7.4.3 と定理 4.3.4 とを用いて前節の命題 7.3.1 と全く同様にできる．証了．

以上で，正則パラメータに関する基礎付けは，一通り完了した．第 4 章では一変数の正則パラメータについて種々の性質を調べたが，それらは適当な言い換えにより多変数の正則パラメータに翻訳される．例えば，正則パラメータに関するミクロ解析性伝播定理(定理 4.3.8)は，一変数毎に適用できるので，直ちに多変数のパラメータに翻訳できる．正則パラメータに関する境界値操作(補題 4.3.13-定理 4.3.14)は，多変数の正則函数から境界値として超函数を得る操作を真似すれば，多変数のパラメータの場合に翻訳できるであろう．

この節の残りの部分で Dolbeault 分解を用いた $\mathcal{O}$ の脆弱分解を構成しよう．正則パラメータを持つ超函数の埋め込み $\mathcal{BO}\hookrightarrow\mathcal{B}$ による像は，ちょうど部分 Cauchy-Riemann 方程式系

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\tau}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t_j} + i\frac{\partial}{\partial s_j}\right) f = 0, \quad j = 1, \cdots, m \tag{7.4.12}$$

の解の全体と一致する．これは定理 4.3.2 を 1 変数ずつ適用すれば確かめられる．この埋め込みは次のように先へ延ばすことができる．

定理 7.4.5 超函数係数の τ に関する反正則 k 次微分形式の芽が作る層を $\mathcal{B}_{x,\tau}\otimes_{\mathcal{A}_\tau}\mathcal{A}_\tau{}^{(0,k)}$ で表わすとき，$\boldsymbol{R}^{n+2m}$ 上に

$$0 \to \mathcal{B}_x\mathcal{O}_\tau \to \mathcal{B}_{x,\tau} \xrightarrow{\bar{\partial}_\tau{}^0} \mathcal{B}_{x,\tau}\otimes_{\mathcal{A}_\tau}\mathcal{A}_\tau{}^{(0,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}_\tau{}^1} \cdots \to \mathcal{B}_{x,\tau}\otimes_{\mathcal{A}_\tau}\mathcal{A}_\tau{}^{(0,m)} \to 0 \tag{7.4.13}$$

という層の完全列が存在する．ここに $\bar{\partial}_\tau{}^k$ は τ に関する k 次の反正則外微分を表わす((5.1.13)参照)．

証明は次の補題に注意すれば帰納法を用いた定理 7.3.3 の証明と同様にゆく．

補題 7.4.6 a) $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を任意の開集合とするとき，$g(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対し，

偏微分方程式 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)f(x)=g(x)$ は常に大域解 $f(x)\in\mathcal{B}(\Omega)$ を持つ.

b)　$\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を任意の開集合，$T\subset\boldsymbol{C}^m$ を Stein 開集合とする．正則パラメータを持つ超函数 $g(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ に対し，偏微分方程式 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)f=g$ は正則パラメータを持つ超函数の大域解 $f(x,\tau)\in\mathcal{BO}(\Omega\times T)$ を有する.

証明　a)　g を $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ の元に延長し，$\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^n\#\boldsymbol{R}^n)$ の中にその定義函数 $G(z)$ を選んで，偏微分方程式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+i\frac{\partial}{\partial z_2}\right)F(z)=G(z)$$

を $\boldsymbol{C}^n\#\boldsymbol{R}^n$ の各連結成分たる凸領域において解けばよい．ところで適当な複素線型座標変換により偏微分作用素 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+i\frac{\partial}{\partial z_2}\right)$ は $\partial/\partial z_1$ に写され，またこの変換で凸領域は凸領域に写されるから，補題 4.3.3 により上の方程式は大域解 $F(z)$ を持つ.

b)　定理 7.4.4 により $\Omega=\boldsymbol{R}^n$ と仮定しても一般性を失わない．故に $g(x,\tau)$ を $\mathcal{O}((\boldsymbol{C}^n\#\boldsymbol{R}^n)\times T)$ の元 $G(z,\tau)$ で代表させることができるから，$(\boldsymbol{C}^n\#\boldsymbol{R}^n)\times T$ の各連結成分において方程式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+i\frac{\partial}{\partial z_2}\right)F(z,\tau)=G(z,\tau)$$

を上と同様にして解けば（問 6.3.3 参照），求める解が得られる．証了.

系 7.4.7 (Dolbeault 分解)　X を n 次元複素多様体，$\mathcal{O}_X$ をその上の正則函数の層とする．また，X を $2n$ 次元実解析多様体と見做したとき，その上の超函数の層を $\mathcal{B}$，それを係数とする k 次反正則微分形式の作る層を $\mathcal{B}^{(0,k)}$ とする．このとき，X 上に

(7.4.14)　$$0\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{B}\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{B}^{(0,1)}\to\cdots\to\mathcal{B}^{(0,n)}\to 0$$

という層の完全列が存在する．特に $\mathrm{fl.dim}\,\mathcal{O}_X=n$ である.

列 (7.4.14) の完全性は，局所座標を用いて表わせば (7.4.13) の特別な場合となる．これは層 $\mathcal{O}_X$ の長さ n の脆弱分解を与えるが，一方 $P\in X$ をとるとき，$H^n{}_P(X,\mathcal{O}_X)\cong\mathcal{B}[P]\neq 0$ だから，$\mathrm{fl.dim}\,\mathcal{O}_X=n$ となる.

この系の応用として次の深遠な結果が得られる.

定理 7.4.8 (Malgrange)　$U\subset\boldsymbol{C}^n$ を任意の開集合とするとき，

(7.4.15)　$$H^n(U,\mathcal{O})=0$$

証明　コホモロジー群(7.4.15)を脆弱分解(7.4.14)を用いて計算しよう．

$$(7.4.16)\qquad H^n(U,\mathcal{O}) \cong \mathcal{B}^{(0,n)}(U)/\bar{\partial}\mathcal{B}^{(0,n-1)}(U)$$
$$\cong \mathcal{B}(U)\Big/\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\mathcal{B}(U)+\cdots+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\mathcal{B}(U)\right)$$

となるが，ここで補題7.4.6によれば任意の $g\in\mathcal{B}(U)$ は必ずある $f\in\mathcal{B}(U)$ を用いて $g=\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}f$ の形に書けるから，この商空間は0に等しい．証了．

この定理は，$n=1$ の場合に任意の開集合 $U\subset \boldsymbol{C}$ が Stein であるという事実の一般化とも思える．なお，等式(7.4.15)は U が $H^n(X,\mathcal{O})=0$ を満たす n 次元複素多様体(特に Stein 多様体) X の任意の開集合の場合にも成立する．実際 $H^n(X,\mathcal{O})=0$ を脆弱分解(7.4.14)により表現すれば，

$$\mathcal{B}^{(0,n)}(X)/\bar{\partial}\mathcal{B}^{(0,n-1)}(X)=0$$

となるが，これと $\mathcal{B}$ の脆弱性から(7.4.16)の消滅がわかる．

問7.4.1　逆に Malgrange の定理を仮定して補題5.4.3により $\mathcal{B}$ の脆弱性を導け．

問7.4.2　a) $V\subset \boldsymbol{C}^m$ を Stein 開集合とし正則パラメータ $\tau\in V$ を含む変数 $x\in \boldsymbol{C}^n$ の超函数係数反正則 j 次微分形式の芽が $\boldsymbol{C}^n\times V$ 上に定める層を $\mathcal{BO}^{(0,j)}$ で表わす．このとき自然な射影 $\pi:\boldsymbol{C}^n\times V\to \boldsymbol{C}^n$ は層 $\mathcal{BO}^{(0,j)}$ について純0次元的なことを示せ．b) $0\to\pi_*\mathcal{O}\to\pi_*\mathcal{BO}^{(0,\cdot)}$ は $\pi_*\mathcal{O}$ の脆弱分解となることを示せ．c) $S\subset \boldsymbol{C}^n$ を任意の局所閉集合とするとき $H^k{}_{S\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V,\mathcal{O})=0\,(k\geq n+1)$ を示せ．

問7.4.3　この章で引用した定理4.1.14(及び定理4.3.4)を双対性を用いず次の方針で証明してみよ．a) まず K,L が直方体のとき $\mathcal{B}[K]\subset\mathcal{B}[L]$ が稠密なことを表現(4.1.5)と Runge の近似定理を用いて示せ．b) K,L が有限個の直方体の和集合のとき，近似すべき元を補題7.2.2を用いて分解することにより同じ主張を示せ．c) K,L が一般のとき，$\mathcal{B}[L]$ の位相の定義により $\mathcal{B}[K]$ が $\forall L'\supseteq L$ に対し $\mathcal{B}[L']$ の中で稠密なら実は $\mathcal{B}[L]$ の中でも稠密となることを確かめ，また K の方はより小さな集合で置き換え得ることに注意して上の場合に帰着させよ．

付　記

多変数函数論と層係数コホモロジー論を既知とすれば，超函数論の実質的部分は割合短いものである．(de Rham 分解等はむしろ応用に属し，直観的超函数に対する議論として上巻へまわすこともできる．) §1 直観的超函数と導来層により正確に定義された超函数との対応は佐藤及びその側近では自明のことであったようだが，一般に理解できる

ようにきちんと証明を与えたのは森本[1]が最初と思われる．ここでの記述もほぼそれに従った．それ以前の文献では直観的超函数として例 7.1.3 a)の表現だけか，或はせいぜい Martineau[3] 流の楔の刃定理としての解釈を恐る恐る利用していた趣がある．§2 実解析函数の埋め込みの単射性には小松[3]による解析的証明を採用した．他に参考 7.3 で述べた S-K-K[1](或は柏原-河合-木村[1])の原証明，及びその被覆コホモロジー版とも言える森本[1]等の代数的証明がある．(ここで代数的とは積分論や微分方程式を使わぬという意味であり，コホモロジー消滅定理は仮定する.）長さから言えば問 7.2.1 に与えた方針が一番短いかもしれない．ここでも本文としては代数にも解析にも偏重せぬ，易しくて自然なものを選んだ積りである．§3 $\mathcal{B}$ の脆弱性の従来の証明は，本書で超函数論の応用として掲げた Malgrange の定理 7.4.8 を用いて問 7.4.1 に示した方法でなされて来た(小松[3]，森本[1]等)．Malgrange の定理の直接証明は楕円型複体の理論の一部としての Fourier 解析を用いた高級なものなので，一般の読者には $\mathcal{B}$ の脆弱性の根拠が雲の上に隠されていた感もあろう．ここでは特別な形の開集合からの延長は代数的に従うこと，及び一般の開集合の場合は，$\mathcal{B}[K]\hookrightarrow\mathcal{B}[L]$ という自然な埋め込みが稠密な像を持つという $\mathcal{B}$ の位相の特殊性から従うことを強調したかった．Radon 分解的な考え方に依拠した本書の方針を貫くには，問 7.3.1 に与えた方法の方が自然であったかもしれない．なお Schapira[1] のように $\mathcal{B}(\Omega)=\mathcal{B}[\bar{\Omega}]/\mathcal{B}[\partial\Omega]$ を定義とする流儀では，$\mathcal{B}$ の脆弱性は定義の一部となってしまい，その場合ここと同様の議論は $\mathcal{B}$ が層の公理を満たすことを示すために用いられていた．

第 8 章　Fourier 変換

Fourier 変換とは函数を指数函数の重畳の形に表現するもので，一般の波動を種々の振動数を持つ正弦波に分解するという物理的な解釈を背景に持つ．この技法が最初に組織的に用いられたのは実は波ではなく，熱伝導の問題を形式的に解くため Fourier によって導入されたのが始まりである．その後各分野に応用され，現在では純粋数学においても重要な道具となっている．函数 $f(x)$ の Fourier 変換とは要するに

$$\hat{f}(\xi)=(\mathscr{F}f)(\xi)=\int_{R^n}e^{-ix\xi}f(x)dx,\quad x\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n \tag{8.0.1}$$

で定まる函数 $\hat{f}(\xi)$ のことであり，これらの函数及び積分を古典的な意味で考えたものが古典的 Fourier 変換論である．これに対し超函数論的 Fourier 変換論とは，これらを超函数の意味に拡張解釈することによって Fourier 変換の適用範囲を著しく拡げようという試みである．以下，本章では本書前半の直観的記述形式を取り戻して，この試みを少しずつ発見的に与えてゆこう．なお文献によっては指数部の符号を変えた

$$(\overline{\mathscr{F}}f)(\xi)=\int_{R^n}e^{ix\xi}f(x)dx \tag{8.0.2}$$

の方を Fourier 変換と呼んでいるものもある．これと定数倍しか違わない

$$(\mathscr{F}^{-1}f)(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}e^{ix\xi}f(x)dx \tag{8.0.3}$$

は一般に (8.0.1) の逆変換となる．これらの変換は互いによく似ており，それらの持つ性質を互いに翻訳するのも容易なので，以下では主に変換 (8.0.1) に

ついて種々の性質を述べてゆくことにする.

§1　コンパクトな台を持つ超函数の Fourier 変換

$f(x)$ をコンパクトな台 K を持つ $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数とするとき，積分

$$\hat{f}(\zeta)=(\mathscr{F}f)(\zeta)=\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{-ix\zeta}f(x)dx \tag{8.1.1}$$

は任意の $\zeta\in\boldsymbol{C}^n$ に対し確定した値を持つ．故に $f(x)$ の Fourier 変換は複素変数の函数とみなせる．それがどんな函数になるかを見るため，超函数に対する積分の定義を思い出そう．まず一変数のとき，$f(x)$ は $F(z)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}\setminus K)$ の境界値として表わされるが，このとき(8.1.1)は

$$\hat{f}(\zeta)=-\oint_{\gamma}e^{-iz\zeta}F(z)dz \tag{8.1.2}$$

という式で計算される．ここに γ は K を正の向きに一周する任意の積分路である．多変数の f についても，その台を $K=K_1\times\cdots\times K_n$ という柱状コンパクト集合で見積ったときには，定義函数 $F(z)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^n\#K)$ に対して同様の公式が使える．一般の f に対してその台を正確に取り扱いたい時は，定理 3.2.3 により

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j0)$$

と表示する．ここに $F_j(z)$ は実軸の $\boldsymbol{R}^n\setminus K$ の近傍まで解析接続され，そこでの総和が通常の意味で 0 となっているような定義函数である．このとき(8.1.1)は

$$\hat{f}(\zeta)=\sum_{j=1}^{N}\int_{D_j}e^{-iz\zeta}F_j(z)dz \tag{8.1.3}$$

で計算される．ここに D_j は K のある実近傍 D をその境界は固定して内部を $F_j(z)$ の正則域たる無限小楔 $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_j0$ の中へ変形した積分路を示す．これらの表示から次の定理の前半が直ちに得られる.

定理 8.1.1 (Paley-Wiener-Ehrenpreis)　台がコンパクト集合 K に含まれる超函数 $f(x)$ の Fourier 変換(8.1.1)は ζ の整函数となり，任意の $\varepsilon>0$ に対し $C_\varepsilon>0$ を適当にとれば

$$|\hat{f}(\zeta)|\leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+H_K(\mathrm{Im}\,\zeta)} \tag{8.1.4}$$

という評価を満たす．ここに

$$H_K(\eta) = \sup_{x \in K} x\eta \tag{8.1.5}$$

は K の**支持函数**(supporting function) と呼ばれるものである．逆に任意の $\varepsilon>0$ に対して(8.1.4)を満たすような整函数は必ず台が K の凸包に含まれるようなある(唯一つの)超函数の Fourier 変換となる.

実際，(8.1.2)或は(8.1.3)の z に関する積分は明らかに $\zeta \in \boldsymbol{C}^n$ につき広義一様に収束するから，$\hat{f}(\zeta)$ の正則性は指数函数 $e^{-iz\zeta}$ の ζ に関する正則性の直接の帰結である．これらの積分の値を評価する際，積分路 γ 或は D_j 等には任意性があるから，任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対してこれらを K の複素 ε-近傍 K_ε 内にとることができる．すると例えば(8.1.3)は

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\zeta)| &\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{D_j} |F_j(z)|\, |dz| \cdot \sup_{z \in K_\varepsilon} e^{\mathrm{Re}(-iz\zeta)} \\ &\leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|} \sup_{x \in K} e^{x \cdot \mathrm{Im}\,\zeta} = C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + H_K(\mathrm{Im}\,\zeta)}\end{aligned}$$

と評価される．逆の主張は§5において逆 Fourier 変換を用いてより一般の場合に考察がなされるので，ここでは省略する．(系 8.5.8 を参照せよ.)

上の評価に出て来た支持函数の性質のうち主なものを列挙しておこう.

補題 8.1.2 a) $K \subset L$ ならば $H_K(\eta) \leq H_L(\eta)$

b) 任意の $\eta \neq 0$ に対し $a \in K$ を適当にとれば $H_K(\eta) = a\eta$ かつ $K \subset \{(x-a)\eta \leq 0\}$ となる.

c) $\hat{K}$ を K の凸包とするとき $H_K(\eta) = H_{\hat{K}}(\eta)$.

d) $a \notin \hat{K} \Longleftrightarrow \exists \eta$ について $a\eta > H_K(\eta)$

e) $t>0$ に対し $H_K(t\eta) = tH_K(\eta) = H_{tK}(\eta)$. より一般に A を線型変換とすれば $H_{AK}(\eta) = H_K({}^t A\eta)$.

f) $H_{K+L}(\eta) = H_K(\eta) + H_L(\eta)$

g) $K \subset \{x_1 = 0\}$ ならば $H_K(\eta)$ は $\eta' = (\eta_2, \cdots, \eta_n)$ のみの函数となり，K を $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の部分集合と見做したときのその支持函数と一致する.

h) $K \subset \boldsymbol{R}^n, L \subset \boldsymbol{R}^m$ ならば $H_{K \times L}(\xi, \eta) = H_K(\xi) + H_L(\eta)$.

これらの主張の証明は本論から大部それるので演習問題としておく.

問 8.1.1 上の補題を証明せよ.

例 8.1.3 $K=\{|x|\le r\}$, $\{\max_{1\le j\le n}|x_j|\le r\}$, $\{|x_1|+\cdots+|x_n|\le r\}$ に対し $H_K(\eta)$ はそれぞれ $r|\eta|$, $r(|\eta_1|+\cdots+|\eta_n|)$, $r\max_{1\le j\le n}|\eta_j|$ となる．直接確かめるのも容易だが，上の諸性質を適宜用いれば更に早い．なお一般に K をあるノルムの単位球とすれば，$H_K(\eta)$ はその双対ノルムであることに注意せよ．

上の補題からもわかるように支持函数 $H_K(\eta)$ を用いた Fourier 像の評価は K とその凸包とを区別できないので，凸でない集合 K を台とする超函数を Fourier 像で正確に把えたいときには，K の分割に応じた評価を持つ整函数への分解を考える等の工夫が必要となる．

再び Fourier 変換の計算の話に戻り，上巻の諸公式をこの場合に応用してみよう．なお本章に限り偏微分の略記号として

$$D^\alpha = D_1{}^{\alpha_1}\cdots D_n{}^{\alpha_n}, \qquad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

等を用いることにする．その理由はすぐ下の計算で明らかとなる．

命題 8.1.4 a) $\mathscr{F}(D^\alpha f)=\zeta^\alpha\mathscr{F}f$. より一般に定数係数局所作用素 $J(D)$ に対しても $\mathscr{F}(J(D)f)=J(\zeta)\mathscr{F}f$ となる．

b) $\mathscr{F}(x^\alpha f)=(-D_\zeta)^\alpha\mathscr{F}f$.

c) $\mathscr{F}(f(x-a))=e^{-ia\zeta}\mathscr{F}f$.

d) $\mathscr{F}(f*g)=\mathscr{F}(f)\cdot\mathscr{F}(g)$.

証明 a) 有限階の微分の場合は部分積分の公式 (第 4 章問 4.1.1) を $\varphi(x)=e^{-ix\zeta}$ として適用すれば得られる(D_j の定義を上のように修正したお蔭で虚数因子 i が現われぬことに注意)．無限階の微分作用素の場合には $J(D)f=\sum_\alpha b_\alpha D^\alpha f$ が $\mathscr{B}[K]$ の位相で収束することから，定積分の連続性により

$$\int_{R^n} e^{-ix\zeta}J(D)f(x)dx = \sum_\alpha b_\alpha\int_{R^n} e^{-ix\zeta}D^\alpha f(x)dx$$

となり有限階の場合に帰着する．

b) $x^\alpha e^{-ix\zeta}=(-D_\zeta)^\alpha e^{-ix\zeta}$ と書き換えておいて命題 3.4.3 a) により ζ に関する微分を外に出せばよい．

c) 積分変数の変換により直ちに確かめられる．

d) 積分順序の変更と変数変換で

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g) &= \int_{R^n} e^{-ix\zeta}dx\int_{R^n} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{R^n} e^{-iy\zeta}g(y)dy\int_{R^n} e^{-i(x-y)\zeta}f(x-y)dx \\ &= \int_{R^n} e^{-iy\zeta}g(y)dy\int_{R^n} e^{-ix\zeta}f(x)dx = \mathcal{F}(g)\cdot\mathcal{F}(f)\end{aligned}$$

と確かめられる．証了．

実例を少し見てみよう．$\mathcal{F}\delta=1$，また $\mathcal{F}(\delta(x-b)-\delta(x-a))=e^{-ib\zeta}-e^{-ia\zeta}$．これらは δ 函数の積分に関する公式(第3章問 3.4.1)から直ちに得られる．後者は $\mathcal{F}(\chi_{[a,b]}(x))=\int_a^b e^{-ix\zeta}dx=-\frac{1}{i\zeta}(e^{-ib\zeta}-e^{-ia\zeta})$ と上の命題の a)の公式で対応している．$H_{[a,b]}(\eta)=\max\{a\eta, b\eta\}$ に注意．無限階の超函数の Fourier 変換の例としては $\mathcal{F}[e^{-1/z}]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\pi i}{k!(k+1)!}(i\zeta)^k=2\pi\frac{d}{d\zeta}(J_0(2\sqrt{-i\zeta}))$ (J_0 は0次の Bessel 函数)，$\mathcal{F}(\cos\sqrt{D}\delta(x))=\cos\sqrt{\zeta}$ など，これらの整函数は $\leq Ce^{\sqrt{|\zeta|}}$ なる評価を満たす．

最後の二例はいずれも台が原点のみの超函数である．そこでコンパクトな台を持つ超函数の特別な場合として，このような超函数の Fourier 変換を詳しく調べよう．第4章系 4.1.6 によれば，台が原点に含まれる超函数はある定数係数の局所作用素 $J(D)$ を以て $J(D)\delta(x)$ の形に書ける．故にその Fourier 変換は上の命題の a)により $J(\zeta)$ という整函数になる．これは作用素 $J(D)$ の(全)表象と呼ばれる．$K=\{0\}$ に対し $H_K(\eta)=0$ だから，定理 8.1.1 の特別の場合としてこのような整函数は

(8.1.6) $$\forall\varepsilon>0,\ \exists C_\varepsilon>0,\ |J(\zeta)|\leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|}$$

という評価で特徴付けられることがわかる．この形の評価は一般に**劣指数型** (infra-exponential)，或は位数1の最小型と呼ばれる．本書ではこれを単に**緩増加**とも呼ぶ．

定理 8.1.5 整函数 $J(\zeta)$ について次は同値となる．

a) $J(\zeta)$ の Taylor 展開 $\sum b_\alpha\zeta^\alpha$ の係数は $\lim_{|\alpha|\to\infty}\sqrt[|\alpha|]{|b_\alpha|\alpha!}=0$ を満たす．

b) $J(\zeta)$ は劣指数型の増大度を持つ．

また，一変数の場合には更に次の主張も同値となる (Lindelöf):

c) $J(\zeta)$ は広義一様収束する無限乗積 $cz^m\prod_{k=1}^{\infty}(1-z/\lambda_k)$ に展開される．ここに $k/\lambda_k\to 0\ (k\to+\infty)$ である．

a) と b) の同値性は既に見た通りだが，純函数論的に証明することもできる．c) は整函数の零点分布論からの結果である．証明はかなり専門的になるので原論文 (Lindelöf[1]) に譲り，ここでは後の応用のため次のような特殊な形の，ただし多変数にも通用する無限乗積を持つ整函数のみを考察しておこう．劣指数型増大度の本質はこれでも十分理解できるであろう．

命題 8.1.6　$\varphi(t)$ は半直線 $t\geq 1$ 上の正値単調増加函数で $\varphi(t)>1$, $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$ を満たすとする．このとき無限乗積

$$(8.1.7)\qquad J(\zeta)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta^2}{(k\varphi(k))^2}\right),\qquad \zeta^2=\zeta_1{}^2+\cdots+\zeta_n{}^2$$

は劣指数型の整函数となり，かつ $|\mathrm{Im}\,\zeta|\leq\max\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}|\mathrm{Re}\,\zeta|, 1\right\}$ において，

$$(8.1.8)\qquad |J(\zeta)|\geq C\exp\left(c\frac{|\zeta|}{\varphi(|\zeta|+1)}\right)$$

という下からの評価を満たす．

証明　$\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta|^2/(k\varphi(k))^2<\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta|^2/k^2<+\infty$ なので，無限乗積の収束判定法により (8.1.7) は $\boldsymbol{C}^n$ 上広義一様に絶対収束する．($1+\zeta^2/(k\varphi(k))^2$ を $(1+\zeta/k\varphi(k))(1-\zeta/k\varphi(k))$ と因数分解したのでは一般には絶対収束しなくなることに注意．) 故に $J(\zeta)$ は ζ の整函数となる．これがまず劣指数型の評価を満たすことを示そう．$\forall\varepsilon>0$ に対し，$\exists k_0=k_0(\varepsilon)$ をとれば，$k\geq k_0$ において $\varphi(k)\geq 1/\varepsilon$ となるので，$C_\varepsilon=\prod_{k=1}^{k_0}\max\{1/\varepsilon^2\varphi(k)^2, 1\}$ とおけば，

$$|J(\zeta)|\leq\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{|\zeta|^2}{(k\varphi(k))^2}\right)\leq C_\varepsilon\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon^2|\zeta|^2}{k^2}\right)\leq C_\varepsilon{}'e^{\pi\varepsilon|\zeta|}$$

となる．ここで無限乗積展開

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{k^2}\right)=\frac{\sinh\pi z}{\pi z}=\frac{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}{2\pi z}$$

を用いた．ただし，上の評価だけなら $\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+z^2/k^2)\leq\int_0^{\infty}\log(1+z^2/t^2)dt=z\int_0^{\infty}\log(1+1/s^2)ds=cz$ からも従う．

逆に $\zeta=\xi+i\eta$ が $|\xi|\geq\sqrt{3}|\eta|$ を満たすときに $|J(\zeta)|$ の下からの評価を出そう．($|\xi|\leq\sqrt{3}$, $|\eta|\leq 1$ においては $J(\zeta)\neq 0$ より $|J(\zeta)|$ は適当な定数で下から抑えられる．) この領域では $\xi^2-\eta^2\geq\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)=\frac{1}{2}|\zeta|^2$ が成り立つから，

$$(8.1.9) \qquad \left|1+\frac{\zeta^2}{(k\varphi(k))^2}\right| \geq \left|\mathrm{Re}\left(1+\frac{\zeta^2}{(k\varphi(k))^2}\right)\right| = 1+\frac{\xi^2-\eta^2}{(k\varphi(k))^2} \geq 1+\frac{|\zeta|^2}{2(k\varphi(k))^2}$$

従って

$$(8.1.10) \qquad |J(\zeta)| \geq \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{|\zeta|^2}{2(k\varphi(k))^2}\right) \geq \prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{|\zeta|^2}{2(k\varphi(k))^2}\right)$$

となる．ここで N を $|\zeta|$ の大きさに応じて $N\varphi(N)\leq|\zeta|\leq(N+1)\varphi(N+1)$ となるように選べば，φ の単調性より $1\leq k\leq N$ に対し

$$\frac{|\zeta|^2}{(k\varphi(k))^2} \geq \frac{|\zeta|^2}{(N\varphi(N))^2} \geq 1$$

となる．(8.1.10) の各因子をこれでおき換えよう．$\varphi(t)>1$ より $N<N\varphi(N)\leq|\zeta|$ であるから

$$N \geq \frac{|\zeta|}{\varphi(N+1)}-1 \geq \frac{|\zeta|}{\varphi(|\zeta|+1)}-1$$

が成り立つ．故に (8.1.10) は

$$|J(\zeta)| \geq \left(1+\frac{1}{2}\right)^N \geq \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{|\zeta|/\varphi(|\zeta|+1)} = \frac{2}{3}\exp\left(\left(\log\frac{3}{2}\right)\frac{|\zeta|}{\varphi(|\zeta|+1)}\right)$$

と下から評価された．証了．

$\exp(|\zeta|/\varphi(|\zeta|+1))$ の形の函数は任意の劣指数型増大度を表現できるので，上で構成した $J(\zeta)$ は増大度の点では十分に一般的なものとなっている．このことを後で使うため次のように少し強い形で示しておこう．

補題 8.1.7 $f_k(t)$, $k=1,2,\cdots$ を半直線 $t\geq0$ 上の劣指数型増大度を持つ正値連続函数の列とする．このとき，上の命題のような函数 $\varphi(t)$ と，数列 C_k, $k=1,2,\cdots$ を適当に選ぶことにより

$$(8.1.11) \qquad f_k(t) \leq C_k \exp\left(\frac{t}{\varphi(t+1)}\right), \qquad k=1,2,\cdots$$

が $t\geq0$ において成り立つようにできる．

証明 劣指数型函数 $f(t)$ が一つだけ与えられたときは，この主張は殆ど自明である．実際，$\log f(t)$ は**劣線型**，すなわち $\forall\varepsilon>0$ に対し

$$\log f(t) \leq \varepsilon t + C_\varepsilon$$

という評価を満たす函数となり，従って

$$\varphi(t+1)=\inf_{s\ge t}\frac{s}{\log f(s)}$$

とおけば，$\varphi(t)$ は単調増加で $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$，かつ $f(t)\le e^{t/\varphi(t+1)}$ となる．(ただし細かいことを言えば $\log f(t)>0$ とするために $f(t)$ を $f(t)+1$ でおき換え，また条件 $\varphi(t)>1$ を満たすために上の $\varphi(t)$ を更に t の小さいところで修正する等の工夫が必要である.) 上の補題の本質は可算個の劣指数型函数 $f_k(t)$ に対し定数 C_k を取り替えるだけで共通の $\varphi(t)$ により (8.1.11) のような評価が成り立つところにある．そこで今 $\psi_k(t)=\log f_k(t)$ という劣線型函数の列を考えよう．以上述べたところにより，劣線型函数 $\psi(t)$ と数列 $\{c_k\}$ を適当に選んで

(8.1.12)
$$\psi_k(t)\le\psi(t)+c_k$$

とできることを言えば証明が終わる．各 $\psi_k(t)$ は劣線型だから，そのグラフは正の傾きを持つどんな直線よりもやがて下に来る．故にそれを上から折れ線で包絡したもので置き換えることにより，各 $\psi_k(t)$ は上に凸な折れ線をグラフに持つと仮定できる．さらに，必要なら $\psi_k(t)$ を $\sum_{j=1}^{k}\psi_j(t)$ でおき換えることにより，$\psi_k(t)\le\psi_{k+1}(t)$，$\psi_k'(t)\le\psi'_{k+1}(t)$ $k=1,2,\cdots$ が成り立つとしてよい．ここで $\psi_k'(t)$ は点 t における折れ線の傾き (二つある場合はその任意の一つ) を表わしている．そこでいま単調増加数列 $\{a_k\}$ を $\psi_k'(a_k)\le 1/k$ となるように選び

$$\psi(t)=\begin{cases}\psi_1(t), & 0\le t\le a_1\\ \psi_k(t)-\sum_{j=1}^{k-1}(\psi_{j+1}(a_j)-\psi_j(a_j)), & a_{k-1}\le t\le a_k,\end{cases}$$

とおこう．これは明らかに連続な折れ線となり，しかも傾き $1/k$ が 0 に近づくので劣線型である．折れ線 $\psi_k(t)$ の傾きが k と共に増加することから，$t\ge a_k$ においても

$$\psi_k(t)\le\psi(t)+\sum_{j=1}^{k-1}(\psi_{j+1}(a_j)-\psi_j(a_j))$$

が成り立つ (図 8.1 参照)．故に

$$c_k=\sum_{j=1}^{k-1}(\psi_{j+1}(a_j)-\psi_j(a_j))+\max_{0\le t\le a_{k-1}}\psi_k(t)$$

ととれば確かに (8.1.12) が成り立つ．証了.

定理 8.1.1 は一般に Fourier 変換というものが函数の滑らかさと遠方での減少度とを交換する働きを持っていることを示す最初の例と考えることができる．

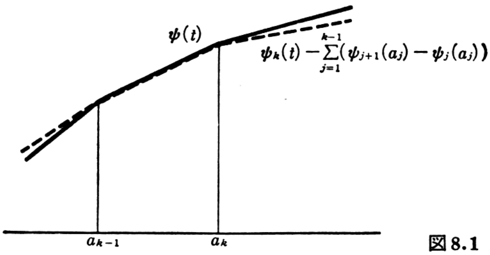


図 8.1

ここでは超函数という最も“滑らかでない”概念が Fourier 変換像に劣指数型“増大度”として現われ，また，台がコンパクトという最も速い“減少度”が，指数型整函数への解析接続を許すという十分な“滑らかさ”となって現われているわけである．通常の函数或は Schwartz の分布に対する Paley-Wiener の定理を御存知の読者は，それらの結果と比較されてみるとよい．この“原理”は以下の叙述においてもいろいろ形を変えながら繰返し現われるであろう．

§2 指数減少超函数の Fourier 変換

前節で見たところ超函数としての非正則性は少しも積分(8.0.1)の収束を脅かすものではなく，従ってこの積分を一般の台を持つ超函数に拡張しようとするときに問題となるのは専ら遠方におけるその増大度のようである．そこでまず全空間上の積分が非常によく収束するような速い減少度を持った函数の Fourier 変換から考察を始めよう．

定義 8.2.1 δ を正の定数とする．管状領域 $\boldsymbol{R}^n+i\boldsymbol{I}$ で正則な函数 $F(z)$ が(実軸方向に)型 $-\delta$ で**指数減少**するとは，任意のコンパクト部分集合 $K\Subset I$，及び任意の $\varepsilon>0$ に対し定数 $C_{K,\varepsilon}>0$ を適当にとれば $z\in\boldsymbol{R}^n+iK$ において一様に

$$(8.2.1)\qquad |F(z)|\leq C_{K,\varepsilon}e^{-(\delta-\varepsilon)|\mathrm{Re}\,z|}$$

という評価が成り立つことを言う．このような函数の全体を $\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{I})$ で表わす．(記号 $\boldsymbol{D}^n$ の意味は後で§5において説明される．ここでは $\boldsymbol{R}^n$ と思ってもよい．) また

$$(8.2.2)\qquad \mathcal{P}_*=\varinjlim_{I\ni 0}\varinjlim_{\delta\downarrow 0}\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{I})$$

とおき，これを**急減少実解析函数**の空間と呼ぶ．ちなみに，(8.2.1)の評価に

おいて形式的に $\delta=0$ としたもの

$$|F(z)| \leq C_{K,\varepsilon}e^{\varepsilon|\mathrm{Re}\, z|} \tag{8.2.3}$$

は(実軸方向に)劣指数型，或は単に**緩増加**と呼ばれ，これを満たすような函数の全体を $\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ で表わす．

注意 Schwartz の分布の理論の系統では急減少という形容詞を任意の負冪 $|x|^{-N}$ よりも速く減少するという意味で用い，また緩増加という形容詞を高々ある冪 $|x|^M$ の程度で増加するという意味で用いているが，本書では佐藤の用語法に従い，急減少は指数減少を，また緩増加は高々劣指数型の増加を指して用いてある．なお混乱を避けるため指数減少の型 $-\delta$ が考えている領域で大域的に定まっている場合には指数減少という語を残した．

(8.2.1)或は(8.2.3)の評価において $\mathrm{Im}\, z$ は有界なところに限られているので右辺の $|\mathrm{Re}\, z|$ を $|z|$ でおき換えても本質に代わりはないことに注意せよ．また $\mathcal{P}_*$ は要するに実軸のある管状近傍においてある型で指数減少する正則函数の全体であり，(8.2.2)の帰納極限は I を $\{|y|<\gamma\}$ の形の近傍に限っても，また $\delta\downarrow 0$ に関する極限との順序を入れ替えても，或は更に δ と γ を共通にしても結局同じ空間となる．もちろん更に $\delta\downarrow 0$ を 0 に近づく任意の点列，例えば $\{1/k\}$ で置き換えてもよい．

さて，まず以上のようなクラスの古典的函数の Fourier 変換として次のような美しい結果が成り立つ．特に $\mathcal{P}_*$ の Fourier 変換に関する不変性は，超函数の Fourier 変換論を双対性を用いて導入する流儀で，$\mathcal{P}_*$ を所謂**基礎空間**(試験函数の空間)として採用できることを示唆するものである．

命題 8.2.2 a) $\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<\gamma\})$ の Fourier 変換は $\widetilde{\mathcal{O}}^{-\gamma}(\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<\delta\})$ に等しい．

b) $\mathcal{P}_*$ の Fourier 変換は $\mathcal{P}_*$ に一致する．

証明 a) 積分(8.0.1)において f の正則性と遠方での減少度を考慮すれば，Cauchy の積分定理により積分路を実軸 $\boldsymbol{R}^n$ から $|y|<\gamma$ の範囲で任意に固定した虚部 y を持つ水準面 $\mathrm{Im}\, z=y$ までずらすことができる：

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathrm{Im}\, z=y} e^{-iz\zeta} f(z)dx \tag{8.2.4}$$

(この種の積分路変形は，積分路を有限のところで切ったものに Cauchy の積

分定理を適用し，次いで被積分函数の減少度を考慮して切断箇所をつなぐ部分の積分が，無限遠に持って行った極限において0に等しいことを示せば正当化される．直積型の積分路なので一変数の場合と全く同様である.）さて，評価(8.2.1)により積分(8.2.4)における変数ζを$|\mathrm{Im}\,\zeta|<\delta$の範囲で動かしても，被積分函数全体としては$x$につき指数減少となり，積分は$\zeta$につきそこで広義一様に収束し，$\zeta$の正則函数を定めることがわかる．実際，$\zeta=\xi+i\eta$と書けば$\forall\varepsilon>0$に対して$|\eta|\leq\delta-\varepsilon$，$|y|\leq\gamma-\varepsilon$のとき，これらの変数について一様に

$$|e^{-iz\zeta}f(z)| = e^{y\xi+x\eta}|f(z)| \leq e^{y\xi}\cdot e^{(\delta-\varepsilon)|x|}\cdot C_\varepsilon e^{-(\delta-\varepsilon/2)|x|} = e^{y\xi}\cdot C_\varepsilon e^{-\varepsilon|x|/2}$$

となる．ここにC_εは(8.2.1)の定数$C_{\{|y|\leq\gamma-\varepsilon\},\varepsilon/2}$に相当する．これからまた

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq e^{y\xi}\int C_\varepsilon e^{-\varepsilon|x|/2}dx = C_\varepsilon' e^{y\xi} \tag{8.2.5}$$

を得る．ここでyを$\{|y|\leq\gamma-\varepsilon\}$の範囲で特に$y=-(\gamma-\varepsilon)\xi/|\xi|$と選べば，$e^{y\xi}=e^{-(\gamma-\varepsilon)|\xi|}$となる．$\varepsilon>0$は任意だから，これより$\hat{f}(\zeta)\in\tilde{\mathcal{O}}^{-\gamma}(\boldsymbol{D}^n+i\{|\eta|<\delta\})$がわかる．

逆に$g(\xi)\in\tilde{\mathcal{O}}^{-\gamma}(\boldsymbol{D}^n+i\{|\eta|<\delta\})$をとるとき，これから(8.0.3)で定まる$x$の函数$(\mathcal{F}^{-1}g)(x)$は，$\mathcal{F}$について既に証明したのと全く同様の理由で$\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<\gamma\})$の元となることがわかる．しかるに古典的な Fourier 変換の反転公式（下の補題 8.2.3）によれば$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g)=g$であるから，$\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<\gamma\})$の Fourier 変換像がちょうど$\tilde{\mathcal{O}}^{-\gamma}(\boldsymbol{D}^n+i\{|\eta|<\delta\})$と一致することがわかる．

b)の主張は a)から明らかである．証了．

ここで念のため古典的な反転公式を証明しておこう．

補題 8.2.3 $f(x)$は$\boldsymbol{R}^n$上の絶対積分可能な函数で，$\mathcal{F}f$（または$\mathcal{F}^{-1}f$）も絶対積分可能とする．このとき$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)=f$（または$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f)=f$）が成り立つ．

証明 $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}K)=K$が具体的計算で確かめられるような函数$K(x)$を一つ用意する．これを$\int K(x)dx=1$と正規化しておこう．このとき$\hat{K}(0)=1$，かつ$|\hat{K}(\xi)|\leq C=\int|K(x)|dx$となる．一般の$f(x)$に対しては

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(\xi) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\xi}\hat{K}(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\xi}\hat{K}(\varepsilon\xi)d\xi\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-it\xi}f(t)dt\end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{R^n} f(t)dt\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{i(x-t)\xi}\hat{K}(\varepsilon\xi)d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{R^n} f(t)\frac{1}{\varepsilon^n}K\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right)dt = f(x)$$

となる．ここで最初の等号は Lebesgue の収束定理，また最後の等号は第1章参考 1.3 で言及したものであるが，$f(x)\in\mathcal{P}_*$ ならば前者は一様収束におき換えて初等的に確かめられるし，後者もそこでの証明が通用する場合となる．なお $K(x)$ としては普通 $e^{-x^2}/(\sqrt{\pi})^n$ が用いられる．この函数の Fourier 変換は

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\int_{R^n} e^{-x^2-ix\xi}dx = \frac{e^{-\xi^2/4}}{(\sqrt{\pi})^n}\int_{R^n} e^{-(x+i\xi/2)^2}dx$$

$$= \frac{e^{-\xi^2/4}}{(\sqrt{\pi})^n}\int_{R^n} e^{-x^2}dx = e^{-\xi^2/4}$$

となる．ここで Cauchy の積分公式と $\int_R e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ とを用いた．この結果はもとの函数と殆ど同じなので逆変換も上の計算に簡単な変数変換を施せば得られ，もとに戻ることが直接確かめられる．証了．

命題 8.2.2 は次のような形に拡張することができる．領域 $\boldsymbol{R}^n+iI$ は必ずしも実軸を含まなくてもよい．

命題 8.2.4　$\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ の元 $F(z)$ に対し，$y\in I$ を任意に選んで

$$\hat{F}(\zeta) = \int_{\mathrm{Im}\, z=y} e^{-iz\zeta}F(z)dx \tag{8.2.6}$$

とおけば，$\hat{F}(\zeta)$ は実軸の管状近傍 $|\mathrm{Im}\,\zeta|<\delta$ 上の正則函数となり，しかも $\forall K\Subset I$ 及び $\forall\varepsilon>0$ に対し $C_{K,\varepsilon}>0$ を適当に選べば，$|\mathrm{Im}\,\zeta|\leq\delta-\varepsilon$ において一様に

$$|\hat{F}(\zeta)| \leq C_{K,\varepsilon}e^{-H_{-K}(\mathrm{Re}\,\zeta)} \tag{8.2.7}$$

が成り立つ．逆にこのような性質を持つ $g(\xi)$ は必ず $\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+i\hat{I})$ のある(唯一つの)元の Fourier 変換となる．

証明　積分 (8.2.6) が $|\mathrm{Im}\,\zeta|<\delta$ で広義一様収束し，その値が積分路 $\mathrm{Im}\,z=y$ の選び方に依らぬことは前と同様に確かめられる．$|\hat{F}(\zeta)|$ の評価については (8.2.5) において今度は $y\in K$ に関する下限をとることができる．

$$\inf_{y\in K} y\xi = -\sup_{y\in K}(-y\xi) = -\sup_{-y\in K} y\xi = -H_{-K}(\xi)$$

であるから (8.2.7) が得られる．この評価は I が実軸を含まぬときは必ずしも $\mathrm{Re}\,\zeta$ に関する指数減少を意味しないので，$g(\xi)=\hat{F}(\xi)$ に対する逆変換 (8.0.3)

は実軸上では普通の意味で収束すると限らない．しかし我々はそれを $\mathrm{Im}\, z \in \hat{I}$ なる複素変数 z の函数として求めればよいのであるから，実際の逆変換は

$$(8.2.8) \qquad (\mathcal{F}^{-1}g)(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{iz\xi}g(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\xi}\cdot e^{-y\xi}g(\xi)d\xi$$

となり，(8.2.7) と $y \in \hat{I}$ より $e^{-y\xi}g(\xi)$ が ξ につき指数減少となって $\boldsymbol{R}^n + i\hat{I}$ 上の正則函数が得られる．それが型 $-\delta$ で指数減少していることは (8.2.8) の積分路を $|\mathrm{Im}\, \zeta| < \delta$ の範囲でずらしてみればわかる．以上で $\mathcal{F}^{-1}g \in \tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n + i\hat{I})$ がわかった．最後に $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g) = g$ となることを示そう．この式を古典的な意味に書き直せば，補題 8.2.3 が適用でき

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g) &= \mathcal{F}_x\{\mathcal{F}_\xi^{-1}(e^{-y\xi}g(\xi))(x+iy)\} = e^{y\xi}\mathcal{F}_x\{\mathcal{F}_\xi^{-1}(e^{-y\xi}g(\xi))\} \\ &= e^{y\xi}\cdot e^{-y\xi}g(\xi) = g(\xi)\end{aligned}$$

と確かめられる．同様にして $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}F) = F$ も確かめられる．証了．

上の証明から $\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n + iI)$ と $\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n + i\hat{I})$ とは実は等しいことがわかる．これは遠方での増大度制限付きではあるが，Bochner の定理 (第 2 章系 2.2.8) の別証明となっている．

上の命題は次のようなクラスの超函数に対して Fourier 変換の計算を可能にする．

定義 8.2.5 管状領域 $\boldsymbol{R}^n + iI_j$ は同時に $\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_j 0$ 型の無限小楔であるとする．$F_j(z) \in \tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n + iI_j)$ なる定義函数により $f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0)$ と表示される超函数を**型 $-\delta$ の指数減少 Fourier 超函数**，或は略して指数減少超函数と称する．その全体を $\mathcal{Q}^{-\delta}$ で表わす．指数減少超函数に対して許される表示の変形は普通の超函数の場合の第 3 章 (3.1.3) と同様であるが，変形の途中で現われる項は必ずある I について $\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n + iI)$ の元でなければならない．特に，一変数の場合，指数減少超函数として $F_+(x + i0) - F_-(x - i0) = 0$ とは，$F_\pm(z)$ が実軸のある帯状近傍の指数減少正則函数 $F(z) \in \tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D} + iI)$ として一つにつながることを意味する．

指数減少超函数 $f(x)$ に対しては全空間上の定積分が自然に定義される．即ち，$y^{(j)} \in I_j$ を任意に選べば

$$(8.2.9) \qquad \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)dx = \sum_{j=1}^{N}\int_{\mathrm{Im}\, z = y^{(j)}} F_j(z)dx$$

でよい．Cauchy の積分定理によりこの値は $y^{(j)}$ の選び方や $f(x)$ の境界値表示の選び方に依らぬことが直ちにわかる．f に対する線型性も明らかであろう．この定積分の特別の場合として $f(x)$ の Fourier 変換 $\int_{R^n} e^{-ix\xi}f(x)dx$ が計算できる．

定理 8.2.6　型 $-\delta$ の指数減少超函数の全体 $\mathcal{Q}^{-\delta}$ と緩増加正則函数の空間 $\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|\eta|<\delta\})$ とは Fourier 変換で一対一に対応する．

証明　$f(x)\in\mathcal{Q}^{-\delta}$ は定義 8.2.5 のような表示を持つとする．その Fourier 変換 $\hat{f}(\zeta)$ は，$y^{(j)}\in I_j$ を任意に選ぶとき

$$\hat{f}(\zeta)=\sum_{j=1}^{N}\hat{F}_j(\zeta),\qquad \hat{F}_j(\zeta)=\int_{R^n}e^{-i(x+iy^{(j)})\zeta}F_j(x+iy^{(j)})dx \tag{8.2.10}$$

で各点毎に計算される．この右辺の各項 $\hat{F}_j(\zeta)$ は命題 8.2.4 の形をしており，従って $|\mathrm{Im}\,\zeta|<\delta$ 上の正則函数となる．更に，$K=\{y^{(j)}\}$ として (8.2.7) を適用すれば，$|y^{(j)}|\leq\varepsilon$ のとき最悪に見積っても $|\mathrm{Im}\,\zeta|\leq\delta-\varepsilon$ において

$$|\hat{F}_j(\zeta)|\leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|}$$

となる．故に各 $\hat{F}_j(\zeta)$，従って $\hat{f}(\zeta)$ は緩増加となる．

逆に $\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|\eta|<\delta\})$ の元 $g(\zeta)$ の Fourier 逆像を求めるには，これをまず上のような $\hat{F}_j(\zeta)$ の和に分解せねばならぬ．そのためには $\hat{F}_j(\zeta)$ のもう少し精密な評価が必要となる．$K=\{y\in I_j;\mathrm{dis}(y,\partial I_j)\geq\varepsilon,|y|\leq 1/\varepsilon\}$ ととり (8.2.7) を適用しよう．固有部分錐 $\varDelta\Subset\Gamma_j$ を任意にとるとき，$c_\varDelta>0$ が存在して

$$-H_{-K}(\xi)=\inf_{y\in K}y\xi\leq\begin{cases}C\varepsilon|\xi|, & \text{一般の } \xi\in\boldsymbol{R}^n \text{ に対し,}\\ -c_\varDelta|\xi|, & \xi\in\boldsymbol{R}^n\setminus\varDelta^\circ \text{ に対し}\end{cases} \tag{8.2.11}$$

となる(図 8.2 参照)．故に (8.2.7) より $\hat{F}_j(\zeta)$ は緩増加であるのみならず，$\Gamma_j{}^\circ$ を固有部分錐として含む任意の閉凸錐 $\varDelta^\circ$ の外で指数減少していることがわかる．逆にこのような $\hat{F}_j(\zeta)$ はある I_j について (8.2.7) の評価を満たすことも明らかであろう．一般の $g(\zeta)\in\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|\eta|<\delta\})$ をこのようなものの和に分解するには，例えば次のような函数を用いればよい：

$$\chi_+(t)=\frac{e^t}{1+e^t},\qquad \chi_-(t)=\frac{1}{1+e^t} \tag{8.2.12}$$

とし，多重符号 $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$, $\sigma_j=\pm1$ に対して

$$\chi_\sigma(z)=\chi_{\sigma_1}(z_1)\cdots\chi_{\sigma_n}(z_n) \tag{8.2.13}$$

とおく．各 $\chi_\sigma(z)$ は閉第 σ 象限を固有部分錐として含む任意の錐の外で実軸方

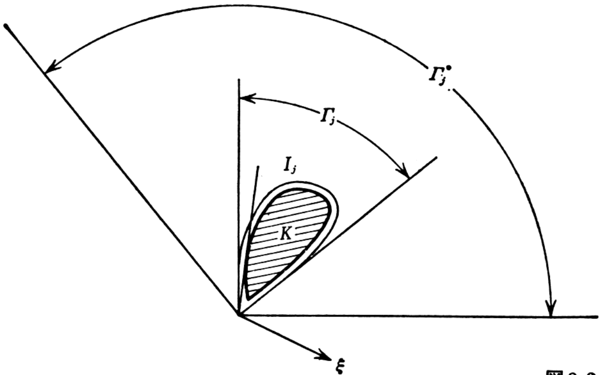


図 8.2

向に指数減少し，

$$\sum_{\sigma} \chi_\sigma(z) = 1$$

が成り立つ．すなわち $\{\chi_\sigma(z)\}$ は増大度に関して“1の分割”となっている．これを用いて与えられた $g(\zeta)$ を

$$g(\zeta) = \sum_{\sigma} \chi_\sigma(\zeta) g(\zeta) \tag{8.2.14}$$

と分解しよう．命題 8.2.4 と上の注意により $\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_\sigma 0$ 型の無限小楔である管状領域 $\boldsymbol{R}^n + iI_\sigma$ が存在し，$F_\sigma(z) = \mathcal{F}^{-1}(\chi_\sigma(\zeta)g(\zeta))$ は $\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n + iI_\sigma)$ の元となる．故に $g(\zeta)$ の逆 Fourier 変換として指数減少超函数 $\mathcal{F}^{-1}g = \sum F_\sigma(x + i\Gamma_\sigma 0)$ が求まった．

逆 Fourier 変換の定義から命題 8.2.4 の特別な場合として $g \in \tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n + i\{|\eta| < \delta\})$ に対し $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g) = \sum \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\chi_\sigma g)) = \sum \chi_\sigma g = g$ が直ちに確かめられる．同様に $f \in \mathcal{Q}^{-\delta}$ に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$ を示そう．それには f が $F(z) \in \tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n + iI)$ による単項表示 $F(x + i\Gamma 0)$ を持つ場合を調べれば十分である．実の線型座標変換で Γ は閉じた第1象限を固有部分錐として含むと仮定できる．このとき $g(\zeta) = (\mathcal{F}f)(\zeta)$ は第1象限の外で指数減少しており，何も1の分割(8.2.13)を用いなくても命題 8.2.4 により逆 Fourier 変換で元の f に戻るわけであるが，上の定義によりこれを敢えて1の分割を用いて計算した場合も同じ結果となることを確かめる必要がある．しかしそれはこの場合，和(8.2.14)が管状領域 $\boldsymbol{R}^n + iI$ に対応する評価(8.2.7)を満たすもの同士のものなので，逆 Fourier 変換の線

型性により明らかである．実際，逆変換 $F_\sigma=\mathscr{F}^{-1}(\chi_\sigma g)$ を上の定義により計算したものはひとまず $\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+iI_\sigma)$ の元となるが，これは $\chi_\sigma g$ の所与の評価により $\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ の元まで解析接続されるから，指数減少超函数の表示変形の意味で

$$\sum F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0)=\sum F_\sigma(x+i\Gamma 0)=\left[\sum \mathscr{F}^{-1}(\chi_\sigma(\zeta)g(\zeta))\right]_{z\mapsto x+i\Gamma 0}$$

となる．ここで最後の $\mathscr{F}^{-1}$ は命題 8.2.4 の意味でのものであり，従ってその線型性により $\sum$ と $\mathscr{F}^{-1}$ を交換すれば $[\mathscr{F}^{-1}g(\zeta)]_{z\mapsto x+i\Gamma_0}=F(x+i\Gamma 0)$ が得られる．証了．

上の証明の最後の部分から，次のことがわかる．

系 8.2.7　$g(\zeta)\in\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|\eta|<\delta\})$ は

$$g(\zeta)=\sum_{j=1}^{N}g_j(\zeta)$$

と分解され，ここに各 $g_j(\zeta)\in\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|\eta|<\delta\})$ は閉凸錐 $\Gamma_j{}^\circ$ を固有部分錐として含む任意の錐の外で実軸方向に指数減少するようなものとする．このとき，$\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_j 0$ 型の管状領域 $\boldsymbol{R}^n+iI_j$ が存在して $F_j(z)=\mathscr{F}^{-1}g_j(\zeta)\in\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+iI_j)$ となり，かつ

$$\mathscr{F}^{-1}g=\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$$

が成り立つ．

実際，上の証明の最後の部分から，各 g_j については命題 8.2.4 の意味で直接計算した $F_j(z)=\mathscr{F}^{-1}g_j(\zeta)\in\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+iI_j)$ が定理 8.2.6 の意味の逆変換としての指数減少超函数 $\mathscr{F}^{-1}g_j$ の定義函数となることがわかる．故に定義の線型性により一般の場合も成り立つ．

上で $\mathscr{F}^{-1}$ を定義するのに用いた分割函数 (8.2.13) は象限分割に対応するものであるが，任意の $\alpha\in\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ に対し $\chi_\pm(\alpha z)$ は超平面 $\alpha z=0$ を境に空間を指数減少する二つの部分に分割する役割を持つので，因子の個数を増やすことにより $\boldsymbol{R}^n$ の任意の凸閉多角形分割に対応した 1 の分割函数を構成することができる．上の系によれば，逆 Fourier 変換はそのような任意の 1 の分割に基いて計算することができるわけだが，その結果が指数減少超函数としてこのような分割の選び方に依らずに定まることは，増大度に関する分割が逆 Fourier 変換でちょうど指数減少超函数としての表示の変形に対応していることから直接確か

めることもできる．なお具体的に $\mathcal{F}^{-1}$ を計算するには後述（補題 8.4.7）のようにもっと便利な方法があることを注意しておこう．

指数減少超函数に対する定積分の応用としてもう少し複雑なものに畳み込みがある．

命題 8.2.8 $f, g \in \mathcal{Q}^{-\delta}$ に対して畳み込み $f*g$ が定義され，再び $\mathcal{Q}^{-\delta}$ の元となる．$*$ は可換律及び結合律を満たし，また $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$ が成り立つ．

証明 $f=\sum F_j(x+i\Gamma_j0)$，$g=\sum G_k(x+i\Delta_k0)$ とするとき，畳み込みは

$$f*g = \sum_{j,k} F_j(x+i\Gamma_j0)*G_k(x+i\Delta_k0),$$
$$F_j(x+i\Gamma_j0)*G_k(x+i\Delta_k0) = \int F_j(z-w)G_k(w)dw \tag{8.2.15}$$

で計算される．ここで被積分函数中の変数 $z-w$, w はそれぞれ $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_j0$, $\boldsymbol{R}^n+i\Delta_k0$ の中を動く．故に z は $\boldsymbol{R}^n+i(\Gamma_j+\Delta_k)0$ 型の管状領域を動くことができ，積分の広義一様収束性より結果はそこで正則となる．この積分を直接評価すればそれが再び型 $-\delta$ で指数減少することを示せるが，それより先に積分の絶対収束性を用いて命題 8.1.4 d) と同様の計算で

$$\mathcal{F}(F_j(x+i\Gamma_j0)*G_k(x+i\Delta_k0)) = \mathcal{F}(F_j(x+i\Gamma_j0))\cdot\mathcal{F}(G_k(x+i\Delta_k0)) \tag{8.2.16}$$

を確かめておけば，Fourier 像が再び管状領域 $\boldsymbol{R}^n+i\{|\eta|<\delta\}$ で正則となることからもそれがわかる．可換律及び結合律の験証はコンパクト台の超函数の場合と同じ方針でできるので省略する．証了．

§3 緩増加超函数の Fourier 変換

前節までは Fourier 変換の結果が ξ の函数として各点毎にその値を計算できるような場合のみを考えて来た．しかし，超函数論的 Fourier 変換論としては Fourier 変換の結果も ξ の超函数として意味が付けば十分であろう．すなわち，無限区間上の積分 (8.0.1) が ξ の超函数として収束しさえすればよい．収束を考えるときは定義函数に戻れの原則に従えば，これは積分 (8.0.1) をいくつかの部分に分割したとき，その各々がある無限小楔に属する ζ につき正則函数として収束することと解釈するのが自然であろう．前節で定義した逆 Fourier 変換には既にそのような考え方が含まれているが，ここで次のようなより広いクラスの超函数を Fourier 変換の対象として導入しよう．

定義 8.3.1　$\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_j0$ 型の管状領域 $\boldsymbol{R}^n+iI_j$ 上の緩増加正則函数 $F_j(z)\in\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+iI_j)$ を定義函数として $f(x)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j0)$ の形に表示される超函数を**緩増加 Fourier 超函数**，或は単に緩増加超函数と呼ぶ．その全体を $\mathcal{Q}$ で表わす．緩増加超函数の表示の変形はやはり緩増加正則函数の範囲内でのみ許される．

緩増加超函数は佐藤[1]において **Fourier 超函数**という名で導入された．本書ではこの用語を一般に Fourier 変換論の対象となる超函数概念の総称として用いている．ただし混乱が無い限り今後は主に緩増加超函数のことを指して単に Fourier 超函数とも呼ぶことにしよう．

命題 8.3.2　緩増加超函数 $F(x+i\Gamma0)$ は固有閉凸錐 Δ° の外で指数減少するとせよ．正確に言うと，$\boldsymbol{R}^n+i\Gamma0$ 型の管状領域 $\boldsymbol{R}^n+iI$ が存在し，$F(z)\in\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ は Δ° を固有部分錐として含む任意の錐の外部に $\mathrm{Re}\,z$ を制限したとき，$\delta>0$ を適当に選べば，$y\in I$ について広義一様に

$$|F(z)|=O(e^{-\delta|\mathrm{Re}\,z|}) \tag{8.3.1}$$

の形の評価を満たすとせよ．このとき任意の $y\in I$ について

$$G(\zeta)=\int_{\mathrm{Im}\,z=y}e^{-iz\zeta}F(z)dx \tag{8.3.2}$$

とおけば，$\boldsymbol{R}^n-i\Delta0$ 型のある管状領域 $\boldsymbol{R}^n-iJ$ を動く ζ について積分は広義一様収束し，$G(\zeta)\in\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n-iJ)$ となる．更に，$G(\zeta)$ は Γ° の外で(正確には上と同様の意味で)指数減少する．故に

$$\mathcal{F}(F(x+i\Gamma0))=G(\xi-i\Delta0) \tag{8.3.3}$$

が緩増加超函数として確定する．

証明　コンパクト集合 $L\subset-\Delta$ に対し，Δ° を固有部分錐として含む錐を十分 Δ° に近く選べば，その中の x と $\eta\in L$ なる ζ に対してはある $c_L>0$ について

$$\mathrm{Re}(-iz\zeta)=x\eta+y\xi\le-c_L|x|+y\xi \tag{8.3.4}$$

が成り立つ．故にこの部分に対する積分(8.3.2)は $F(z)$ が緩増加なことから(任意に固定した y に対して)$\zeta\in\boldsymbol{R}^n+iL$ につき一様収束する．それ以外の x に対する積分は，$F(z)$ が(8.3.1)を満たしていることから，(やはり任意に固定した y に対して) $\delta_L>0$ を適当に選べば，$|\eta|<\delta_L$ なる範囲の ζ につき広義一様に収束する．故に(8.3.2)は全体として $\boldsymbol{R}^n+iL\cap\{|\eta|<\delta_L\}$ で広義一様収束し，ζ

の正則函数を定める．$L \Subset -\varDelta$ をいろいろ動かして和集合をとれば，$\boldsymbol{R}^n - i\varDelta 0$ 型の管状領域 $\boldsymbol{R}^n - iJ$ が得られる．こうして計算された $G(\zeta)$ が y の選び方に依らぬことは Cauchy の積分定理から明らかである．故に y を実軸に近づければ，因子 $e^{y\xi}$ から $G(\zeta)$ が ξ につき緩増加なことがわかる．(ここで (8.3.1) の δ が y には依存していないことに注意せよ．y に依存して変化するのは指数函数の前の定数だけである.) 最後に，ξ が Γ° を固有部分錐として含む錐の外を動くときは，$y \in I$ をどのように選んでも，そのような ξ について一様に $y\xi \leq -\delta_y|\xi|$ が成り立つので，$G(\zeta)$ はそこで指数減少となる．証了．

さて，いよいよ一般の緩増加超函数 $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ に対して Fourier 変換を定義しよう．

$$\mathscr{F}f = \sum \mathscr{F}(F_j(x+i\Gamma_j 0)) \tag{8.3.5}$$

と定めればよいから，単項表示の超函数 $f(x) = F(x+i\Gamma 0)$ に限って論ずればよい．これを上の命題で取り扱ったような，ある閉凸錐の外で指数減少する超函数の有限和に分解することができれば，その Fourier 変換は命題で論じた方法で各項毎に計算できるであろう．このような分解としては前節で導入した 1 の分割 (8.2.13) によるものが最も初等的である．すなわち，

$$F(z) = \sum_\sigma \chi_\sigma(z) F(z) \tag{8.3.6}$$

において各項 $\chi_\sigma(z)F(z)$ は閉第 σ 象限の外で指数減少し，従ってそれから命題 8.3.2 により計算した $G_\sigma(\zeta)$ は $\boldsymbol{R}^n - i\Gamma_\sigma 0$ 型のある管状領域上の緩増加正則函数となる．故に

$$\mathscr{F}(F(x+i\Gamma 0)) = \sum_\sigma G_\sigma(\xi - i\Gamma_\sigma 0) \tag{8.3.7}$$

が確定する．なお，$\chi_\sigma(z)F(z)$ はいずれももとの $F(z)$ と同じ領域で緩増加正則なので，$G_\sigma(\zeta)$ はすべて Γ° の外で指数減少となる．

補題 8.3.3　(8.3.5)—(8.3.7) により緩増加超函数の Fourier 変換が緩増加超函数として確定する．更に，(8.3.6) の代わりに固有閉凸錐の外で指数減少するものへの任意の分解を用いても同じ結果が得られる．

証明　Fourier 変換の結果が境界値表示 (8.3.5) の選び方によらぬことは，その後の定義がすべて線型にできていることから直ちにわかる．次に単項表示の超函数 $F(x+i\Gamma 0)$ については，$F(x)$ が最初からある閉凸錐 $\varDelta^\circ$ の外で指数減少

していれば1の分割を用いなくとも直接命題 8.3.2 によりその Fourier 変換が計算できる．それを敢えて上のような1の分割を用いて計算したとき，その結果が一致することは，命題 8.3.2 における Fourier 変換の線型性を用いて定理 8.2.6 の証明の最後の部分と全く同様にして確かめられる．このことから，系 8.2.7 と同様にして $F(x+i\Gamma 0)$ の Fourier 変換が (8.3.6) 以外の任意の分解を経由しても同じ結果に到達することがわかる．証了．

以上の議論は逆 Fourier 変換 $\mathscr{F}^{-1}$ についても殆どそのまま通用する．ただし指数の符号の違いのため，Δ° の外で指数減少する緩増加超函数 $F(x+i\Gamma 0)$ の逆 Fourier 変換は $-\Gamma^\circ$ の外で指数減少する緩増加超函数 $G(\xi+i\Delta 0)$ となる．

定理 8.3.4 緩増加超函数に対し反転公式 $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}=\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}=id$ が成り立つ．従って Fourier 変換 $\mathscr{F}:\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}$ は $\mathcal{Q}$ の自己同型写像となる．

証明 どちらでも同じことだから，$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}f=f$ を示そう．一般の場合の Fourier 変換の定義により，f が命題 8.3.2 で論じたような定義函数 $F(z)$ を持つ場合を考えれば十分である．このとき $\mathscr{F}(F(x+i\Gamma 0))=G(\xi-i\Delta 0)$ となり，$G(\zeta)$ は Γ° の外で指数減少するので，上の補題により $\mathscr{F}^{-1}(G(\xi-i\Delta 0))$ の定義函数は直接積分

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathrm{Im}\,\zeta=\eta} e^{iz\zeta}G(\zeta)d\zeta$$

で計算してもよい．ここに $\eta\in J$ は任意である．これを実軸上の急減少実解析函数に対する Fourier 変換の形に書き直してみよう．(8.3.2) により上の積分は

$$\begin{aligned} e^{-x\eta}\mathscr{F}_\xi{}^{-1}(e^{-y\xi}G(\xi+i\eta))(x) &= e^{-x\eta}\mathscr{F}_\xi{}^{-1}(e^{-y\xi}\cdot e^{y\zeta}\mathscr{F}_x(e^{x\eta}F(x+iy))) \\ &= e^{-x\eta}\mathscr{F}_\xi{}^{-1}\mathscr{F}_x(e^{x\eta}F(x+iy)) = e^{-x\eta}\cdot e^{x\eta}F(x+iy) \\ &= F(x+iy) \end{aligned}$$

となり元に戻ることがわかる．ここで最後の段階において急減少実解析函数 $x\mapsto e^{x\eta}F(x+iy)$ に対する古典的な反転公式（補題 8.2.3）を用いたことは言うまでもない．証了．

以上で理論的には Fourier 超函数に対する Fourier 変換の定義が整った．しかしながら，実際に与えられた Fourier 超函数に対して (8.2.12) のように複雑な減少因子を用いて Fourier 変換の計算を実行するのは容易なことではない．

そのため次の補題を用意しよう.

補題 8.3.5　緩増加超函数 $F(x+i\Gamma 0)$ の定義函数 $F(z)\in\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ は，実軸の座標面の集合 $x_1x_2\cdots x_n=0$ の近傍まで緩増加な増大度を保ちながら連続に延長できるとする．このとき D_σ を第 σ 象限の境界は固定し内部は $\boldsymbol{R}^n+iI$ の中に漸近的に実軸に平行となるように変形した任意の積分路とすれば，

$$G_\sigma(\zeta)=\int_{D_\sigma}e^{-iz\zeta}F(z)dz \tag{8.3.8}$$

は管状領域 $\boldsymbol{R}^n-i\Gamma_\sigma$ で緩増加正則となり

$$\mathcal{F}(F(x+i\Gamma 0))=\sum_\sigma G_\sigma(x-i\Gamma_\sigma 0) \tag{8.3.9}$$

が成り立つ.

証明　(8.3.8) で定まる $G_\sigma(\zeta)$ が楔 $\boldsymbol{R}^n-i\Gamma_\sigma$ の全体で緩増加正則となることは，積分路 D_σ を動く z に対し $x=\mathrm{Re}\,z\in\overline{\Gamma_\sigma}$，従って $\eta\in-\Gamma_\sigma$ なる限り $|\eta|$ がどんなに大きくても $e^{x\eta}$ が指数減少因子となることからわかる．故に (8.3.9) の右辺で緩増加超函数が一つ定まる．等号を示そう．積分の線型性により必要なら分割 (8.3.6) を用いれば，$F(\zeta)$ が始めからある閉凸錐 Δ° の外で指数減少すると仮定できる．このとき補題 8.3.3 により $\mathcal{F}(F(x+i\Gamma 0))$ は

$$G(\zeta)=\int_{\mathrm{Im}\,z=y}e^{-iz\zeta}F(z)dx$$

で計算される定義函数の境界値 $G(\xi-i\Delta 0)$ となる．ここに $y\in I$ である．しかるに，$F(z)$ の与えられた連続性により，この積分路を Poincaré の定理（第 2 章定理 2.1.13）で変形し

$$G(\zeta)=\sum_\sigma\int_{D_\sigma}e^{-iz\zeta}F(z)dz$$

と書き直すことができる．この右辺の諸項のうち，第 1 象限に対するものは (8.3.8) の対応項と全く同じであるが，その他の項についても (8.3.8) のものを被積分函数の指数減少性により第 1 象限まで解析接続したものとなっている．故に境界値としては同一の超函数 (8.3.9) が定まる．証了.

上の補題では象限分割の場合について述べたが，実際の応用に当っては適宜一般化して用いるとよい．例えば，分割の方向を変えるとか，分割の中心を原点以外にとる等．D が実軸の中に境界 ∂D を持つ有界積分路で，$F(z)$ が ∂D の近傍まで連続に延長される場合，積分

$$\int_D e^{-iz\zeta}F(z)dz \tag{8.3.10}$$

は定理 8.1.1 の前半の証明と同様実軸方向に緩増加な整函数となる．故に，有界な部分における積分路分割の変更は，Fourier 変換の結果として定まる緩増加超函数にこのような整函数による表示の変形としての影響しか及ぼさない．

例 8.3.6 (Poisson の和公式)

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)\right) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi n) \tag{8.3.11}$$

無限和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$ は局所有限和なので，その通常の超函数としての解釈は明白である．我々は後で (§6) これが Fourier 超函数としても自然に解釈できることを示すが，ここでは天下り的に

$$F(z) = \frac{1}{1-e^{2\pi iz}} \tag{8.3.12}$$

という緩増加正則函数の実軸上下方からの境界値の差として定義されるものとしておこう．(この函数が x につき周期 1 の周期函数であることと，$z=n$ の近傍で

$$\frac{1}{1-e^{2\pi iz}} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-n} + \text{正則} \tag{8.3.13}$$

の形をしていることから，その正当性は想像されよう．) さて，(8.3.12) は格子点を除き実軸で上下に正則につながっているので，例えば $x=1/2$ の点において実軸 $\boldsymbol{R}$ を左右二つの半直線 (即ち一次元固有錐) に分割し上の補題を適用することができる．故に $\mathcal{F}(F(x+i0)-F(x-i0))$ は

$$G_\pm(\zeta) = \int_{D_\pm} e^{-iz\zeta}F(z)dz, \qquad \pm\operatorname{Im}\zeta < 0 \text{ において}, \tag{8.3.14}$$

とおくとき，$G_+(\xi-i0)+G_-(\xi+i0)$ で求まる．ここに積分路 $D_\pm$ は $F(z)$ に対し実軸の上下方においてそれぞれ上の補題に従って構成した積分路を符号を考慮して一つにまとめたもので，図 8.3 のような形をしている．この積分は留数定理と等比級数の和を用いて実際に計算できる．即ち，(8.3.13) に留意しつつ積

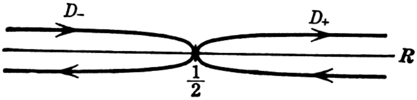


図 8.3

分路を無限遠にもってゆけば，

$$G_+(\zeta) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-in\zeta}) = \frac{e^{-i\zeta}}{1-e^{-i\zeta}} = -\frac{1}{1-e^{i\zeta}},\ \mathrm{Im}\,\zeta<0\text{ において},$$

$$G_-(\zeta) = -\sum_{n=-\infty}^{0}(-e^{-in\zeta}) = \sum_{n=0}^{\infty}e^{in\zeta} = \frac{1}{1-e^{i\zeta}},\ \mathrm{Im}\,\zeta>0\text{ において},$$

となり，$F(z)$ と同じような形の函数が得られる．故に Fourier 変換の答は

$$G_+(\xi-i0)+G_-(\xi+i0) = F\left(\frac{\xi}{2\pi}+i0\right)-F\left(\frac{\xi}{2\pi}-i0\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x}{2\pi}-n\right)$$

となる．これが(8.3.11)の右辺に等しいことは $\delta(x)$ の同次性により直観的には明らかだが，厳密な験証は後にまわそう(問 8.6.2 参照).

§4　種々の超函数の間の関係

今まで次々と新しいクラスの超函数を導入してきたので読者の頭の中も大部混乱してきたことであろう．そこでこの節ではこれらの間の相互関係をはっきりさせよう．

定理 8.4.1　台がコンパクトな超函数の全体がなす空間 $\mathcal{B}_*(\boldsymbol{R}^n)$，型 $-\delta$ の指数減少超函数の空間 $\mathcal{Q}^{-\delta}$，緩増加超函数の空間 $\mathcal{Q}$ は自然な埋め込み写像により次のような部分空間の関係をなす．

$$\mathcal{B}_*(\boldsymbol{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{Q}^{-\delta}\hookrightarrow\mathcal{Q}$$

また，これらの空間に対する Fourier 変換の定義は埋め込み写像と両立する．

証明　コンパクトな台を持つ超函数 $f(x)$ は当然遠方で指数減少するはずだが，定義函数でそれを示すにはなお一工夫が要る．第3章 §5 で計算した定義函数は遠方で指数減少しないので，例えば次のようなものをとる必要がある．

$$F_\sigma(z) = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(w)e^{-(z-w)^2}W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw \tag{8.4.1}$$

$e^{-x^2}\delta(x)=\delta(x)$ なので，やはり $f(x)=\sum F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0)$ が成り立つ．この $F_\sigma(z)$ が $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma 0$ 型のある管状領域において(任意の型で)指数減少することは明であろう．こうして定まる写像 $\mathcal{B}_*(\boldsymbol{R}^n)\to\mathcal{Q}^{-\delta}$ が単射なことは，$\mathcal{Q}^{-\delta}$ における 0 の定義の方が $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ における 0 の定義よりも強い(前者は調節に使える函数に増大度が付いている)ことから直ちにわかる．更に，命題 8.2.8 と同様の計算で

$$\sum_\sigma \mathcal{F}(F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0)) = \sum_\sigma \mathcal{F}(f(x))\cdot\mathcal{F}(e^{-x^2}W(x,\overline{\Gamma_\sigma}))$$

$$= \mathcal{F}(f(x))\cdot \sum_{\sigma} \mathcal{F}(e^{-x^2}W(x,\overline{\Gamma_\sigma}))$$

となるが，ここで $\mathcal{F}(e^{-x^2}W(x,\overline{\Gamma_\sigma}))$ を計算するのに遠方において積分路を実軸上に変形し直せば，これらは互いに打ち消し合い結局有限領域上の定積分となって $\sum_{\sigma} \mathcal{F}(e^{-x^2}w(x,\overline{\Gamma_\sigma}))=\mathcal{F}(e^{-x^2}\delta(x))=\mathcal{F}(\delta)=1$ が得られる．故に上で定めた埋め込みは Fourier 変換と両立する．一方，$\mathcal{B}_*(\boldsymbol{R}^n)$ の Fourier 像は定理 8.1.1 により実軸方向に緩増加な整函数の空間となるから，それを $\mathcal{Q}^{-\delta}$ の Fourier 像たる $\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<\delta\})$ へ埋め込む方法は確定している．即ち，自然な制限写像がそれである．故にここで定義した埋め込み $\mathcal{B}_*(\boldsymbol{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{Q}^{-\delta}$ もまた定義函数の計算の仕方にはよらぬ自然なものであることがわかる．

次に，写像 $\mathcal{Q}^{-\delta}\to\mathcal{Q}$ は定義函数をそのまま流用して定義できる．それが Fourier 変換と両立することも定義から明らかである．問題は単射性の証明である．増大度の還元は難しい議論になるので，Fourier 変換を利用しよう．Fourier 変換はどちらの空間へも一対一に作用しているので，それらの像空間を考え，$F(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<\delta\})$ が緩増加超函数として 0 ならば実は $F(z)\equiv 0$ であることを示せばよい．これも直接やるのは $\mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{B}$ の単射性の証明と同様ややこしくなるので，更に工夫しよう．$F(z)$ が緩増加超函数として 0 に変形される手続きの全体に $e^{-\sqrt{z^2+1}}$ を乗ずれば，それはそっくり指数減少正則函数 $e^{-\sqrt{z^2+1}}F(z)$ が指数減少超函数として 0 に帰着される手続きとなる．故にその Fourier 変換は 0 となるが，指数減少正則函数については古典的な反転公式があるので結局 $e^{-\sqrt{z^2+1}}F(z)\equiv 0$，すなわち $F(z)\equiv 0$ となる．証了．

上の証明の最後の部分から，次のこともわかる．

系 8.4.2 急減少実解析函数の空間 $\mathcal{P}_*$ (定義 8.2.1)，及び**緩増加実解析函数**の空間

$$\mathcal{P} = \varinjlim_{\delta\downarrow 0} \widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<\delta\}) \tag{8.4.2}$$

は順に $\mathcal{Q}$ の中へ自然に埋め込まれる：

$$\mathcal{P}_* \hookrightarrow \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{Q} \tag{8.4.3}$$

この埋め込みももちろん Fourier 変換と両立する．さて勝手な二つの緩増加超函数に対しては畳み込みは定義できないが，その一方がある程度減少していれば可能である．特に

命題 8.4.3 緩増加超函数 $f(x)$ と指数減少超函数 $g(x)$ に対し畳み込み

$$f*g=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x-y)g(y)dy$$

が定義され，緩増加超函数となる．また，緩増加超函数と緩増加実解析函数との積も定まり，緩増加超函数となる．更にこれらは Fourier 変換により

(8.4.4) $$\mathscr{F}(f*g)=\mathscr{F}(f)\cdot\mathscr{F}(g)$$

という式で対応する．

証明 $f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j0)$, $g(x)=\sum g_k(x+i\varDelta_k0)$ に対し $f*g$ は (8.2.15) と同じ式で定義する．一方が指数減少しているためその積分が収束するのである．この場合も (8.2.16) 式を先に確かめておけば結果が緩増加になることが見易い．(8.2.16) 式は F_j について線型だから，必要なら指数減少因子で分割することにより $F_j(z)$ はある固有閉凸錐の外で指数減少すると仮定して証明すれば十分である．そうすれば計算は前と同様になる．なお積の方はもちろん緩増加実解析函数，すなわち $\exists\delta>0$ について $\widetilde{\mathscr{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<\delta\})$ に属する函数を緩増加超函数の各定義函数に乗ずればよい．この乗法で定義函数の定義域は δ に応じて少し減るかもしれないが，緩増加の性質は明らかに不変である．証了．

問 8.4.1 公式 (8.4.1) は緩増加超函数 $f(x)$ に対しても意味を持ち，$\{F_\sigma(z)\}$ は $f(x)$ の一組の（標準的な）緩増加定義函数を与えることを示せ．

コンパクトな台の超函数 $f(x)$ の場合に命題 8.1.4 で与えたその他の諸公式についても，一般の Fourier 超函数に対して成り立つことは明らかであろう．（無限階の微分作用素 $J(D)$ の作用については少し後で詳しく調べる．）

次に Fourier 超函数と通常の超函数との関係を述べよう．Fourier 超函数 $f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j0)$ が与えられたとき，この定義函数をそのまま流用してこれを $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数と思うことができる．Fourier 超函数に対する表示の変形手続きは途中に出てくる函数の増大度を忘れればそのまま通常の超函数に対する変形手続きとなるので，これにより

(8.4.5) $$\mathcal{Q}\to\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$$

という写像が確定する．これは明らかに埋め込み $\mathcal{B}_*(\boldsymbol{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{Q}$ に対して左逆と

なっている．一般の超函数との関係はもう少し複雑である．まず

定理 8.4.4　写像(8.4.5)は全射である．即ち，任意の $f(x)\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ に対しその超函数としての定義函数に緩増加なものがとれる．

証明　$\mathcal{B}$ の脆弱性を用いて $f(x)$ を次のような局所有限和に分解しよう．

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x),\qquad \operatorname{supp}f_k\subset\{k-1\leq|x|\leq k\} \tag{8.4.6}$$

各 $f_k(x)$ の定義函数を

$$F_{k,\sigma}(z)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f_k(w)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw \tag{8.4.7}$$

で計算するとき，各 σ について

$$F_\sigma(z)=\sum_{k=1}^{\infty}F_{k,\sigma}(z) \tag{8.4.8}$$

が $\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma 0$ 型の管状領域で広義一様収束し，しかも和 $F_\sigma(z)$ が実軸方向に緩増加となれば都合がよい．(8.4.8)の各項は確かに実軸方向に緩増加だが，分解(8.4.6)を勝手にとったのでは級数(8.4.8)は収束するとは限らない．そこでこの分解を適当に修正することを考えよう．積分(8.4.7)は $f_k(x)$ の定義函数 $F_{k,\sigma}(z)$ 自身を用いて

$$F_{k,\sigma}(z)=\sum_{\tau}\int_{D_{k,\tau}}F_{k,\tau}(w)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw \tag{8.4.9}$$

という複素積分で計算される．ここに $D_{k,\tau}$ は $\operatorname{supp}f_k$ の実近傍を境界は固定して内部を開集合 $U_\sigma{}^{\operatorname{supp}f_k}$ 内に変形したような積分路である．ここに記号 $U_\sigma{}^K$ は，第4章§1において，$\mathcal{B}[K]$ の位相を定義するために導入したものであった．そこでの位相の定義によれば，$\max_{\tau}\sup_{z\in D_{k,\tau}}|F_{k,\tau}(z)|$ は空間 $\mathcal{B}[\{k-1\leq|x|\leq k\}]$における一つの連続セミノルムとなる．一方，定理4.1.14により $\mathcal{B}[\{|x|=k\}]$は $\mathcal{B}[\{k-1\leq|x|\leq k\}]$の中で稠密だから，前者の元を適当に差引くことにより f_k に対するこのセミノルムを，例えば $1/k!$ 以下にすることができる．この調節に用いた元は同時に f_{k+1} に加えておく．

そこで今 $D_{k,\tau}$ を $\operatorname{supp}f_k$ の複素 $1/k$-近傍の中に選び，上の操作を $k=1$ から始めて順に帰納的に行なえば，局所有限和への新しい分割(8.4.6)で，各 $f_k(x)$ の定義函数が

$$\max_{\tau} \sup_{w \in D_{k,\tau}} |F_{k,\tau}(w)| \le \frac{1}{k!}$$

を満たすものが得られる．z が $U_\sigma{}^{\mathrm{supp} f_k}$ の境界から $2/k$ だけ内側を動くとき，公式(8.4.9)とこの評価により

$$|F_{k,\sigma}(z)| \le \frac{1}{k!}\sum_{\tau} \sup_{w \in D_{k,\tau}} |W(z-w, \overline{\Gamma_\sigma})|$$

$$\le \frac{C}{k!} \sup_{|w| \le k+1} \frac{(|z|+|w|)^n}{|z-w|^n} \le C' \frac{k^{2n}}{k!}(|z|+1)^n$$

となる．ここで第2行目へ移るとき Radon 分解核 $W(z,\omega)$ の具体的な形(2.3.25)を用いたのは言うまでも無い．この評価から，級数(8.4.8)が $\boldsymbol{R}^n + i\Gamma_\sigma 0$ 型の管状領域を含む領域 $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_\sigma{}^{\mathrm{supp} f_k}$ において広義一様収束し，緩増加正則函数 $F_\sigma(z)$ を定めることがわかる．更に，この級数を例の通り $1 \le k \le N$ の部分と $k \ge N+1$ の部分とに分けてみれば，後者は $|x|<N$ のある近傍でも広義一様収束し，そこでは超函数0を定めていることがわかる．故に，通常の超函数としては

$$\sum_{\sigma} F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0)|_{\{|x|<N\}} = \sum_{k=1}^{N} f_k(x)|_{\{|x|<N\}} = f(x)|_{\{|x|<N\}}$$

となっている．N は任意だから $\{F_\sigma(z)\}$ はもとの $f(x)$ の定義函数でもあることがわかった．証了．

系 8.4.5　自然な写像 $\mathcal{Q}^{-\delta} \to \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ も全射となる．

実際，$f(x) \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ に対し $e^{\delta\sqrt{x^2+1}} f(x) \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ を考え，後者に対する緩増加な定義函数 $F(z)$ を上の定理により求めれば，$e^{-\delta\sqrt{z^2+1}} F(z)$ はもとの $f(x)$ に対する指数減少な定義函数となる．さて，これらの写像が単射ならば，任意の超函数の Fourier 変換が計算できることになって大変有難いのであるが，世の中にはそんなうまい話があるはずはなく，これらの写像には自明でない核が存在する．すなわち，折角 $f(x) \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ を $\mathcal{Q}$ の元まで“延長”しても，この核の部分のあいまいさが Fourier 変換の結果有限のところに影響として現われてくるので，もとの超函数自身の Fourier 変換が計算できたというわけにはゆかないのである．

例 8.4.6(森本-吉野)　函数 $\exp e^{z^2}$ は $x \to +\infty$ のとき $xy = \pm\frac{\pi}{2}$ という実軸に漸近する曲線上で急激に減少する．実際，この曲線上では

$$|\exp e^{z^2}| = \exp \mathrm{Re}\, e^{z^2} = \exp(e^{x^2-y^2}\cos 2xy) = \exp(-e^{x^2-y^2})$$

そこでこの二曲線を図 8.4 のように有限のところでつないで一本にした曲線 γ を用意し

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\exp e^{\zeta^2}}{\zeta - z}d\zeta, \quad z \text{ が } \gamma \text{ の外にあるとき,}$$

と置こう．Cauchy の積分定理により積分路を変形すれば，$F(z)$ が整函数となることが容易にわかる．故に通常の超函数としては $F(x+i0)-F(x-i0)=0$ である．ところで任意の $\delta>0$ に対し積分路 γ を，半直線 $x\geq 1/\delta$ の複素 δ-近傍に収まるところまで変形すれば，この近傍の外で $F(z)$ は有界なことがわかるから，$F(z)$ は同時に緩増加超函数 $F(x+i0)-F(x-i0)$ をも定義している．後者は 0 でないことを示そう．実際もしこれが 0 なら $F(z)$ は実軸上でも緩増加とならねばならぬが，Cauchy の積分公式により変数 z を γ の内部に持ち込めば

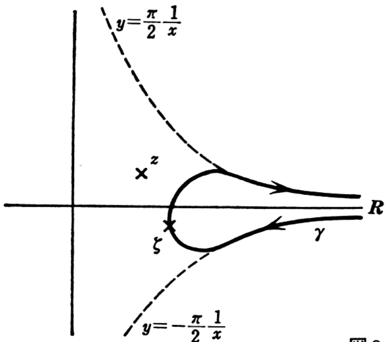


図 8.4

$$F(x) = \exp e^{x^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\exp e^{\zeta^2}}{\zeta - x}d\zeta$$

となる．γ を固定して $x\to+\infty$ としたとき，右辺の第 2 項は高々実軸と積分路との距離の逆数 $O(x)$ でしか増加しないから，$F(x)$ は緩増加であり得ないことがわかる．この $F(z)$ に $e^{-\delta\sqrt{z^2+1}}$ を掛ければ指数減少超函数における例が，また他の変数の δ 函数の定義函数を掛ければ多変数における例が得られる．

このように，Fourier 超函数と普通の超函数とは一応別のものであり，前者を後者に応用するにはある程度の修練が要る．これについては §5 の局所性の

ところで続きを述べよう．（系 8.5.8 の後の注意参照）

次に通常の函数との関係を調べよう．

補題 8.4.7 (Carleman) $f(x)$ は実軸上の緩増加連続函数とする．即ち，$\forall\varepsilon>0$ に対し $C_\varepsilon>0$ を適当にとれば

$$|f(x)| \le C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|} \tag{8.4.10}$$

が成り立つようなものとする．このとき $f(x)$ は自然に緩増加な超函数と見なせる．それは埋め込み $\mathcal{P}\hookrightarrow\mathcal{Q}$ と両立する．また，$F(x+i\Gamma 0)\in\mathcal{Q}$ が実軸まで緩増加連続函数 $F(x)$ として延長できるときは，$\mathcal{Q}$ の元として $F(x+i\Gamma 0)=F(x)$ が成り立つ．

証明 公式(8.4.1)により $f(x)$ の定義函数を直接計算することも可能だが，ここでは Fourier 変換を用いよう．

$$G_\sigma(\zeta)=\int_{\Gamma_\sigma} e^{-ix\zeta}f(x)dx, \qquad \mathrm{Im}\,\zeta\in-\Gamma_\sigma \tag{8.4.11}$$

とおけば，補題 8.3.5 の証明と全く同様にして $G_\sigma(\zeta)\in\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n-i\Gamma_\sigma)$ がわかり，

$$\mathcal{F}(f)=\sum_\sigma G_\sigma(\xi-i\Gamma_\sigma 0)$$

が求まる．分解の仕方を変えても定義函数が変形を受けるだけで $\mathcal{F}(f)$ は変わらない．更に $f(x)=f(x+i\Gamma 0)$ が緩増加実解析函数のときは $f(z)$ をそのまま定義函数と思って補題 8.3.5 が適用でき，従ってその緩増加超函数としての Fourier 変換は(8.4.11)で計算したものと一致する．故にこうして定義された埋め込みは $\mathcal{P}\hookrightarrow\mathcal{Q}$ とも両立している．最後の主張も全く同じ論法で示される．証了．

上の証明からもわかるように $f(x)$ は連続でなくても，局所有界(即ち $L_{\infty,loc}$ の元)ならよい．集合 Γ_σ の定義函数を $\chi_{\Gamma_\sigma}(x)$ とすれば，(8.4.11)は $\chi_{\Gamma_\sigma}(x)f(x)$ の Fourier 変換を計算しているわけだから，進んだ積分論を既知の読者はむしろ始めからそのような f を考える方が自然であろう．もちろん，$\chi_{\Gamma_\sigma}(x)$ の代わりに指数減少因子(8.2.13)を用いれば，理論上は連続函数の範囲で話が済む．結果が一致することは明らかであろう．さらに $f(x)$ が始めからある固有錐 $\varDelta^\circ$ の外で指数減少していれば，実軸上の積分

$$G(\zeta)=\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\zeta}f(x)dx \tag{8.4.12}$$

で $\mathscr{F}(f)=G(\xi-i\Delta 0)$ が計算できることも容易にわかる.

問 8.4.2　上の補題の $f(x)$ に対し通常の函数に対する積分の意味で(8.4.1)により計算した $\{F_\sigma(z)\}$ は上の補題で定義した $f(x)$ の埋め込み像と同じ緩増加超函数を定めることを確かめよ.

問 8.4.3　上の補題において $f(x)$ がさらに $\boldsymbol{R}^n$ 上の絶対積分可能な函数であるとき, $f(x)$ を Fourier 超函数と見なしたものの定義函数の一つが Cauchy 積分

$$F_\sigma(z)=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{f(w)dw}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)},\quad (z\in\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma) \tag{8.4.13}$$

で与えられることを示せ. これを f の**標準定義函数**と呼ぶ.

今までに述べたところで, 序章の最後に紹介した, $\mathscr{F}1$ の計算が完全に理論化された. §2 で述べた $\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+i\{|\eta|<\delta\})$ の元に対する $\mathscr{F}^{-1}$ の計算についても, 結果が指数減少超函数になることだけを理論的に抑えておけば, 実際の計算は緩増加超函数としてここに述べた方法でやる方が実用的である. ただし $\mathscr{F}1$ の計算を見ればわかるように, そうやって計算した定義函数は必ずしも指数減少にはなっていない.

問 8.4.4　$\alpha>0$ を定数とするとき L_1 級函数 $e^{-\alpha x}Y(x)$ の (指数減少) Fourier 超函数としての定義函数を求めよ. また $\mathscr{F}(e^{-\alpha x}Y(x))$, $e^{-\alpha x}Y(x)*e^{-\beta x}Y(x)$ を計算せよ.

問 8.4.5　次の Fourier 超函数の Fourier 変換を計算せよ：a) $(x\pm i0)^\lambda$, b) $x_\pm{}^\lambda$, c) $|x|^\lambda$, d) f. p. $1/x^m$, e) $\log|x|$.

もう少し複雑な Fourier 超函数を得るには, 上の補題で扱ったような $f(x)$ を “微分” すればよい. 実は Fourier 超函数にも無限階の微分作用素が働くことを示そう.

命題 8.4.8　定数係数局所作用素 $J(D)=\sum b_\alpha D^\alpha$ は Fourier 超函数 $f(x)$ に作用する. より詳しく言うと, $J(D):\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}$ (あるいは $J(D):\mathcal{Q}^{-\delta}\to\mathcal{Q}^{-\delta}$) となる. さらに

$$\mathscr{F}(J(D)f(x))=J(\xi)\cdot\mathscr{F}(f) \tag{8.4.14}$$

が成り立つ. また $g(x)$ を指数減少超函数とすれば

(8.4.15)　$$J(D)(f*g) = J(D)f*g = f*J(D)g$$

も成り立つ.

証明　$f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j0)$ に対し

$$J(D)f(x) = \sum J(D)F_j(x+i\Gamma_j0)$$

と定めるしかないので，一般に $F(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ に $J(D)$ を施した結果の遠方での増大度を見る問題になる. $J(D)F(z)=\sum b_\alpha D^\alpha F(z)$ が $F(z)$ の正則なところで広義一様収束して再び正則函数となることは既に前半で述べたが，そこでの計算(補題 1.8.1)を詳しく見直してみよう. (一変数でも多変数でも同様である.) Cauchy の不等式より

$$|b_\alpha D^\alpha F(z)| \le \frac{1}{2^{|\alpha|}}c_\delta \sup_{\mathrm{dis}(\zeta,z)\le\delta}|F(\zeta)|$$

であった. 故に今任意の $K\Subset I$ 及び任意の $\varepsilon>0$ に対し，この δ を十分小さく選べば，$z\in\boldsymbol{R}^n+iK$ に対して一様に

$$|e^{-\varepsilon|x|}J(D)F(z)| \le \sum_\alpha \frac{1}{2^{|\alpha|}}C_{K_\delta}\sup_{z\in\boldsymbol{R}^n+iK_\delta}|e^{-\varepsilon|x|}F(z)| = C_{K,\varepsilon}$$

となることがわかる. ここに $K_\delta\Subset I$ は K の(多重円板的な)δ-近傍である. これより $J(D)F(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ がわかる. 同様に $F(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ なら $J(D)F(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ もわかることに注意せよ.

次に等式(8.4.14)の験証であるが，両辺とも f に関して線型だから，必要なら指数減少因子(8.2.13)を用いて分解することにより f の定義函数 $F(z)$ は Δ° の外で指数減少していると仮定できる. このとき $\mathcal{F}(J(D)f(x))$ は然るべき虚部 $\mathrm{Im}\,\zeta\in\Delta$ を持つ ζ に対し任意の $y\in I$ について

$$G(\zeta) = \int_{\mathrm{Im}\,z=y} e^{-iz\zeta}J(D)F(z)dx = \int_{\mathrm{Im}\,z=y} e^{-iz\zeta}\sum_\alpha b_\alpha D^\alpha F(z)dx$$

で計算される函数の境界値 $G(\zeta-i\Delta 0)$ である. しかるに，指数減少因子 $e^{-iz\zeta}$ のお蔭で，この積分を十分大きな球 $|x|\le R$ で切った部分に一様収束の原理を適用し，次いで $R\to\infty$ とすれば，積分と無限和の順序が交換できることがわかる. こうして得られた各項にも同様の方法で部分積分を施せば，結局

$$G(\zeta) = \sum_\alpha\int_{\mathrm{Im}\,z=y} e^{-iz\zeta}b_\alpha D^\alpha F(z)dx = \sum_\alpha\int_{\mathrm{Im}\,z=y} b_\alpha(-D_z)^\alpha e^{-iz\zeta}F(z)dx$$

$$= \sum_{\alpha} b_\alpha \zeta^\alpha \int_{\mathrm{Im}\, z=y} e^{-iz\zeta} F(z)dx = J(\zeta) \int_{\mathrm{Im}\, z=y} e^{-iz\zeta} F(z)dx$$

となるが，これは確かに $J(\xi)\mathcal{F}(f)$ の定義函数である．(8.4.15)の験証はもっと直接的である．あるいは，今証明した公式を(8.4.4)と組み合わせても得られる．証了．

結局，緩増加な連続函数 $f(x)$ に局所作用素 $J(D)$ を施せば，いくらでも緩増加超函数の例が得られることがわかった．ところが実は緩増加超函数はこのようなもので尽きているのである．

定理 8.4.9 $\mathcal{Q}$ の任意の元は，ある緩増加連続函数 $f(x)$ と定数係数局所作用素 $J(D)$ により $J(D)f(x)$ の形に表わされる．

証明 $g(x)\in\mathcal{Q}$ を任意にとる．これが上のような形に表現できることを示そう．まず

$$\mathcal{F}(g) = \sum_{j=1}^{N} G_j(\xi + i\Gamma_j 0)$$

と緩増加な定義函数で表現する．ただし，この表現は既に指数減少因子による分解も行った後のものであるとし，$G_j \in \widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n + iI_j)$ は $\Delta_j{}^\circ$ の外で指数減少とする．今 $\{K_{j,k}\}_{k=1}^\infty$ は I_j を内側から取り尽すコンパクト集合の増大列とすれば，ξ の函数

$$h_{j,k}(\xi) = \sup_{\eta\in K_{j,k}} |G_j(\xi + i\eta)|, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

はいずれも実軸上緩増加，即ち劣指数型だから，補題 8.1.7—命題 8.1.6 が適用でき，従って

$$|G_j(\xi + i\eta)| \leq C_{j,k} |J(\xi + i\eta)|, \qquad \eta \in K_{j,k}$$

を満たすような劣指数型整函数 $J(\zeta)$ と数列 $\{C_{j,k}\}_{k=1}^\infty, j=1, \cdots, N$ が選べる．ここで $J(\zeta)$ の代わりに $J(\zeta)(1+\zeta^2)^n$ を採れば，$\forall\eta\in I_j$ について $G_j(\zeta)/J(\zeta)$ は $\mathrm{Im}\,\zeta=\eta$ 上で絶対積分可能となる．故にその逆変換

$$F_j(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathrm{Im}\,\zeta=\eta} e^{iz\zeta} \frac{G_j(\zeta)}{J(\zeta)} d\xi$$

は $\boldsymbol{R}^n + i\Delta_j 0$ 型の管状領域で緩増加正則かつ $-\Gamma_j{}^\circ$ の外で指数減少するのみならず，同様の評価を満たしつつ実軸まで連続に延長できる．こうして得られた連続函数 $F_j(x)$ は，補題 8.4.7 により緩増加超函数として $F_j(x + i\Delta_j 0)$ に等し

い．故に $f(x)=\sum F_j(x)$ とおけば，命題 8.4.8 より

$$g(x)=J(D)\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Delta_j0)=J(D)\sum F_j(x)=J(D)f(x)$$

となる．証了．

系 8.4.10　$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ の任意の元はある連続函数に定数係数局所作用素を施したものになっている．

実際，$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ の元を $\mathcal{Q}$ の元まで延長し，上の定理を適用して得られる表現を $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ に戻せばよい．自然な写像 $\mathcal{Q}\to\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ が $J(D)$ の作用と両立することは明らかである．

参考 8.1　上の結果は Schwartz の分布に対する構造定理と比較される．ただし Schwartz の分布の場合には，それが定義された開集合全域で一つの有限階微分作用素を用いた表現を作ることはできない．Schwartz の分布は局所的に有限階なだけであって，定義域の境界に近づくにつれて階数は無限に大きくなり得るからである．なお Schwartz の意味で緩増加な分布 $\mathcal{S}'$ の元は，高々多項式的増大度を持つ連続函数の有限階微分として表わすことができる．このことから $\mathcal{S}'\subsetneq\mathcal{Q}$ が直ちにわかる．

問 8.4.6　緩増加連続函数 $f(x)$ に対し，$f(x)/J(x)$ が絶対積分可能となるような J を選べば，Cauchy 積分，

$$F_\sigma(z)=\frac{J(z)}{(-2\pi i)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{f(w)/J(w)}{(z_1-w_1)\cdots(z_n-w_n)}dw,\qquad (z\in\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma)$$

で $f(x)$ の Fourier 超函数としての定義函数が計算できることを示せ．

§5 局　所　性

Fourier 超函数も $\tilde{\mathcal{O}}$ を用いてコホモロジー的に定義することができる．そのためには $\tilde{\mathcal{O}}$ のように遠方で増大度を持つ正則函数のクラスを層として把える必要がある．そこで Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ に各方向の無限遠点を付け加えてコンパクト化した位相空間

(8.5.1)　$$\boldsymbol{D}^n=\boldsymbol{R}^n\sqcup\boldsymbol{S}^{n-1}_\infty$$

を導入する．ただし無限遠点 $a\infty$ の基本近傍系は，$\boldsymbol{S}^{n-1}$ における a の近傍を Δ として

(8.5.2)　$$U_{\Delta,A}(a\infty)=\{x\in\boldsymbol{R}^n;x/|x|\in\Delta,|x|>A\}\sqcup\{x\infty;x\in\Delta\}$$

で与えられるものとする．つまり平たく言えば方向 a の錐状近傍の有限のとこ

ろを切捨て，代わりにこれらの方向の無限遠点をくっつけたものである．$\boldsymbol{R}^n$ のこのコンパクト化に伴い，$\boldsymbol{C}^n$ は $\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ という筒状の位相空間に埋め込まれる．以下，混乱を防ぐためある集合 V の $\boldsymbol{D}^n$ 或は $\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ における閉包を $\boldsymbol{R}^n$ 或は $\boldsymbol{C}^n$ におけるそれと区別するため $\overline{\overline{V}}$ で表わすこととしよう．すると $\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ は $\overline{\overline{\boldsymbol{C}^n}}$ と書くこともできる．

さて，$\widetilde{\mathcal{O}}$ は自然に $\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ 上の層と見なすことができる．実際，任意の開集合 $U\subset\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ に対し，切断空間 $\widetilde{\mathcal{O}}(U)$ は，$\mathcal{O}(U\cap\boldsymbol{C}^n)$ の元のうちで，$\overline{\overline{V}}\subset U$ なる任意の開部分集合 $V\subset\boldsymbol{C}^n$ の上で一様に緩増加な評価(8.2.3)を満たすものの全体より成る．この定義は今まで用いてきた記号 $\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+iI)$ と整合することに注意せよ．一方，U が無限遠点を一つも含まなければ，増大度条件が付かないので $\widetilde{\mathcal{O}}(U)=\mathcal{O}(U)$ となる．すなわち，$\widetilde{\mathcal{O}}|_{\boldsymbol{C}^n}=\mathcal{O}$．特に $\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{R}^n+iI)=\mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n+iI)$ となってしまう．前節まで見慣れない記号 $\boldsymbol{D}^n$ をわざわざ用いてきたのはこのためであった．

以下，層 $\widetilde{\mathcal{O}}$ に関する主な結果を列挙しよう．

定理と定義 8.5.1　$\boldsymbol{D}^n\subset\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ は層 $\widetilde{\mathcal{O}}$ に関して純 n 余次元的となる．導来層 $\mathcal{Q}=\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{D}^n}(\widetilde{\mathcal{O}})$ を ($\boldsymbol{D}^n$ 上の層と考えたものを) 緩増加(Fourier)超函数の層と名付ける．$\mathcal{Q}|_{\boldsymbol{R}^n}=\mathcal{B}$ である．

定理 8.5.2　$\mathcal{Q}$ は $\boldsymbol{D}^n$ 上の脆弱層となる．

定理 8.5.3　$U\subset\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ を凸開集合とするとき

$$H^k(U,\widetilde{\mathcal{O}})=0,\qquad k\geq 1 \tag{8.5.3}$$

が成り立つ．従って特に $0\in\boldsymbol{R}^n$ の凸近傍 I をとるとき

$$U=\boldsymbol{D}^n+iI,\qquad U_j=(\boldsymbol{D}^n+iI)\cap\{\mathrm{Im}\,z_j\neq 0\},\quad j=1,\cdots,n$$

は層 $\widetilde{\mathcal{O}}$ に関して対 $(\boldsymbol{D}^n+iI,(\boldsymbol{D}^n+iI)\setminus\boldsymbol{D}^n)$ に対する相対 Leray 被覆となり

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)=\widetilde{\mathcal{O}}((\boldsymbol{D}^n+iI)\,\#\,\boldsymbol{D}^n)/\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\mathcal{O}}((\boldsymbol{D}^n+iI)\,\#_j\boldsymbol{D}^n) \tag{8.5.4}$$

と表現できる．また例 7.1.3 b) と同様の表現も成り立つ．

これから第7章§1の議論と全く同様にして次のことがわかる．

系 8.5.4　$\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ は§3で直観的に定義した緩増加 Fourier 超函数の空間 $\mathcal{Q}$ に等しい．

これらの定理の証明は保留して(§6末参照)まずその意義を説明しよう．$\mathcal{Q}$ が

層をなすことから，Fourier 超函数に対してもその台を考えることができる．この台の概念は，有限の点では通常の超函数に対するものと一致する．すなわち，$f(x)\in\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ が点 $x\in\boldsymbol{R}^n$ の近傍で 0 とは，定義函数がこの点の近傍で通常の超函数の意味で 0 に変形できることを言う．また，無限遠点の近傍において $f(x)\equiv 0$ とは，定義函数がそこで緩増加正則函数の範囲内で 0 に変形できることを言う．その際に現われる定義函数の定義域は，虚軸方向の一定の幅を実無限遠まで保持しているようなものでなければならぬことに注意せよ．この定義から，局所作用素 $J(D)$ が $\mathcal{Q}$ に層準同型として作用することも直ちにわかる．

自然な“制限”写像 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)\to\mathcal{Q}(\boldsymbol{R}^n)=\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ の核は，台が無限遠点にのみ存在するような Fourier 超函数の全体ということになる．特に，例 8.4.6 で構成したものは，無限遠の唯一点のみを台として持つ．

特異台の概念も Fourier 超函数に対して拡張できる．この際，$\mathcal{B}$ に対する $\mathcal{A}$ の役割を持つのは緩増加実解析函数 $\mathcal{P}=\tilde{\mathcal{O}}|_{\boldsymbol{D}^n}$ で，これも $\boldsymbol{D}^n$ 上の層をなす．さらに，$f(x)\in\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ に対し S. S. $f(x)\not\ni\left(x\infty,\dfrac{1}{i}\xi dx\infty\right)$ とは，$f(x)$ が点 $x\infty$ の近傍で半空間 $\langle\xi,y\rangle>0$ と交わるような楔上の緩増加正則函数ばかりを定義函数とする表示が存在することと定めれば，特異スペクトルやミクロ解析性の概念の拡張も得られる．

以上述べたことは指数減少超函数 $\mathcal{Q}^{-\delta}$ についても成り立つ．実は容易にわかるように $e^{-\delta\sqrt{z^2+1}}$ による乗法で $\tilde{\mathcal{O}}$ と $\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}$ とは実軸の管状近傍 $\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<1\}$ において層として同型になり，従ってそれらのコホモロジー的特性も一致する．これから $\mathcal{Q}^{-\delta}=e^{-\delta\sqrt{x^2+1}}\mathcal{Q}$ もわかる．今，あらゆる型の指数減少超函数全体のなす層を

$$\mathcal{Q}_*=\varinjlim_{\delta\downarrow 0}\mathcal{Q}^{-\delta} \tag{8.5.5}$$

で定義しよう．$\mathcal{Q}_*|_{\boldsymbol{R}^n}=\mathcal{B}$ でもあるので，商層 $\mathcal{Q}/\mathcal{Q}_*$ は Fourier 超函数から増大度だけを取り出したようなものである．$f(x)\in\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ に対し

$$\operatorname{supp}_\infty f=\operatorname{supp} f(x)\bmod\mathcal{Q}_*$$

と定め，f の**本質台** (essential support) と呼ぶことにしよう．(この言葉は Bros-Iagolnitzer が特異スペクトルを表わすために用いたものである．) Fourier 変換は増大度と特異スペクトルとを次のようにきれいな関係で結びつける．す

なわち，§1の最後に述べた“原理”が，方向的な滑らかさに関しても生きている．

定理 8.5.5　$f(x)\in\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ について次は同値となる．

a)　$\mathrm{S.S.}\,f(x)\subset\boldsymbol{D}^n+i\Gamma^\circ dx\infty$

b)　$\mathrm{supp}_\infty\hat{f}(\xi)\subset\Gamma^\circ$

この定理は本質的には命題 8.3.2 を書き直しただけのものであるが，S.S. や supp_∞ が局所的な定義函数を用いて定義されているため，大域的な定義函数で命題 8.3.2 のような性質を持つものがとれることを示すという自明でない部分の証明が必要である．これは S.S. については上巻第3章§3の議論を $W(z,\zeta)$ の代わりに $e^{-z^2}W(z,\zeta)$ を用いて翻訳すれば得られる．また supp_∞ については指数減少因子を用いれば層の性質から容易にわかる．この定理から，通常の超函数に対する次のようなミクロ解析性の新しい判定法が得られる．

系 8.5.6　$f(x)\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ が点 $(x,i\xi dx\infty)$ でミクロ解析的となるための必要かつ十分な条件は，ξ の錐状近傍 Γ° と，$\mathrm{supp}_\infty\hat{g}(\xi)\cap\overline{\overline{\Gamma^\circ}}=\phi$ なる Fourier 超函数 g を適当に選べば，差 $f(x)-g(x)$ が点 x の近傍で実解析的となることである．

実際，この条件が十分なことは明らかであるが，逆に $\mathrm{S.S.}\,f\ni(x,i\xi dx\infty)$ のとき，f の台をこの点の近傍に切り落とし，ξ の十分小さい閉凸多角錐状近傍 Γ° をとって

$$f(x)=f(x)*W(x,\Gamma^\circ)+f(x)*W(x,\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus\Gamma^\circ)$$

と分解すれば，右辺第1項はこの点の近傍で実解析的となる．また第2項は上の定理により(或は $\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus\Gamma^\circ$ を更に閉凸多角形により分割して各項に命題 8.3.2 を用いれば)，Fourier 変換が Γ° の内部で指数減少するような Fourier 超函数となることがわかる．

本質台ではなく普通の台について定理 8.5.5 に相当する結果を述べよう．ただし，後で§1の結果と比較するため $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^{-1}$ の役割を入れ替えておく．

定理 8.5.7　$f(x)\in\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ について次は同値となる．

a)　$\mathrm{supp}\,f(x)\subset\overline{\overline{\Gamma^\circ}}$

b)　$G(\zeta)\in\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n-i\Gamma)$ で，$\forall\varepsilon>0$ 及び $\forall\Delta\Subset\Gamma$ に対し $\boldsymbol{R}^n-i\Delta\cap\{|\eta|\geq\varepsilon\}$ の上で一様に ζ につき緩増加，即ち $G(\zeta)=O(e^{\varepsilon|\zeta|})$ を満たすものが存在して $\hat{f}(\xi)=G(\xi-i\Gamma 0)$ と書ける．

証明　**a)⇒b)**　$f(x)=\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ という表示で，$F_j(z)$ が Γ° の外では急減少実解析函数として打ち消し合うようなものを用意し，これを用いて $\mathscr{F}f$ を計算すれば，結局 Γ° の任意に小さい近傍上の積分となることから補題 8.4.7 の証明と同様に結論される．ただしそこでは注意しなかったが，$\mathrm{supp}\, f\subset\overline{\overline{\Gamma^\circ}}$ なることと $\mathrm{Im}\,\zeta\in-\Gamma$ とから，$G(\zeta)$ は $\mathrm{Im}\,\zeta$ に関しても緩増加となっていることに特に注意せよ．ちなみに上のような表示は，例えば $e^{-x^2}W(x,\Gamma_j{}^\circ)$ とのたたみ込みを用いて作ることができる．

b)⇒a)　定理 8.5.5 により $f(x)=\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}(\xi))$ が Γ° の外で指数減少する Fourier 超函数となることがわかる．それが実は Γ° の外で 0 に等しいことを示そう．Γ° は凸だから，$\forall\eta\in-\Gamma$ と $\forall\varepsilon>0$ について不等式

$$\langle x,\eta\rangle>\varepsilon|\eta|\,|x| \tag{8.5.6}$$

で定まる領域において $f(x)=0$ となることを言えばよい．(この領域は η の方向のみに依存することに注意.) さて

$$f(x)=\sum_\sigma F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0),\qquad F_\sigma(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathrm{Im}\,\zeta=\eta}e^{iz\zeta}\chi_\sigma(\zeta)G(\zeta)d\zeta$$

においてこの固定した η を用い Poincaré の定理により積分路を $\boldsymbol{R}^n-i\Gamma$ 内に $\mathrm{Im}\,\zeta=\eta(1+|\mathrm{Re}\,\zeta|)$ と曲げ込めば (8.5.6) より得る評価因子 $|e^{iz\zeta}|\le e^{-\varepsilon|\eta||x|(1+|\mathrm{Re}\zeta|)}$ のお蔭で指数減少因子 $\chi_\sigma(\zeta)$ が無くとも積分は絶対収束するようになる．すなわち，各 $F_\sigma(z)$ は実軸のこの領域まで緩増加正則函数として解析接続され

$$\sum_\sigma F_\sigma(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathrm{Im}\,\zeta=\eta(1+|\mathrm{Re}\zeta|)}e^{ix\zeta}G(\zeta)d\zeta \tag{8.5.7}$$

が成り立つ．ここでこの積分が η に依存しないことに注意し，η を $t\eta$ で置き換えて $t\to+\infty$ と積分路をずらしてゆけば，$G(\zeta)$ が虚軸方向にも一様に緩増加であったことから，同じ因子のお蔭で積分 (8.5.7) は 0 に収束する．故に $F_\sigma(z)$ は領域 (8.5.6) において $\tilde{\mathcal{O}}$ の切断として打ち消し合うことがわかる．証了．

この議論を少し変更すれば次が得られる．

系 8.5.8　K を $\boldsymbol{R}^n$ の凸閉集合とし，$H_K(\eta)=\sup_{x\in K}x\eta$ とおく．ただしこの値には $+\infty$ も許すものとし，$\Gamma=\mathrm{Int}(\{\eta\in\boldsymbol{R}^n;H_K(-\eta)<+\infty\})\neq\phi$ とする (Γ°はいわゆるKの漸近錐となる)．このとき$f(x)\in\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ について次の二つは同値となる．

a)　$\mathrm{supp}\, f\subset\overline{\overline{K}}$

b)　$G(\zeta)\in\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n-i\Gamma)$ で, $\forall\varepsilon>0$ 及び $\forall\Delta\Subset\Gamma$ に対し $\boldsymbol{R}^n-i\Delta\cap\{|\eta|\geq\varepsilon\}$ の上で一様に $G(\zeta)=O(e^{\varepsilon|\zeta|+H_K(\mathrm{Im}\,\zeta)})$ を満たすものが存在して $\hat{f}(\xi)=G(\xi-i\Gamma 0)$ と書ける.

証明は(8.5.6)を $\langle x,\eta\rangle>\varepsilon|\eta||x|+H_K(\eta)$ で置き換えれば同様にゆく. この結果は前定理と §1 の定理 8.1.1 とを一つにまとめたものとも考えられる. 先に証明を保留してあった定理 8.1.1 の後半も, この特別な場合として従う. (その部分の証明には $\mathcal{Q}$ の局所性に関する難しいことは必要ないことに注意せよ.)

注意　系 8.5.8 は通常の超函数に対してもある程度役に立つ. 実際, 台が凸閉集合 K に含まれるような超函数 $f(x)\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ が与えられたとき, $\mathcal{Q}$ の脆弱性を用いてこれを台が $\overline{\overline{K}}$ に含まれる $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ の元に延長して Fourier 変換し, 系 8.5.8 を利用することができる. このときの延長の不定性は台が $\overline{\overline{K}}\setminus K$ に含まれるようなものであり, そのようなものの Fourier 変換は同じ系により増大度を用いて判別することができるので, 扱う問題によってはこのような方法が通用するのである. (なお, 上で述べたような $f(x)$ の延長は $\mathcal{Q}$ の脆弱性を用いなくても定理 8.4.4 と全く同様にして初等的に構成することができる.)

問 8.5.1　Γ を固有閉凸錐とするとき, 無限遠の集合 $\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ に台が含まれるような Fourier 超函数の Fourier 変換像を特徴づけよ.

問 8.5.2　$e^x\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ は自然に $\mathcal{Q}([-\infty,+\infty[)$ の元と見做せる. これの $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D})$ の元への任意の延長を $f(x)$ とするとき, $(d/dx-1)f(x)$ は必ず $+\infty$ のみに台を持つ自明でない Fourier 超函数となることを示せ.

問 8.5.3　$f(x)\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^3)$ に対し, これを急減少超函数 $\tilde{f}(x)\in\mathcal{Q}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^3)$ に延長して $\tilde{f}(x)*(-1/4\pi|x|)$ を計算することにより $\triangle:\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^3)\to\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^3)$ が全射となることを示せ. また $\triangle:\mathcal{A}(\boldsymbol{R}^3)\to\mathcal{A}(\boldsymbol{R}^3)$, $\triangle:C^\infty(\boldsymbol{R}^3)\to C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ 等についてはどうか?

問 8.5.4　$\triangle:\mathcal{Q}(\boldsymbol{D})\to\mathcal{Q}(\boldsymbol{D})$ が全射なことを示せ. またこの写像の核は何か?

次に Fourier 超函数に対して許される座標変換 $\tilde{x}=\Phi(x)$ について言及しておこう. 有限の点における局所座標変換としては, $\mathcal{B}$ のそれと同じく任意の実解析的座標変換が許される. 一方, 無限遠点の近傍においては, まず $\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ における近傍の定義により Φ,Φ^{-1} は虚座標に関して一定の幅を無限遠まで保持しているような複素領域まで定義されていなければならない. さらに, 代入 $\tilde{z}=\Phi(z)$ 及び $z=\Phi^{-1}(\tilde{z})$ が $\tilde{\mathcal{O}}$ の劣指数型増大度を保持するため, これらは実軸

方向に高々線型の増大度を持つ函数を成分として書けていなければならない．逆に，この二つの条件を満たす Φ に対しては，第3章 §4, 2° と同様，定義函数への代入によって座標変換を計算することができる．このようなものの典型例はもちろん線型座標変換であり，平行移動・回転・相似変換等がこれに含まれる．しかし座標変換は $\boldsymbol{C}^n$ 全体で大域的に定義されている必要は無いので，$\boldsymbol{D}^n$ の大域的座標変換といえども線型変換以外にいろんなものが存在する．また座標変換と指数減少超函数の定積分との関係について通常の超函数の場合と同様の公式(補題 3.4.7)が成り立つことも容易に確かめられる．それから Fourier 変換に対する座標変換公式も導かれる．

問 8.5.5 Fourier 超函数に対して偶奇性，複素共役，実数値，同次性等の概念を定義し，それらと Fourier 変換との関係を調べよ．

最後に座標変換とは異なるが，一変数 Fourier 超函数 $f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n)$ の積 $f(x)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$ を考えてみよう．これは定義函数で見る限り確かに $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ の元となるが，それは一種の見直しをしているのであって，自然に考えれば一次元空間の直積 $(\boldsymbol{D}^1)^n$ 上の概念となってしまう．我々が用いている $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト化 $\boldsymbol{D}^n$ はこれとは解析的構造が異なっていることに注意せよ．実際，点 $(+\infty, 0, \cdots, 0)$ の $(\boldsymbol{D}^1)^n$ における基本近傍は

$$(8.5.8)\qquad \{x\in\boldsymbol{R}^n; x_1>A, |x'|<\delta\}\bigsqcup\{+\infty\}\times\{|x'|<\delta\}$$

という筒状をしたものから成り，$\boldsymbol{D}^n$ におけるそれが錐状であるのとははっきり異っている．(両者を等角写像で無理に対応させても，虚座標の方で一定の幅が失われてしまうことに注意せよ．)我々の空間 $\boldsymbol{D}^n$ においては，$x_1=\mathrm{const}$ という平行超平面の族はすべて共通の無限遠大円 $x_1=0, |x'|=\infty$ を境界に持っている等，変数の分離に関してあまり都合のよくない構造になっている．$(\boldsymbol{D}^1)^n$，或は $\boldsymbol{D}^{n-1}\times\boldsymbol{D}^1$ 等の上の Fourier 超函数に対応する概念は，今まで述べてきた $\boldsymbol{D}^n$ 上の Fourier 超函数と全く同様に論ずることができる．特にそれを $\boldsymbol{D}^{n-1}\times\boldsymbol{R}^1$ に制限して考えれば，**超函数パラメータを含む Fourier 超函数**という概念が得られ，上述の $x_1=\mathrm{const}$ への制限や，部分 Fourier 変換等の演算についてより自然な対象となる．特にその一部として局所性を持つ**正則パラメータ**の概

念が考えられ，実際計算上大変有用な道具となる．ここでは一般論を詳しく述べないが，その具体的取扱いは第4章§3で述べた $\mathcal{B}[K]\widehat{\otimes}\mathcal{O}(T)$ の場合と同様なので，大いに利用されるとよい．

参考 8.2 (8.5.5)の $\mathcal{Q}_*$ がある層の導来層になれば気持が良いが，$\varinjlim_{\delta\downarrow 0}\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{D}^n}(\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta})$ は $\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{D}^n}(\varinjlim_{\delta\downarrow 0}\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta})$ とは一致しないことを注意しておこう．層 $\mathcal{Q}=\varinjlim_{\delta\downarrow 0}\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}$ 及びその導来層 $\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{D}^n}(\mathcal{Q})$ はこれまでの文献ではそれぞれ**急減少正則函数**及び**急減少** (Fourier) **超函数**の層と呼ばれており，記号 $\mathcal{Q}_*$ は後者を表わすのに用いられている．$\mathcal{Q}$ の切断も実軸方向に指数減少はするが，その型が定義域の境界に近づくにつれて変わり得るところが $\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}$ の切断と異っている．(ただし $\boldsymbol{D}^n$ 上の切断については $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)=\mathcal{P}_*$ となる．この記号 $\mathcal{P}_*$ も正確には $\boldsymbol{D}^n$ 上の層 $\mathcal{Q}|_{\boldsymbol{D}^n}$ の意味で用いられる．) 層 $\mathcal{Q}$ は $\widetilde{\mathcal{O}}$ と同様のコホモロジー的性質を持つが，$\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}$ とのような直接的つながりは無いので平行して一応別に確かめる必要がある．$\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{D}^n}(\mathcal{Q})$ の大域的切断の Fourier 変換は，次のような評価を満たす実軸のある管状近傍上の正則函数となる：

(8.5.9) $\forall\varepsilon>0$ に対し $\exists\delta_\varepsilon>0$ が存在し，$|\mathrm{Im}\,\zeta|\le\delta_\varepsilon$ において $|F(\zeta)|\le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta|}$

このような函数はそのままでは $\mathcal{Q}$ の元の定義函数とならないので，$\mathcal{Q}$ の元と見做すためには特異スペクトル的に更に分解する必要がある．このように(8.5.5)で定まる $\mathcal{Q}_*$ の元の方が $\mathcal{Q}$ との結び付きがずっと簡単である．

§6 位相と双対性

Fourier 超函数の空間には自然に位相を入れることができる．例えば

(8.6.1) $$\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)=\widetilde{\mathcal{O}}((\boldsymbol{D}^n+iI)\,\sharp\,\boldsymbol{D}^n)/\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\mathcal{O}}((\boldsymbol{D}^n+iI)\,\sharp_j\boldsymbol{D}^n)$$

については，各 $K\Subset I\setminus\{0\}$，$\varepsilon>0$ について定義函数 $F(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}((\boldsymbol{D}^n+iI)\sharp\boldsymbol{D}^n)$ に対し

(8.6.2) $$\|F(z)\|_{K,\varepsilon}=\sup_{z\in\boldsymbol{R}^n+iK}|F(z)e^{-\varepsilon|\mathrm{Re}\,z|}|$$

というノルムを導入すれば，本質的には可算個のノルム系となり $\widetilde{\mathcal{O}}((\boldsymbol{D}^n+iI)\sharp\boldsymbol{D}^n)$ は Fréchet 空間となる．(更に Montel 空間ともなる．) 遠方での増大度が制限されているため函数論の三線定理が適用でき，(8.6.1)の分母は分子の閉部分空間となって商空間にも Fréchet(Montel) 空間の構造が入るのである．

定義から明らかに，Fourier 変換，$J(D)$ による微分，$J(z)$ による乗法などが $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ に連続に作用する．このことからまた，Fourier 超函数の収束を任意の

境界値表示で論じ得ることがわかる．すなわち，Fourier 超函数の列 $f_k(x)=\sum_{j=1}^{N} F_{k,j}(x+i\Gamma_j 0)$ の各定義函数 $F_{k,j}(z)$ が (8.6.2) と同様のノルム系で $\widetilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n+iI_j)$ において 0 に収束していれば，$\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ において $f_k(x)\to 0$ となる．これは境界値表示を用いて Fourier 変換を計算すれば直ちに確かめられる．

さて，$\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ と双対関係にあるのは $\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n)$ である．こちらは (8.2.2) の定義式によりその正確な位相が定まるが，可算ノルム系を持たぬ空間となるので点列の収束で代用するのが便利である．即ち，$\varphi_k\in\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n)$ が 0 に収束するとは，ある $\delta>0$ について $\varphi_k(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^n+i\{|y|<\delta\})$ となり，かつ

$$\sup_{|\mathrm{Im}\, z|\leq\delta/2}|\varphi_k(z)e^{(\delta/2)|\mathrm{Re}\, z|}|\to 0 \qquad (k\to\infty) \tag{8.6.3}$$

となることである．この収束はまた，局所作用素を用いて実軸の上だけで判定することもできる：

定理 8.6.1 $\varphi_k\in\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n)$ が 0 に収束するための必要かつ十分な条件は，ある $\delta>0$ が存在し任意の定数係数局所作用素 $J(D)$ について

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}|e^{\delta|x|}J(D)\varphi_k(x)|\to 0 \qquad (k\to\infty)$$

となることである．これはまた，任意の劣指数型整函数の対 $J_1(z), J_2(\zeta)$ について

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}|J_1(x)J_2(D)\varphi_k(x)|\to 0 \qquad (k\to\infty)$$

となることとも同値である．

問 8.6.1 $f(x)$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上の連続函数とする．任意の劣指数型整函数 $J(z)$ について $J(x)f(x)$ が必ず $\boldsymbol{R}^n$ 上有界となるならば，実は $f(x)$ は指数減少することを示せ．

二つの空間の間の関係をまとめれば次のようになる．

定理 8.6.2 上のような位相の定義により $\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n)$ と $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ とは互いに他の位相的双対空間となる．$\varphi\in\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n)$ と $f\in\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ の間の内積は

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \tag{8.6.4}$$

で与えられる．(右辺は指数減少超函数 $f(x)\varphi(x)$ の定積分である．) $\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n)$ 上の線型汎函数が連続，すなわち $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ に属するためには，それが $\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n)$ の点

列について連続であればよい．また，$\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n), \mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ の点列がこれらの空間で収束するためには，それらが弱収束すれば十分である．Fourier 変換はこれらの空間にそれぞれ位相的同型として働きそれらは互いに双対写像となる．すなわち，次の Parseval の等式が成り立つ．

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle \tag{8.6.5}$$

双対性に関する主張は，第4章 §1 の議論を適当に翻訳すれば，証明できる．Parseval の等式は，f に関する線型性により $f(x)=F(x+i\Gamma 0)$ が Δ° の外で指数減少する場合に確かめれば十分であるが，このとき $y\in\Gamma, \eta\in-\Delta$ を適当にとれば (8.6.5) 式の両辺はいずれも

$$\int_{\mathrm{Im}\, z=y}\int_{\mathrm{Im}\,\zeta=\eta} e^{-iz\zeta}F(z)\varphi(\zeta)dxd\xi$$

という絶対収束する積分に帰着する．$f(x)$ が通常の緩増加函数のときは (8.6.4) の積分は通常の意味のものに解釈してもよいことに注意せよ．

例 8.6.3 無限級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$ は $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ において収束する．実際，任意の $\varphi(x)\in\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n)$ に対し

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle\delta(x-n), \varphi(x)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n) \tag{8.6.6}$$

は収束するからである．故にこの和は緩増加超函数として確定した意味を持つ．一方，例 8.3.6 で与えた定義函数 (8.3.12) を持つ緩増加超函数も汎函数として上と同じ値を与えることが Cauchy の積分定理によりわかる．故に両者は同じものと考えられる．（ただしこの同一性は双対性を用いなくても Fourier 変換が一致することで確かめられる．）(8.3.11) と Parseval の等式より $\varphi\in\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D}^n)$ に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(2\pi n) \tag{8.6.7}$$

が得られるが，これが古典的に Poisson の和公式と呼ばれているものである．

問 8.6.2 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x}{2\pi}-n\right)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi n)$ を確かめよ．

問 8.6.3 定数係数局所作用素 $J(D)$ に対し部分積分の公式 $\langle J(D)f, \varphi\rangle=\langle f, J(-D)\varphi\rangle$ を示せ．

問 8.6.4 $\lambda\geq 0$ に対し微分 $\frac{d}{d\lambda}|x|^\lambda=\lim_{h\to 0}\frac{|x|^{\lambda+h}-|x|^\lambda}{h}=|x|^\lambda\log|x|$ が $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D})$ の位相の

意味で存在することを確かめ，これより $\lambda=0$ とおいて問 8.4.5 e)の結果を再確認せよ．

以上に述べた双対性は，$\mathcal{B}[K]$ と $\mathcal{A}(K)$ の双対関係を含むような形で，$\boldsymbol{D}^n$ のコンパクト部分集合 K に台が含まれるような緩増加超函数の全体 $\mathcal{Q}[K]$ と，K のある近傍で定義された急減少実解析函数の全体 $\mathcal{P}_*(K)$ との間の双対性に拡張することができる．（前者は所謂 FS 空間，後者は DFS 空間となる．）また，定理 4.1.14 に対応して次が証明できる．

補題 8.6.4　$K\subset L$ を $\boldsymbol{D}^n$ の二つのコンパクト部分集合とするとき，$\mathcal{Q}[K]\hookrightarrow \mathcal{Q}[L]$ という自然な包含写像が存在し，連続である．さらに，L の各連結成分が K と交わっているならば，この写像は稠密な像を持つ．特に，有限または無限遠の指定した一点に台が含まれるようなものの全体が，$\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ の中で稠密となる．

実際，指定した一点が有限の点 a ならば，$D^\alpha\delta(x-a)$ を用いて Hahn-Banach の定理を適用すれば，定理 4.1.14 と同様に証明できる．これが無限遠点 $a\infty$ のときは，その結果を用いてまず有限の一点 t_1a のみに台を持つ超函数 $f_1(x)$ で近似し，次いでこれを次第に $a\infty$ に近づく一点 t_ka のみに台を持つもの $f_k(x), k=2,3,\cdots$ で次々に近似し直してゆく．線分 $L_k=\{ta;t_k\leq t\leq +\infty\}$ に台が含まれる Fourier 超函数の空間 $\mathcal{Q}[L_k]$ のセミノルム系 $\|\cdot\|_{k,l}, l=1,2,\cdots$ を命題 7.3.1 の証明のように k,l について次第に強くなるように選んでおき，$\|f_{k+1}-f_k\|_{k,k}\leq\varepsilon/2^k$ なる近似列をとれば，$f_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(x)-f_k(x))$ は $\mathcal{Q}[\{a\infty\}]$ に属する一つの近似函数となるであろう．

かように，$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)=\mathcal{Q}[\boldsymbol{D}^n]/\mathcal{Q}[\boldsymbol{S}_\infty^{n-1}]$ という商空間表示は，またしても $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ に位相を入れることを許さないのである．

問 8.6.5　例 8.4.6 で与えた Fourier 超函数と $\varphi(x)\in\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D})$ との内積を求めよ．

参考 8.3　$\mathcal{P}(\boldsymbol{D}^n)$ や $\mathcal{Q}_*(\boldsymbol{D}^n)$ にも同様に位相を入れることができる．この二つは定理 8.2.6 により Fourier 変換ではきれいに対応しているが，互いに双対とはなっていないことに注意せよ．実は $\mathcal{P}(\boldsymbol{D}^n)$ の双対空間は $\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{D}^n}(\mathcal{Q})$，また $\mathcal{Q}_*(\boldsymbol{D}^n)$ の双対空間は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{D}^n}{}^n(\mathcal{Q})$ の Fourier 像，すなわち (8.5.9) を満たす正則函数の空間となって，DFS にも FS にもならずややこしい関係になっている．自然な包含写像 $\mathcal{B}_*(\boldsymbol{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{Q}_*(\boldsymbol{D}^n)\hookrightarrow\mathcal{P}(\boldsymbol{D}^n)\hookrightarrow\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$ が連続という程度の使い方をしておくのが無難であろう．

この章の最後に前節で仮定した局所性に関する諸定理の証明を簡単に紹介しておこう．一言で言えば通常の $\mathcal{O}$ や $\mathcal{B}$ に対して行った議論を緩増加という増大度条件付きで書き直すのである．それは増大度制限つきコホモロジーという，現代数学のうちでもかなり奥深い理論に属するものであるが，一変数の場合には初等的に証明できるので，まず補題 1.5.1 に相当する結果をきちんと証明しておこう．

補題 8.6.5　U_j, $j=0,1$ を $\boldsymbol{D}+i\boldsymbol{R}$ の二つの開集合とし，その $\boldsymbol{C}$ への制限は $|\mathrm{Im}\, z|\leq\frac{1}{\sqrt{3}}|\mathrm{Re}\, z|+1$ に含まれるとする．（この条件は本質的ではないが，以下簡単のため常に仮定する．我々に必要なのは実軸の近傍だけなのでこれで十分である．）$F(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}(U_0\cap U_1)$ が与えられたとき，$F_j(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}(U_j)$, $j=0,1$ で

(8.6.8)　$$F_1(z)-F_0(z) = F(z) \qquad (U_0\cap U_1 \text{ の上で})$$

となるものが存在する．

証明　まず F が $\overline{U_j}$ の近傍まで $\widetilde{\mathcal{O}}$ の切断として定義されている場合を考えよう．γ_j, $j=0,1$ をそれぞれ $\partial U_j\cap\boldsymbol{C}$ の $\overline{U_{1-j}}$ 内に在る弧とし，

(8.6.9)　$$F_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \qquad j=0,1$$

とおいてみる．もし積分路上で $|F(\zeta)|\leq C/(1+|\zeta|^2)$ が成り立っていれば，コンパクトな γ_j の場合と全く同様にして $F_j(z)\in\widetilde{\mathcal{O}}(U_j)$ となり，これらが (8.6.8) を満たすことがわかる．そうでない場合は $F(z)/J(z)$ が上の評価を満たすような劣指数型整函数 $J(z)$ を選び，(8.6.9) 式中の $F(z)$ を $F(z)/J(z)$ で置き換えたもので $G_j(z)$ を計算し，改めて $F_j(z)=G_j(z)J(z)$ とおけばよい．

次に一般の場合には，補題 1.5.1 と同様の近似手続きが必要となる．それには $\widetilde{\mathcal{O}}$ の切断に対して翻訳された形の Runge の定理を用意しなければならない．それも Cauchy 積分公式を用いる通常の証明を，上のような $J(z)$ による割り算と組み合わせて適用すれば得られる．ただし近似函数を $\widetilde{\mathcal{O}}$ の切断から選ぶためには，Cauchy 積分の各微小部分を最終的に z の多項式では無く $\frac{1}{z\pm i}$ の多項式で近似するという工夫が要る．（$\boldsymbol{D}+i\boldsymbol{R}$ の無限遠点における位相構造が Riemann 球面のそれとは異なっているため，直接反転を用いても通常の Runge の定理には帰着できぬことに注意せよ．）証了．

この補題を用いれば一変数の場合の Fourier 超函数の局所性を確立すること

ができる．第1章に倣って読者自ら試みられたい．

参考 8.4 多変数の場合の定理 8.5.3 の証明を，現在最も短いと思われるものについて，ある程度の予備知識を仮定しつつ，ただしその気になれば読者が勉強して補完できる形で述べておこう．(以下の議論を C^n へ制限すれば $\mathcal{B}$ の基礎付けに対する函数解析的な別証ともなる．) 今 $\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ 上の緩増加な局所 L_2 級函数の作る層 $\tilde{L}_{2,loc}$ を考える．すなわち，開集合 $U\subset\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ に対して $f(x)\in\tilde{L}_{2,loc}(U)$ とは，任意の $\varepsilon>0$ と，$\overline{\overline{V}}\subset U$ なる任意の開集合 $V\subset\boldsymbol{C}^n$ に対し $e^{-\varepsilon|x|}f(x)|_V\in L_2(V)$ となることと定める．これは $\tilde{\mathcal{O}}$ と同様の意味で $\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ 上の層となる．正則函数に対する最大値ノルムと L_2 ノルムとの局所的な互換性により $\tilde{\mathcal{O}}$ は $\tilde{L}_{2,loc}$ の部分層となる．さらに，$\tilde{L}_{2,loc}{}^{(0,p)}$ を型 $(0,p)$ の $\tilde{L}_{2,loc}$-係数微分形式の芽の層とし，その中で閉作用素 $\bar{\partial}:\tilde{L}_{2,loc}{}^{(0,p)}\to\tilde{L}_{2,loc}{}^{(0,p+1)}$ の定義域に入るようなものが作る部分層を $\tilde{\mathscr{L}}_{2,loc}{}^{(0,p)}$ で表わそう．$C_0{}^1$ 級函数による積は $\bar{\partial}$ の定義域を保存するので，これは軟層となることが容易にわかる．すると，$\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ 上に次のような増大度付き Dolbeault 列が存在し，$\tilde{\mathcal{O}}$ の軟分解を与える(大島の注意)：

$$(8.6.10)\qquad 0\to\tilde{\mathcal{O}}\to\tilde{\mathscr{L}}_{2,loc}^{(0,0)}\xrightarrow{\bar{\partial}}\tilde{\mathscr{L}}_{2,loc}^{(0,1)}\xrightarrow{\bar{\partial}}\cdots\to\tilde{\mathscr{L}}_{2,loc}^{(0,n)}\to 0$$

この列の完全性は $\bar{\partial}$ に対する L_2 理論の結果である．実際，例えば Hörmander[3]，定理 2.2.1′ を用いると，次のような大域的存在定理が証明できる．

定理 8.6.6 $U\subset\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ はその $\boldsymbol{C}^n$ への制限が $|\mathrm{Im}\,z|\leq(1/\sqrt{3})|\mathrm{Re}\,z|+1$ 内の正則領域(擬凸領域)となるような開集合とする．このとき，$f(z)\in\tilde{\mathscr{L}}_{2,loc}{}^{(0,p+1)}(U)$ で $\bar{\partial}f=0$ を満たすものに対し $\bar{\partial}u=f$ の解 $u(z)$ が $\tilde{\mathscr{L}}_{2,loc}{}^{(0,p)}(U)$ 内に存在する．

実際，適当な $J(z)$ を用いて商 $f(z)/J(z)$ を考えれば，これは $\overline{\overline{V}}\subset U$ なる任意の V 上真に L_2 級となる．故に $d(z)=\mathrm{dis}\,(z,\partial U)$ を距離函数とし $-\log d(z)$ の十分大きな凸函数 $\phi(z)$ (を滑らかにしたもの) を考えれば，$(1+|z|^2)e^{-\phi(z)}f(z)/J(z)\in L_2(U\cap\boldsymbol{C}^n)$ となり (注 33)，従って $\varphi(z)=\phi(z)+\log(1+|z|^2)$ という強多重調和函数について上に引用した定理を適用すれば，$(1+|z|^2)^{-1}e^{-\phi(z)}g(z)\in L_2(U\cap\boldsymbol{C}^n)$ なる g で $\bar{\partial}g=f/J$ を満たすものが得られる．整函数 J は $\bar{\partial}$ と可換だからこのとき，$u=J\cdot g$ は $\bar{\partial}u=f$ の解となる．

(8.6.10) の U 上での大域的完全性から $H^p(U,\tilde{\mathcal{O}})=0\,(p\geq 1)$ が従うことは第5章§7で注意した通りである．これから特に定理 8.5.3 が出る．なお，以上の議論は $\tilde{\mathcal{O}}$ を $\mathcal{Q}$ に替え，$\tilde{L}_{2,loc}(U)$ を $\overline{\overline{V}}\subset U$ なる任意の V に対し $\exists\delta>0$ が存在して $e^{\delta|x|}f(z)\in L_2(V)$ となるような $f(z)$ の集合 $\underset{\sim}{L}_{2,loc}(U)$ で取り替えても同様に行なえることを注意しておこう．δ は V とともに変わるが，以下で必要となるのはコンパクト集合 K に対する消滅定理 $H^p(K,\mathcal{Q})=0\,(p\geq 1)$ なので，$e^{\delta\sqrt{z^2+1}}$ の乗法で Hörmander の定理に帰着できる．

次に定理 8.5.1 の証明に移る．帰納法が使えないので Martineau-Harvey の双対定理の考えを用いる．

定理 8.6.7　$K \subset \boldsymbol{D}^n + i\boldsymbol{R}^n$ は定理 8.6.6 に述べたような開集合を基本近傍系に持つコンパクト集合とし，$U \supset K$ をそのような近傍の一つとすれば，

(8.6.11)　$$H^p{}_K(U, \tilde{\mathcal{O}}) = 0, \quad p \neq n$$

(8.6.12)　$$H^n{}_K(U, \tilde{\mathcal{O}}) = \mathcal{Q}(K)'$$

が成り立つ．(実は切除定理によりこれらの式中の U は任意の近傍でよい．)

$\boldsymbol{D}^n$ 内のコンパクト集合は容易にわかるようにそのような性質を持つので，これから実開集合 $\Omega \subset \boldsymbol{D}^n$ に対し

$$\cdots \to H^p{}_{\partial\Omega}(U, \tilde{\mathcal{O}}) \to H^p{}_{\bar{\Omega}}(U, \tilde{\mathcal{O}}) \to H^p{}_{\Omega}(U, \tilde{\mathcal{O}}) \to \cdots$$

という完全列を用いて

$$H_{\Omega}{}^p(U, \tilde{\mathcal{O}}) = 0, \quad p \neq n$$

が示される．ただし $p=n-1$ のところは $H^n{}_{\partial\Omega}(U, \tilde{\mathcal{O}}) \to H^n{}_{\bar{\Omega}}(U, \tilde{\mathcal{O}})$ の単射性を用いる．これは双対性で $\mathcal{Q}(\bar{\Omega}) \to \mathcal{Q}(\partial\Omega)$ が稠密な像を持つことを示せばよく，Runge の近似定理をそのように修正すれば証明できる．また，(8.6.12)は定理 8.6.2 で述べた双対定理の一つの証明を与えることに注意せよ．

定理 8.6.7 の証明はかなりの長道中である．まず対 $K \subset U$ に対する基本長完全列と定理 8.6.6 とを用いて

(8.6.13)　$$H^1{}_K(U, \tilde{\mathcal{O}}) = \tilde{\mathcal{O}}(U)/\tilde{\mathcal{O}}(U \setminus K)$$

(8.6.14)　$$H^p{}_K(U, \tilde{\mathcal{O}}) = H^{p-1}(U \setminus K, \tilde{\mathcal{O}}) \quad p \geq 2$$

また，参考 5.2 で述べたコンパクト台のコホモロジーに関する基本長完全列

$$\cdots \to H^p{}_c(U \setminus K, \mathcal{Q}) \to H^p{}_c(U, \mathcal{Q}) \to H^p(K, \mathcal{Q}) \to \cdots$$

を $H^p(K, \mathcal{Q}) = 0$ $(p \geq 1)$ や解析接続の一意性と合わせて，

(8.6.15)　$$H^1{}_c(U \setminus K, \mathcal{Q})/\mathcal{Q}(K) = H^1{}_c(U, \mathcal{Q})$$

(8.6.16)　$$H^p{}_c(U \setminus K, \mathcal{Q}) = H^p{}_c(U, \mathcal{Q}) \quad p \geq 2$$

を得る．次に列(8.6.10)の U 上の大域的切断とその双対を考える．$\mathcal{L}_{2,\mathrm{loc}}(U)$ の元のうちでコンパクトな台を持つものの全体を $\mathcal{L}_{2,\mathrm{c}}(U)$ と記せば，

(8.6.17)　$$\begin{array}{c} 0 \to \mathcal{Z}^{(0,0)}_{2,loc}(U) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots\cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{Z}^{(0,n)}_{2,loc}(U) \to 0 \\ 0 \leftarrow \mathcal{L}^{(0,n)}_{2,c}(U) \xleftarrow{-\bar\partial} \cdots\cdots \xleftarrow{-\bar\partial} \mathcal{L}^{(0,0)}_{2,c}(U) \leftarrow 0 \end{array}$$

という二つの複体は $\pm\bar\partial$ のグラフノルムを持つ Hilbert 空間の射影或は単射極限という自然な位相により互いに双対になる．すなわち，上下の対応項が位相的双対空間となり，写像も互いに双対(共役)となる．(上の方は FS^*，下の方は DFS^* と呼ばれる空間になる．) Serre-小松の補題(小松[5])によれば，このときこれらの複体の対応するコホモロジーは，どちらか一方がすべて Hausdorff になれば互いに位相的双対となる．今の場合は上の方がこの条件を満たしているから，これより

(8.6.18) $$H^p{}_c(U, \mathcal{Q}) = H^{n-p}(U, \tilde{\mathcal{O}})' = 0, \quad 0 \leq p \leq n-1$$

(8.6.19) $$H^n{}_c(U, \mathcal{Q}) = \tilde{\mathcal{O}}(U)'$$

が得られる．次に(8.6.17)のUを$U\setminus K$におき換えると，(8.6.15)-(8.6.16)と(8.6.18)-(8.6.19)より

$$H^1{}_c(U\setminus K, \mathcal{Q}) = \mathcal{Q}(K),\ H^p{}_c(U\setminus K, \mathcal{Q}) = 0\,(2\leq p\leq n-1),\ H^n{}_c(U\setminus K, \mathcal{Q}) = \tilde{\mathcal{O}}(U)'$$

となり，今度は下の方の列が Hausdorff の条件を満たしている．故に再び Serre-小松の双対定理により

$$H^{n-1}(U\setminus K, \tilde{\mathcal{O}}) = \mathcal{Q}(K)',\ H^p(U\setminus K, \mathcal{Q}) = 0\ (1\leq p\leq n-2),$$
$$\tilde{\mathcal{O}}(U\setminus K) = H^n{}_c(U\setminus K, \mathcal{Q})' = \tilde{\mathcal{O}}(U)$$

を得るが，これを(8.6.13)-(8.6.14)と合わせれば定理8.6.7が得られる．

最後に定理8.5.2の証明は Malgrange の定理を次のように拡張すれば問7.4.1と同様の論法で行なうことができる．

定理 8.6.8 $U\subset \boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ を，$\boldsymbol{C}^n$ への制限が $|\mathrm{Im}\, z|\leq (1/\sqrt{3})|\mathrm{Re}\, z|+1$ に含まれるような任意の開集合とするとき，$H^n(U, \tilde{\mathcal{O}})=0$ が成り立つ．

これを証明するには $\tilde{\mathscr{Z}}_{2,loc}{}^{(0,n-1)}(U)\xrightarrow{\bar\partial}\tilde{\mathscr{Z}}_{2,loc}{}^{(0,n)}(U)\to 0$ の完全性を示せばよいが，それには Serre-小松の補題によりその双対列の対応部分

$$\mathscr{L}^{(0,1)}_{2,c}(U) \xleftarrow{-\bar\partial} \mathscr{L}^{(0,0)}_{2,c}(U) \leftarrow 0$$

が常に閉値域を持つことを示せばよい．このことはUをそれを含むような正則領域で取り替えれば成り立つから，結局，解析接続の一意性を用いた台の還元の議論に帰着する．(DFS^* 空間においても収束点列は帰納極限の途中のある空間に収まることに注意．)

なお以上の論法は分布理論を既知の読者には $\bar\partial$ の定義域などという怙息なものは使わず，C^∞ と $\mathscr{D}'$ の対応する増大度を持った切断空間を用いて行った方が馴染み易いかもしれない．ただしそれは $\bar\partial$ の存在定理に正則性が要求される等，内容としてはさらに高度になる．

参考 8.5 $\boldsymbol{D}^n+i\boldsymbol{R}^n$ という位相構造はいささか人為的である．そこで $\boldsymbol{C}^n$ の虚座標も同等に考えて $\boldsymbol{D}^{2n}$ という方向的コンパクト化をとることも考えられる．こうしても実軸上では何も変化は起こらないが，無限遠点 $a\infty$ の複素近傍は虚座標について $|\mathrm{Im}\, z|<\delta$ の形ではなく

$$C_\delta = \{|\mathrm{Im}\, z|<\delta(|\mathrm{Re}\, z|+1)\}$$

の形をとるようになる．この上で

(8.6.20) $$\forall\varepsilon > 0 \text{ について } F(z) = O(e^{\varepsilon|z|})$$

という意味で緩増加な増大度を持つ正則函数の層 $\tilde{\tilde{\mathcal{O}}}$ について本章と同様の議論を行なうと，**変形 Fourier 超函数**(modified Fourier hyperfunction) $\tilde{\tilde{\mathcal{Q}}}=\mathscr{H}^n{}_{\boldsymbol{D}^n}(\tilde{\tilde{\mathcal{O}}})$ の理論が得られる．対応する急減少正則函数の層 $\underset{\approx}{\mathcal{Q}}$ も同様に定義する．(この位相構造では $|z|$ と

$|\mathrm{Re}\, z|$ の違いは本質的である.）この新しい理論の一番の強味は，積分路を実軸に対して傾けることにより Fourier 像を用いた特異台の評価が可能となることである（定理 8.5.7 の証明参照）．例えば

定理 8.6.9　$K \subset \boldsymbol{R}^n$ を凸閉集合とし，これから Γ° を系 8.5.8 と同様に定める．このとき，次の二つは同値となる．

a)　$f(x) \in \tilde{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{D}^n)$（または $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n)$）は $\bar{\bar{K}}$ の外で $\mathcal{Q}$ の切断になる．

b)　$\hat{f}(\xi)$ の定義函数 $G(\zeta)$ は $\forall\varepsilon>0$ と $\forall\Delta \Subset \Gamma$ に対しある $\delta=\delta_{\varepsilon,\Delta}>0$ こついて $\boldsymbol{R}^n - i\Delta \cap C_\delta$ の形の領域まで解析接続され，更に $G(\zeta)e^{-\varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta|-H_K(\mathrm{Im}\,\zeta)}$ は $\boldsymbol{D}^n - i\Delta \cap C_\delta$ において $|\zeta|$ につき（対応する位相の意味で）広義一様に緩増加となる．

一方，同じ理由からコンパクト台の超函数の Fourier 像は C_δ 型の領域において必ずしも (8.6.20) を満たさないので，この枠組での Fourier 変換の計算では必ず原点を境にして被積分函数を切断しなければならぬこととなり，実用計算では却って不利な制約となる．

定理 8.5.7 により $\mathcal{Q}(\boldsymbol{D}^n) \subset \tilde{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{D}^n)$ となることがわかる．（実はより強く層として $\mathcal{Q} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ が言える．）$\tilde{\mathcal{Q}}$ の基礎付けは $\mathcal{Q}$ よりも初等的にできる．それは

$$\tilde{z}_1 = z_1, \ \ \tilde{z}' = z'/z_1$$

で定まる変換 $(z_1, z') \mapsto (\tilde{z}_1, \tilde{z}')$ により $(+\infty, 0, \cdots, 0)$ の近傍が §5 末で言及したような直積空間 $(\boldsymbol{D}^2)^n$ のそれに移され，従って帰納法が使えるようになるからである．ただし，柏原の Radon 分解成分 $W(z, \omega)$ は $\boldsymbol{D}^n \setminus \{0\}$ において $\tilde{\mathcal{O}}$ の切断にはならぬので，これを用いた $\tilde{\mathcal{O}}$ の議論を翻訳するには，分母の因子が例えば

$$\Phi(z,\zeta) = z\zeta + i(z^2\sqrt{\zeta^2} - (z\zeta)^2/\sqrt{\zeta^2})/\sqrt{z^2+1}$$

のように z についても漸近的に 1 次斉次となるような δ の分解を使う必要がある．

付　記

Fourier 超函数は佐藤 [1] により導入された．そこでは一変数の場合に限って解説してある．多変数の場合の理論的基礎付けは河合 [1] により与えられた．それに含まれない部分，例えば変形 Fourier 超函数の基礎付けについては，Nagamachi-Mugibayashi [1]，佐分利 [1]，[2] 等を参照されたい．Fourier 変換を実軸上の函数概念として把え得るぎりぎりの増大度が劣指数型であることはつとに Carleman [1] が注意している．しかしそれが実体として認識されるためには超函数の概念が是非とも必要である．これより大きな増大度，例えば指数型の増大度を持つ函数をそのまま Fourier 変換すると，台は最早実軸からはみ出し，複素解析的な汎函数が現われる．この種の現象については，例えば Park-Morimoto [1] 等を見られたい．

これらの文献のうちで双対性を前面に出した議論は，Schwartz の $\mathcal{S}'$ の理論とほぼ

平行していて割合簡明であるが，超函数の独自性を強調して相対コホモロジー的把え方をしたものは大変高級な理論になってしまっている．その一つの理由は Fourier 変換を定義するのに台の分解を用いていたからである．ここではそれを指数減少因子による増大度の分解で置き換えたため，Fourier 変換の定義が局所性を離れて全く初等的に導入できていることに注目されたい．

この章の結果も主なものの原典は概ね佐藤（及び河合）にある．定理 8.4.9（表現定理）は筆者 [2] による本論唯一の具体的寄与である．またしても実例の計算が少なくなったが，方法については十分解説したので，Gelfand–Shilov [1]，今井 [1] 等に当って腕をみがいて頂きたい．なお Fourier 変換の物理的意味等については，例えば小出 [1] 等をながめて応用の際の参考にされるとよい．

第 8 章の問題

問題 1（Polya の例） a_n を $a_n/n\nearrow\infty$ なる正数列とする．1 変数の整函数を

$$F(\zeta)=e^{ia\zeta}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i\zeta}{a_n}\right)e^{-i\zeta/a_n}$$

で定める．

1) a を適当に選べば，$F(\zeta)$ は台が $[0, A]$ の形の区間に含まれるある超函数 f の Fourier 像となることを示せ．［Paley-Wiener 型の定理 8.1.1 を適用するため無限積を評価するのだが，ζ が実のときに劣指数型の評価を別に導いて Phragmén-Lindelöf の定理を用いると計算が少し簡単になる．］

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty$ のとき，$f(x)$ の台は一点には含まれないことを示せ．［平行移動して定理 8.1.5 を用いよ．］

3) $f(x)*f(-x)$ は原点のみに台を持つ超函数となることを示せ．［$F(\zeta)F(-\zeta)=\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta^2}{{a_n}^2}\right)$ に対し劣指数型評価を示す．］

注

注 1) 上の証明で Riemann 積分の収束に関する最後の部分は積分路を $\gamma_{\pm}=[a-\delta, a-\varepsilon]\cup\{a-e^{\mp i\theta}; 0\leq\theta\leq\pi\}\cup[a+\varepsilon, a+\delta]$ ととれば函数論の通常の手法とも合っているし証明もずっと簡単になる．しかしここでは多変数の場合にも一般化できるようにわざと道 $\gamma_{\pm}$ の選び方に依らない議論を採用した.

注 2) なおこの積の問題に関しては更に第 4 章末の問題 8 (注 28 の中にある) をも参照されたい.

注 3) $\boldsymbol{R}$ 上の超函数 $f(x)$ が $f(-x)=f(x)$，或いは $f(-x)=-f(x)$ を満たすとき，それぞれ偶，或いは奇の超函数であると云われる．$\boldsymbol{R}$ 上の任意の超函数は偶超函数と奇超函数の和に一意的に表せることを示せ．また $1/(x+i0)$ に対しこの分解を与えよ.

注 4) 以下簡単のため $(\mathscr{G}/\mathscr{F})(U)$ と書くべきところを $\mathscr{G}/\mathscr{F}(U)$ と略記する.

注 5) 実は層 $\mathscr{O}$ (或いは $\mathscr{A}$) に対して Peetre 型の定理が成り立つかどうかまだ未解決のようである．なお $\mathscr{D}'$ に対しては疎な台を持つ連続でない層準同型の存在が既に知られていたが，最近 de Roever は $\mathscr{B}$ に対して，これと類似のもの以外にも多くの不連続な層準同型が存在することを Hamel 基底を用いた議論により示している.

注 6) この証明において本質的なのは，既に示したこと，すなわち $F(z)$ の正則域 (の y 座標成分) に含まれるような y_1 軸の近傍として，原点において頂角が正の円錐の形をしたものを見出せるということであり，後は線分 $0<y_1<\delta c$ のこのような近傍として全体が錐状のものを見出すには，単に錐の開きを小さく (すなわち K_δ を大きく) 取り直すだけで十分である.

注 7) 第 2 項の指数の肩は次のような内容である：$iz\zeta=i\check{z}_j\check{\zeta}_j+iz_j\zeta_j$．ここで $\zeta_j=\xi_j+it(z_j\sqrt{\xi^2}-\xi_j(z\xi)/\sqrt{\xi^2})$ であり，今は $\xi_j=0$ だから結局上の量 $=i\check{z}_j\check{\zeta}_j-tz_j{}^2|\xi|$．なお，以下で言及しているように t と $\check{\xi}_j$ のみで書き直した場合は，$|\xi|=|\check{\xi}_j|$ に注意して，上の量 $=i\check{z}_j\check{\xi}_j-t(z^2-(z\check{\xi}_j/|\check{\xi}_j|)^2)|\check{\xi}_j|$ となる.

注 8) 柏原の補題を定理 2.3.7 を用いて証明せよ．［集合 B として $\{(y_1, 0, \cdots, 0); 0<y_1<c\}$ の $F(z)$ の正則域内での任意の近傍をとり，定理を適用せよ.

定理の記述中の函数 $F_\alpha(z;\zeta)$ はより大きな集合 $(D_\alpha+i\{a\})\cap(D+iB_\alpha)$ (ここに $B_\alpha=\bigcap_{\xi\in S^{n-1}}\{y;\exists b\in B$ について $(y-b)\xi\geq\alpha\{(y-b)^2-((y-b)\xi)^2\}\}$) において正則となり，$B_\alpha$ は $\alpha\to0$ のとき B の凸包に近づくことに注意．なおこの証明を Fourier–Laplace 変換を用いる Bochner の定理の証明（第 8 章命題 8. 2. 4）と比較してみよ.]

注 9) これはまた S. S. f と S. S. g の各繊維により生成される錐のベクトル和とも解釈される.

注 10) それにも拘らず実解析パラメータに関してある種の一意接続性のようなものは成り立つのである．第 4 章 §4 を見よ.

注 11) 実解析パラメータは特に実解析係数の線型偏微分方程式の解に関連して現れる．今 P を (3. 2. 2) の作用素としその**主部**を

(3. 2. 25) $$P_m(x,D)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)D^\alpha$$

で定義する．またこれを用いて P の**特性集合**を

(3. 2. 26) $$\mathrm{Char}\,P=\{(x,i\xi dx\infty);P_m(x,\xi)=0\}$$

で定義するとき，次が成り立つ.

定理 3. 2. 11 （佐藤の基本定理）　S. S. $u\subset$ S. S. $P(x,D)u\cup\mathrm{Char}\,P$.
特に，$P(x,D)u=0$ の解 u は $(x,i\xi dx\infty)\notin\mathrm{Char}\,P$ なる任意の点においてミクロ解析的となる.

この定理から，$P_m(0,x',\pm dx_1)\neq0$ のとき x_1 は $P(x,D)u=0$ の解 u に実解析パラメータとして含まれることがわかり，したがって初期値と呼ばれる制限データ $(\partial/\partial x_1)^k u(x)|_{x_1=0}$, $k=0,1,2,\cdots$ が意味を持つ．このような超曲面 $x_1=0$ は作用素 P に関して**非特性的**と呼ばれる.

定理 3. 2. 11 の証明は線型偏微分方程式の新しい教科書を見れば書いてある（例えば柏原–河合–木村[1]，定理 3. 4. 3 など）．証明のスケッチは本書の第 4 章 §6 末尾の参考 4. 8 (注 26) にも与えられている.

注 12) 最も簡単な座標変換の例としては平行移動 $f(x)\mapsto f(x-a)$，相似変換 $f(x)\mapsto f(\lambda x)$ などがある．これらを用いると周期超函数や同次超函数，偶奇性などの概念を通常の函数の場合と同様に定義することができる．特に，n 変数のデルタ函数は正 $-n$ 次同次である，即ち，$\lambda\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ に対し $\delta(\lambda x)=|\lambda|^{-n}\delta(x)$. これは定義函数を用いれば容易に確かめることができる．（これらに関連して

更に章末の問題5を参照せよ.)

注 13) すなわち $f(x_1, x')=g(x_1{}^2, x')$ を満たす超函数 $g(x_1, x')$

注 14) コンパクト集合の対 $K\subset L$ に対しては自然な包含写像 $\mathcal{B}[K]\subset\mathcal{B}[L]$ が存在し，これは明らかに連続である．しかし Schwartz の分布の場合と異なり，この像は閉部分空間とはならず，むしろ以下に述べるような全く異なった現象を呈する.

注15) a) u を実解析係数の線型偏微分方程式 $P(x, D)u=0$ の原点近傍で定義された超函数解とする．もし $x_1=0$ が P に関して非特性的，かつ supp $u\subset\{x_1\geq 0\}$ ならば，実は原点の近傍で $u\equiv 0$ となることを示せ．[佐藤の基本定理 3. 2. 11(注 11 参照)と定理 4. 4. 1 を用いよ.]

b) (Holmgren の一意性定理) supp $u\subset\{x_1\geq 0\}$ という条件の代わりに $(\partial/\partial x_1)^k u(x)|_{x_1=0}=0, 0\leq k\leq m-1$, と仮定しても同じ結論が得られることを示せ．ここに m は P の階数である．[$Y(x_1)u(x)$ が a)に述べたような解となることを用いよ.]

注 16) この段は次のような議論により著しく簡易化されることが野呂正行氏により示された．すなわち，第一段により我々は一般性を失うことなく

S. S. $f|_{x_1=0}\subset\{x_1=0\}\times\{i\xi dx\infty; \xi'=0$ 又は $\xi_2=1, |\xi_3|<\varepsilon, \cdots, |\xi_n|<\varepsilon, |\xi_1-a|>\varepsilon\}$

という評価が適当な正数 a, ε について成り立っていると仮定できる．このとき，集合 $x_1\geq 0$ を不変にする座標変換

$$\tilde{x}_1 = x_1,\ \ \tilde{x}_2 = x_2+ax_1,\ \ \tilde{x}_3 = x_3, \cdots,\ \ \tilde{x}_n = x_n$$

により，上の評価式は a を 0 で置き換えたものに変わる．この新しい集合は赤道と交わっていないから，この新しい座標系では f に対して直ちに第三段の証明が適用できる．この注意により西瓜割り定理の本質は第三段だけであることがわかり，証明も著しく初等化される.

注 17) 前節と今節で実解析パラメータ，或いはその特別な場合である正則パラメータに関して，解析接続の一意性をある意味で表現するいくつかの結果を学んだので，ここで関連する諸定理をまとめておこう．正則パラメータに関する Taylor 展開係数がもとの超函数芽を決定できないという例(第3章§2参考 3. 3)を見れば以下に述べることも初めから自明という訳ではない.

定理 4. 4. 5 $f(x, t)$ は連結開集合 $\Omega\times T\subset\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$ 上の超函数で，$t\in T$ を実

解析パラメータとして含み，かつコンパクト集合 $K\subset\Omega$ が存在して f の特異台は $K\times T$ に含まれるものとする．このときもしもある点 $t^0\in T$ において

$$(4.4.10)\qquad \forall\alpha \text{ に対し}\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} f(x,t)\Big|_{t=t^0}=0$$

ならば $f(x,t)\equiv 0$ となる．

証明 正則パラメータのときの(4.3.6)式に倣い

$$(4.4.11)\qquad F_\sigma(z,t)=\int_D f(w,t)W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw$$

を考えよう．ここに $D\Supset K$ は有界積分領域である．これを z,t の超函数と見れば定理 3.4.1 により $(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma_\sigma 0)\times T$ の形のある領域で実解析的となり，かつ z についてはそこで明らかに正則である．故に $(\boldsymbol{R}^n\times T)+i(\Gamma_\sigma\times\{0\})0$ の近傍で正則な函数 $F_\sigma(z,\tau)$ が得られる．柏原の補題によれば，このとき錐 $\varDelta_\sigma\subset\boldsymbol{R}^{n+m}$ で $\varDelta_\sigma\cap\{s=0\}=\Gamma_\sigma$ なるものが存在し，$F_\sigma(z,\tau)\in\mathcal{O}((\boldsymbol{R}^n\times T)+i\varDelta_\sigma 0)$ となる．この函数については z を任意に固定したとき仮定により $\forall\alpha$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} F_\sigma(z,t)\Big|_{t=t^0}=\int_D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} f(w,t)\Big|_{t=t^0} W(z-w,\overline{\Gamma_\sigma})dw=0$$

故に正則函数に対する Taylor の定理により $F_\sigma(z,\tau)\equiv 0$ となる．これから次に述べる補題により $f(x,t)\equiv 0$ が得られる．証了.

補題 4.4.6 $f(x,t)$ は上の定理と同様の超函数とするとき，(4.4.11)で定まる $F_\sigma(z,\tau)$ は $\mathrm{Int}(D)\times T$ でその一組の定義函数となる．すなわちそこで

$$(4.4.12)\qquad f(x,t)=\sum_\sigma F_\sigma((x,t)+i\varDelta_\sigma 0)$$

が成り立つ.

証明 定理 3.2.3 により $\Omega\times T$ を少し縮めたところで

$$f(x,t)=\sum_{j=1}^{N} F_j((x,t)+i\varDelta_j 0)$$

なる境界値表示で $\Gamma_j=\varDelta_j\cap\{s=0\}\neq\phi$, $j=1,\cdots,N$, かつ各 $F_j(z,\tau)$ は $(\Omega\setminus K)\times T$ まで解析接続されるようなものがとれる．故にこの各項 $F_j((x,t)+i\varDelta_j 0)$ について補題の主張を証明すればよい．しかるに $f(x,t)=F((x,t)+i\varDelta 0)$ と単項表示を持つときは等式(4.4.12)は本質的に定理 2.3.7 に他ならない．すなわち，このとき各 $F_\sigma(z,\tau)$ は $\mathrm{Int}(D)+i(\varDelta+\Gamma_\sigma\times\boldsymbol{R}^m)0$ で正則となるので，$\mathrm{Int}(D)+i\varDelta 0$ の上で正則函数に対する通常の等式

$$F(z,\tau)=\sum_{\sigma}F_{\sigma}(z,\tau)$$

を示せばよい．この等式は τ を実に固定して証明すれば十分だが，そのときは補題 3.5.9 により上の等式は定理 2.3.7 の言い換えである系 3.5.2 を $f(x)=\chi_D(x)f(x,t)$ に適用したものに他ならない．証了．

次の定理も定理 4.4.5 と全く同様にして証明される．

定理 4.4.7　$f(x,\tau)$ は定理 4.4.5 の通りとし (4.4.10) の代わりに

(4.4.13)　　$\forall t^0\in T$ に対し $f(x,t)|_{t=t^0}=0$

を仮定すれば，やはり $f(x,t)\equiv 0$ となる．

注 18)　定理 4.4.7（前注の最後）は実は f の特異台に対する仮定無しでも成立する：

定理 4.4.7′（大島-片岡）　$f(x,t)$ は開集合 $\Omega\times T$ 上の超函数で t を実解析パラメータとして含み，かつ (4.4.13) を満たすとする．このとき $f(x,t)\equiv 0$ となる．

証明　実解析パラメータ $t=(t_1,\cdots,t_m)$ については

$$f(x,t)|_{t=t^0}=(f(x,t)|_{t_1=t_1{}^0})|_{t_2=t_2{}^0}\cdots|_{t_m=t_m{}^0}$$

であるから，パラメータが一個の場合に定理を証明しておけば十分である．また主張は局所的だから，$\Omega=\{|x|<3\delta\}$，また T も原点の近傍として，原点の十分近くで $f\equiv 0$ を示せばよい．故に $\exists\lambda>0$ が存在し

$$\mathrm{S.S.}\,f(x,t)\subset(\Omega\times T)\times\{i(\xi dx+\theta dt)\infty\,;|\theta|<\lambda|\xi|\}$$

と仮定しても一般性を失わない．このとき f の修正 $\tilde{f}\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n\times T)$ で，それ自身 t を実解析パラメータとして含み $\mathrm{supp}\,\tilde{f}\subset\bar{\Omega}\times T$，かつ $\{|x|<\delta\}\times T$ 上 f と一致するようなものがとれることをまず示そう．

$g(x,t)\in\mathcal{B}[\{|x|\leq 2\delta\}\times\bar{T}]$ を $f|_{\{|x|<2\delta\}}$ の勝手な延長とし

$$h(x,t)=g(x,t)*_{(x,t)}W((x,t),\{|\theta|\leq\lambda|\xi|\})$$

とおくと，h は t を実解析パラメータとして含み，かつ $\{|x|\neq 2\delta\}\times T$ 上差 $g-h$ は実解析函数となる．故に $\chi_\delta(x),\chi_{3\delta}(x)$ をそれぞれ集合 $|x|\leq\delta$，$|x|\leq 3\delta$ の特性函数として

$$\tilde{f}(x,t)=\chi_{3\delta}(x)h(x,t)+\chi_\delta(x)(g(x,t)-h(x,t))$$

とおけばよい．

この $\tilde{f}$ については仮定 (4.4.13) より

(4.14.4) $\qquad \forall t^0 \in T$ に対し $\operatorname{supp} \acute{f}(x,t)|_{t=t^0} \subset \{\delta \leq |x| \leq 3\delta\}$

が成り立っていることに注意せよ．ここで定理 4.4.5 の証明と同様

$$F_\sigma(z,t) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \tilde{f}(w,t) W(z-w, \overline{\Gamma_\sigma}) dw$$

を考えれば，$\Delta_\sigma \cap \{s=0\} = \Gamma_\sigma$ なるある錐 Δ_σ について $F_\sigma \in \mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n \times T + i\Delta_\sigma 0)$ となり，かつ補題 4.4.6 によりこれらは $\tilde{f}$ の一組の定義函数となっている．(4.4.14) によれば t を実で固定する毎に各 F_σ は z の函数として ($W(x,w)$ の正則域に関する) 補題 2.3.4 から定まる $\boldsymbol{R}^n \setminus \{\delta \leq |x| \leq 3\delta\}$ の一定の複素近傍まで正則に延長される．このことから $F_\sigma(z,\tau)$ が $n+1$ 変数の函数として原点の近傍に解析接続されることを示そう．するともとの f は原点の近傍で通常の実解析函数となり，したがって初めの仮定 (4.4.13) からそこで $f \equiv 0$ となる．

さてこの主張は錐 Δ_σ の頂点に十分近い点の十分小さい多重円板状近傍を考え，適当に線型座標変換することにより次の補題に帰着される．

補題 4.4.8 (Malgrange-Zerner) $n+1$ 変数の正則函数 $F(z,\tau)$ は多重円板 $\{|z_j|<1, j=1,\cdots,n\} \times \{|\tau|<1\}$ で正則で，かつ実数 t を $|t|<1$ の範囲で固定する毎に z の函数として $\{|z_1|<R,\ |z_j|<1,\ j=2,\cdots,n\}$ まで正則に延長されるものとする．このとき $F(z,\tau)$ は

(4.4.15) $\qquad \{|z_1|<R,\ |z_j|<1,\ j=2,\cdots,n\} \times \{t \in \boldsymbol{R};\ |t|<1\}$

の近傍で z,τ につき正則となる．

この補題は延長した函数 $F(z,t)$ が最後の集合の上で z,t の超函数とみなせることがわかれば正則パラメータ z_1 に関する実解析性の伝播定理 (系 4.3.9) から直ちに従うが，定理の仮定だけでは集合論的函数 $F(z,t)$ の t に関する可測性さえ明らかでは無いので，証明には函数論の深い結果を必要とする．その概略を以下に記そう．

$z'=(z_2,\cdots,z_n)$，及び τ を固定したときの z_1 に関する $F(z,\tau)$ の冪級数展開の収束半径を $R(z',\tau)$ とする．τ の函数 $\varphi(\tau) = -\log R(z',\tau)$ は $|\tau|<1$ で必ずしも上に半連続ではないので劣調和とは言えないが，それに近い性質を持ち，特に最大値原理を満たす．実際それは F の展開の $z_1{}^k$ の係数を $F_k(z',\tau)$ と書くとき，Cauchy-Hadamard の定理により劣調和函数列 $\dfrac{1}{k}\log|F_k(z',\tau)|$ の上極限に等しく，それは上に有界なことがわかっているから，後者に対する積分不等式は

Fatouの補題により極限移行できて前者に対しても成立する．故にたとえば $K(z,w)$ を半円 $D_+=\{|\tau|\leq 1, \mathrm{Im}\,\tau\geq 0\}$ の Green 函数とすれば

$$\varphi(\tau)\leq\int_{\partial D_+}K(\tau,w)\varphi(w)|dw|$$

が成り立つ．仮定により $\varphi(\tau)\leq 0$，かつ実軸上では $\varphi(t)\leq -\log R$ だから，上の不等式の右辺はこれらの境界値を持つ D_+ 上の調和函数となり，$\tau=t+is$ とおけば結局

$$\varphi(\tau)\leq -\left(1-\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{2s}{1-t^2-s^2}\right)\log R$$

が得られる．すなわち，$F(z,\tau)$ は十分小さい $\forall\varepsilon>0$ について τ を $|t^0|<1-2\sqrt{\varepsilon}$ なる実数 t^0 を中心とする半径 ε の円内に固定したとき，z_1 につき $|z_1|<R\exp\left(1-\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\sqrt{\varepsilon}\right)$ まで解析接続される．Hartogs の有名な補題(一松[1]，補題3.11参照)によれば，$F(z,\tau)$ は結局

$$\left\{|z_1|<R\exp\left(1-\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\sqrt{\varepsilon}\right),\ |z_j|<1,\ j=2,\cdots,n\right\}\times\{|\tau-t^0|<\varepsilon\}$$

で z,τ につき正則となるが，この多重円板を ε 及び t^0 に関して合併したものは集合(4.4.15)の複素近傍となっている．

既に何度も注意したように定理4.4.5の方は f の特異台に関する仮定無しでは一般には成立しないが，指定するデータを定義4.1.6で述べた無限階微分作用素に関する法線微分 $J(D_t)f(x,t)|_{t=t^0}$ の全体まで拡張すれば，一般の f についても $f\equiv 0$ が導かれることが知られている．

注 19) 或いは，Ω' の取り尽し増大列 $\Omega_l'\Subset\Omega'$，$l=1,2,\cdots$ を選び，与えられたデータ $f_k(x')$ を台が $\overline{\Omega_l'}\setminus\Omega_{l-1}'$ に含まれるものの和に分解して，求める $f(x)$ を各 Ω_l 上で順次帰納的に作ってもよい．

注 20) 以下に佐藤超函数論の典型的応用例の一つである境界値理論の概略を記す．

まず

補題 4.5.8 $\Omega'\subset\boldsymbol{R}^{n-1}$ を開集合とし $\Omega=\{0\}\times\Omega'$ とおく．$P(x,D)$ を m 階の実解析係数線型偏微分作用素とし，これに関して $x_1=0$ は非特性的とする(この言葉の意味については参考3.4(注11)参照)．このとき $\forall u\in\mathcal{B}[\Omega]$ に対し

$$u(x)=P(x,D)v(x)+\sum_{j=0}^{m-1}u_j(x')\delta^{(m-j-1)}(x_1) \tag{4.5.13}$$

と分解される．ここに $v(x)\in\mathcal{B}[\Omega]$，$u_j(x')\in{}'\mathcal{B}(\Omega')$ であり，これらは u から (x' について局所的かつ)一意に定まる．

証明はそう初等的ではない．実際この主張は解析的 Cauchy 問題(初期値問題)の一意可解性に関する Cauchy-Kowalevsky の古典的定理と同値である．後者を仮定した証明の概略は次の通り：

$K\subset\{x_1=0\}$ をコンパクトとし，まず $u\in\mathcal{B}[K]$ に対する分解を $v\in\mathcal{B}[K]$，$u_j\in{}'\mathcal{B}[K']$ を用いて構成する．Cauchy-Kowalevsky の定理により，Φ_K: $\mathcal{A}(K)\times\prod_{j=0}^{m-1}{}'\mathcal{A}(K')\to\mathcal{A}(K)$ という連続な全単射写像で，$(\varphi(x),\varphi_0(x'),\cdots,\varphi_{m-1}(x'))$ を次のような"双対 Cauchy 問題"の解 $\phi(x)$ に写すものが存在する：

$$\begin{cases} {}^tP(x,D)\phi(x)=\varphi(x) \\ (-\partial/\partial x_1)^j\phi(x)|_{x_1=0}=\varphi_j(x'),\ \ 0\le j\le m-1. \end{cases}$$

${}^t\Phi_K$: $\mathcal{B}[K]\to\mathcal{B}[K]\times\prod_{j=0}^{m-1}{}'\mathcal{B}[K']$ をその双対写像とする．$u\in\mathcal{B}[K]$ に対して ${}^t\Phi_K(u)=(v(x),u_{m-1}(x'),\cdots,u_0(x'))$ と置くとき双対写像の定義により

$$\begin{aligned}\langle u,\phi\rangle &= \langle u,\Phi_K(\varphi,\varphi_0,\cdots,\varphi_{m-1})\rangle=\langle {}^t\Phi_K(u),(\varphi,\varphi_0,\cdots,\varphi_{m-1})\rangle \\ &= \langle v,\varphi\rangle+\sum_{j=0}^{m-1}\langle u_j,\varphi_{m-j-1}\rangle \\ &= \langle v,{}^tP(x,D)\phi\rangle+\langle\sum_{j=0}^{m-1}u_j(x')\delta(x_1),(-\partial/\partial x_1)^{m-j-1}\phi\rangle \\ &= \langle P(x,D)v,\phi\rangle+\langle\sum_{j=0}^{m-1}u_j(x')\delta^{(m-j-1)}(x_1),\phi\rangle\end{aligned}$$

よって(4.5.13)が成り立つ．二つのコンパクト集合 $K_1\subset K_2\subset\{x_1=0\}$ について明らかに ${}^t\Phi_{K_2}|_{\mathcal{B}[K_1]}={}^t\Phi_{K_1}$ であり，したがってこれらより求める分解(4.5.13)の成分を与える層の準同型 ${}^t\Phi=({}^t\Phi_\Omega)_{\Omega\subset\{x_1=0\}}$ が導かれる．(例えば Ω が有界なら，$u\in\mathcal{B}[\Omega]$ に対して延長 $\tilde{u}\in\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ を選び，上で作った写像 ${}^t\Phi_{\bar{\Omega}}(\tilde{u})$ の $\mathcal{B}[\Omega]\times\prod_{j=0}^{m-1}{}'\mathcal{B}[\partial\Omega']$ 上への制限をとれば求める分解成分が得られる．)

定理 4.5.9 (小松-河合-Schapira) $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を開集合とし $\Omega_+=\Omega\cap\{x_1>0\}$ とおく．u を Ω_+ で定義された m 階の方程式 $P(x,D)u=0$ の解とし，$x_1=0$ は P につき非特性的とする．このとき超函数 $[u]\in\mathcal{B}(\Omega)$ で台が $x_1\ge 0$ に含まれるもの，及び $u_j(x')\in{}'\mathcal{B}(\Omega')$ (ここに Ω' は $\Omega\cap\{x_1=0\}$ を $n-1$ 次元の開集合と見たもの)で等式

$$(4.5.14)\qquad P(x,D)[u]=\sum_{j=0}^{m-1}u_j(x')\delta^{(m-j-1)}(x_1)$$

を満たすものが存在する．これらは境界に沿って局所的かつ一意に定まる．

証明　台が $x_1\geq 0$ に含まれるような u の延長 $w\in\mathcal{B}(\Omega)$ を任意に選ぶ．$P(x,D)w$ は台が $x_1=0$ に含まれ，したがって補題 4.5.8 により

$$P(x,D)w=P(x,D)v+\sum_{j=0}^{m-1}u_j(x')\delta^{(m-j-1)}(x_1)$$

の形に書ける．故に $[u]=w-v$ が求める延長の一つである．一意性は補題 4.5.8 をそのような二つの表現の差に対して適用すれば示せる．証了．

$[u]$ を u の標準的延長，$\{u_j(x')\}_{j=0}^{m-1}$ を u の境界値と呼ぶ．u が $x_1=0$ の近傍で定義された解のときには，$[u]=Y(x_1)u$ が佐藤の基本定理 3.2.11 (注 11 参照) と定理 3.2.5 により意味を有し，かつ明らかに (4.5.14) を満たす．その際の係数 u_j は Leibniz の公式により

$$(4.5.15)\quad u_j(x')=\sum_{k=0}^{j}P_k(x,D')D_1^{\,j-k}u(x)|_{x_1=0},\ \ j=0,\cdots,m-1$$

となる．ここに

$$P(x,D)=\sum_{k=0}^{m}P_k(x,D')D_1^{\,m-k},\qquad \mathrm{ord}\,P_k(x,D')\leq k$$

と仮定した．特に P_0 は函数であり，$x_1=0$ が非特性的との仮定によりそこで 0 にならない．定理 3.5.7 により同じ公式が $P(x,D)u=0$ の境界まで C^m 級の古典的な解に対しても成立する．故に上で定義した境界値 $\{u_j(x')\}_{j=0}^{m-1}$ は正規境界作用素系 (4.5.15) に関する超函数論的初期値，及び古典的な意味での境界値の拡張概念となっている．

$u(x)$ が Schwartz の分布で，かつ境界の近傍に分布として (従って台を $x_1\geq 0$ に制限した) 延長 w を許す場合は，境界値もまた分布となる．実際，この場合は $P(x,D)w$ は局所的に有限階となり，したがって補題 4.5.8 に対応する修正操作は有限回の代数的な代入手続きだけで実行可能である (金子[1]，第 5 章参照)．諸演算の両立性により計算結果は超函数の意味でも成り立つので，こうして得られた分布の係数は定理 4.5.9 の意味の境界値となっている．

問 4.5.3　定理 4.5.9 を用いて，境界値 $\{u_j(x')\}_{j=0}^{m-1}$ が解 $u(x)$ を境界 $x_1=0$ の近傍で一意的に決定することを示せ．

問 4.5.4　a)　原点において境界の片側 $x_1>0$ で局所的に定義された $P(x,D)u=0$ の解 u の境界値 $u_j(x')$ がすべて点 $(0, i\xi' dx'\infty)$ においてミクロ解析的ならば，u は $\Omega_+\times p_{dx'}{}^{-1}(i\xi' dx'\infty)$ の形の集合の上でミクロ解析的となることを示せ．ここに Ω_+ は原点の半近傍，$p_{dx'}: S^{n-1}\setminus\{\pm dx_1\}\to S^{n-2}$ は赤道上への射影である．［公式(4.5.14)に定理3.2.5，3.2.11，4.4.3を適用せよ．］

b)　u を原点の近傍で定義された解とするとき

$$p_{dx'}(\mathrm{S.S.}\,u|_{x_1=0})=\bigcup_{j=0}^{m-1}\mathrm{S.S.}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j u(x)\Big|_{x_1=0}\right)=\bigcup_{j=0}^{\infty}\mathrm{S.S.}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j u(x)\Big|_{x_1=0}\right)$$

となることを示せ．ここに $p_{dx'}$ は a) と同じ写像とする．（この主張は定理3.2.9の精密化である．参考3.3に掲げた例により全く一般の実解析パラメータ x_1 を含んだ超函数 $u(x)$ についてはこれは成立しない．）［境界の両側からの標準的延長 $Y(x_1)u(x)$, $Y(-x_1)u(x)$ を考え，a)に帰着せよ．］

注 21)　$f, g\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ とし，どちらか一方はコンパクトな特異台を持つとする．このとき，$f*g$ が $\mathcal{B}/\mathcal{A}(\boldsymbol{R}^n)$ の元として確定し，その超函数としての任意の代表元に対し評価式(3.4.32)が成り立つことを示せ．

注 22)　この証明は誤りである．$g(x,\omega)$ は $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の元として勝手に延長したので例4.2.7は使えない．$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の超函数が $\Omega_0\times\Delta_0$ 上 $\mathcal{A}$ の切断になるというだけでは w で積分した結果の S.S. から Δ_0 が抜けることは言えないので，この定理も $\Delta\neq\boldsymbol{S}^{n-1}$ の場合は後述の補題4.6.6と4.6.7を使って証明しなければならない（次注参照）．ここはひとまず $\Delta=\boldsymbol{S}^{n-1}$ と思って読んで頂きたい．

注 23)　このことから定理4.6.3で証明が残っていた一般の $\Delta\neq\boldsymbol{S}^{n-1}$ に対する同型(4.6.6)も確立された．

注 24)　(4.6.24)のような超函数は $\bar{\Delta}$ がある開凸錐 Γ を以て $\Gamma^\circ\cap\boldsymbol{S}^{n-1}$ の形に書けるときは $F(x+i\Gamma 0)$ と表される．これにより点 $(x^0, i\omega^0 dx\infty)$ におけるミクロ函数の芽は $\omega^0\in\mathrm{Int}\,(\Gamma^\circ)$ を満たすある Γ により必ず $F(x+i\Gamma 0)$ の形の超函数で代表できることがわかる．しかし $F(x+i\Gamma 0)$ のミクロ函数としての台は ω について常に $i\omega^0 dx\infty$ を含むある固有閉凸錐に含まれたコンパクト集合となっていることに注意されたい．一般のミクロ函数の芽は超函数の芽とは，やはり商空間を通して関連していると考えるべきである．

注 25)　積は supp[f]，或いは supp[g] の上では必ずしも確定しないことに

注意せよ．実際，たとえば $\delta(x_1)$ と実解析函数 $\varphi(x_2)$ の積はミクロ函数として S.S. $\delta(x_1)$ の外でだけ 0 となるが，$\varphi(x_2)$ はミクロ函数としては 0 と同一視され，他方 $\delta(x_1)\cdot 0=0$ である．

注 26) ここでミクロ局所作用素の部分クラスとして最も頻繁に使用される擬微分作用素，或いはミクロ微分作用素について簡単に解説しておこう．形式級数 $P(x,D)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}P_j(x,D)$ が点 (x^0,ξ^0) の近傍で定義されたミクロ微分作用素であるとは，点 (x^0,ξ^0) の複素近傍 $U\times D$ があり，各 $P_j(z,\zeta)$ は $U\times \boldsymbol{C}^{\times}D$ (ここに $\boldsymbol{C}^{\times}D=\{c\zeta;c\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\},\zeta\in D\}$) で正則，かつ ζ につき複素 j 次同次で，かつ全体として次のような評価を満たすことを言う：j によらない定数 $C,B>0$ があり

(4.6.29) $j<0$ のとき $|P_j(z,\zeta)|\leq CB^{|j|}|j|!$

$j\geq 0$ のとき $\forall\varepsilon>0$ に対し $\exists C_\varepsilon>0$ があり $|P_j(z,\zeta)|\leq C_\varepsilon\varepsilon^j/j!$

$m=\max\{j;P_j(z,\zeta)\not\equiv 0\}$ のことを P の階数という．$\Omega\times\Delta$ を $U\times D$ の実の切り口とするとき $\Omega\times\Delta$ 上のミクロ局所作用素として $P(x,D)$ は次のような核超函数を持つ：

$$K(x,y)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}P_j(x,D)\int_{\Delta}W_0(x-y,\omega)d\omega$$
$$=\int_{\Delta}\sum_{j=-\infty}^{\infty}P_j(x,\omega)\Phi_{-n-j}((x-y)\omega+i0)d\omega$$

ここに $\Phi_j(\tau)$ は次のような一変数の正則函数の列である．

$$(4.6.30)\quad \Phi_j(\tau)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^j\Gamma(-j)}{(-2\pi i)^n}\tau^j & j<0\text{ のとき}\\[2ex] \dfrac{1}{(-2\pi i)^n\Gamma(j+1)}\tau^j\left(\log\tau-\displaystyle\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k}\right) & j\geq 0\text{ のとき}\end{cases}$$

これらは $d\Phi_j(\tau)/d\tau=\Phi_{j-1}(\tau)$ という漸化式を満たす．級数

$$K(z,w,\zeta)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}P_j(z,\zeta)\Phi_{-n-j}((z-w)\zeta)$$

は領域

$$\{\mathrm{Im}(z-w)\zeta>0\}\cap\left\{|z-w|<\frac{1}{B}\right\}\cap\{z\in U,\zeta\in D\}$$

上広義一様に絶対収束し，したがって実軸の近傍で平面 Radon 分解成分に由来する函数 $W_0((z-w)\zeta)$ と同様の正則域を持つから，上のように定義された $K(x,y)$ を核とする積分作用素は $\Omega\times\Delta$ 上 $\mathscr{C}$ の層準同型として意味を持つ．(Ω

の直径がミクロ微分作用素 P の収束半径 $1/B$ より小さければ積分作用素 $u(x)\mapsto\int K(x,y)u(y)dy$ は $u\in\mathcal{B}[\bar{\Omega}]$ に対して意味を持つけれども，それは $\partial\Delta$ の方向成分を持つ特異性を伝播させてしまうので，局所的でもミクロ局所的でもない．しかし，この超函数 $P(x,D)u$ から $\Omega\times\Delta$ 上に誘導されるミクロ函数は u が代表する $\Omega\times\Delta$ 上のミクロ函数のみにより確定するのである．Ω の直径が $1/B$ より大きいときは，一変数のときにしたように $P(x,D)$ の作用を直径 $<1/B$ の微小近傍で核函数 $K(x,y)$ により意味付けし，それらをはり合わせればよい．)

定理 4.6.18 (佐藤の基本定理の精密化) 微分作用素 $P(x,D)$ はその特性集合 Char P の外でミクロ函数の層 $\mathcal{C}$ に層の同型として働く．

点 (x^0,ξ^0) において $P_m(x^0,\xi^0)\neq 0$ とする (P_m は P の主部)．この点における P の逆作用素は $-m$ 階のミクロ微分作用素として構成される．実際 $P(x,D)=\sum_{k=0}^{m}P_k(x,D)$ と同次分解し，等式

$$\begin{aligned}P(x,D)&\int_\Delta\sum_{j=-\infty}^{\infty}Q_j(x,\omega)\Phi_{-n-j}((x-y)\omega+i0)d\omega\\&=\int_\Delta\Phi_{-n}((x-y)\omega+i0)d\omega\\&=W_0(x-y,\Delta)\qquad(=\delta(x-y),\ \mathcal{C}(\Omega\times\Omega\times\Delta\times\Delta^a)\text{ 上})\end{aligned}$$

に未定係数法を用いれば，漸化式

$$\begin{aligned}P_m(x,\omega)Q_{j-m}(x,\omega)+\{D_\xi P_m(x,\omega)D_x+P_{m-1}(x,\omega)\}Q_{j-m+1}(x,\omega)+\cdots\\+P(x,D)Q_j(x,\omega)=0,\qquad j=-1,-2,\cdots\end{aligned}$$

が得られる．ここに $j>-m$ については $Q_j(x,\omega)=0$ とする．また $Q_{-m}(x,\omega)=1/P_m(x,\omega)$．この関係式からすべての係数 $Q_j(x,\omega)$ が決定される．優級数の方法を用いると，これらが (4.6.29) の型の評価を満たすことが示せる．(この計算は解析的 Cauchy 問題

$$\begin{cases}[P_m(x,\omega)D_t{}^m+\{D_\zeta P_m(x,\omega)D_x+P_{m-1}(x,\omega)\}D_t{}^{m-1}+\cdots\\\qquad+P(x,D)]Q(x,\omega,t)=0\\D_t{}^kQ(x,\omega,t)|_{t=0}=0,\quad 0\le k\le m-2\\D_t{}^{m-1}Q(x,\omega,t)|_{t=0}=1/P_m(x,\omega).\end{cases}$$

の収束解 $Q(x,\omega,t)=\sum_{j=0}^{m}Q_{-j}(x,\omega)t^{j-1}/(j-1)!$ を求める計算と同等であること

に注意. 故に Cauchy-Kowalevsky の定理を仮定すれば上は自明となる.) こうして P の右逆がミクロ微分作用素 $Q(x,D)=\sum_{j=-\infty}^{-m} Q_j(x,D)$ として構成された. P の左逆の方は ${}^tP(x,D)$ に対し上のようにして $\Omega\times\varDelta^a$ で作った右逆の双対作用素として得られる : $L(x,y)$ を ${}^tP$ の右逆作用素の核函数とするとき, 等式 ${}^tP(x, D)L(x, y)=W_0(x-y, -\varDelta)$ から x と y を交換して ${}^tP(y,D)K(x,y)=W_0(x-y,\varDelta)$ が得られる, ここに $K(x,y)=(-1)^nL(y,x)$. そこでこの核函数 K に対応するミクロ局所作用素を仮に $Q(x,D)$ と書けば, $Q(x,D)P(x,D)=id$ となることが, コンパクト台の超函数への作用から容易にわかる. よって代数学で良く知られているように左右の逆作用素は一致し, P の逆を与える.

実はより一般にミクロ微分作用素 P に対し ${}^tP$ もまたミクロ微分作用素となることが知られている. 上の主張も微分作用素より一般に有限階のミクロ微分作用素に対して成立する. これらを含めてミクロ微分作用素論の詳細については専門の書, 例えば柏原-河合-木村[1]などを見られたい.

注 27)　定理 4.5.9 (注 20 参照) を仮定し, $P(x,D)u=0$ の $x_1>0$ における解 $u(x_1,x_2)$ の境界値 $v(x_2)$ が e) におけると同じ評価式を満たすことを示せ. またこの評価式を用いて方程式 $P(x,D)u(x_1,x_2)=\delta(x_1,x_2)$ が超函数解を持たないことを示せ. [この方程式の解 u は $x_1>0$ における $P(x,D)u=0$ の解として $x_1=0$ への境界値 $\delta(x_2)$ を持つべきことを用いよ.]

注 28)　(佐藤の一般積)　二つの超函数 $f(x), g(x)$ に対して対称積

$$(f(x)g(y)+f(y)g(x))/2$$

を考える. この超函数が対角線 $x-y=0$ の余法線を特異スペクトルに含まないときに積 $f(x)g(x)$ を

$$f(x)g(x) = (f(x)g(y)+f(y)g(x))/2|_{x-y=0}$$

で定義する. 参考 1.8 における積 $\delta(x)\,\mathrm{f.p.}(1/x)=-(1/2)\delta'(x)$ をこの方法で解釈してみよ. またこの考え方を三つ以上の超函数の積に一般化せよ.

注 29)　(第 1 章問題 5 に関連して)　極限 $\lambda\to 0$ の意味を適当に解釈することにより $\left(x^3\dfrac{d}{dx}+\lambda x\right)u=0$ のしかるべく選んだ超函数解の基底が $x^3\dfrac{d}{dx}u=0$ の超函数解の基底に移行することを示せ. [特異台が一定のコンパクト集合に含まれるような超函数の全体が成す空間に適当な位相を入れる. 或いは正則パラメータ λ に関する有限部分や留数を用いる. 全く一般の超函数に対して直接

“収束”という言葉を用いないこと.]

注 30) 簡単のため L も柱状集合としよう. 以下必要なのはこの場合だけである. (一般の場合は (6.1.2) を用いて以下の証明を翻訳すればよい.)

注 31) 更に任意の凸開集合 $U\subset \boldsymbol{C}^n$ に対して始めの列の切断加群の複体が完全となるならば, 任意の凸開集合 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ に対し後の列の切断加群の複体は完全となる. 従って特に後の列は層の完全列となる.

注 32) 以上の構成法は, 一般の層と部分多様体の組に対して適用でき, また更に抽象化されて多くの有用な層がこの方法で導入される (柏原–Schapira [1] 参照). 今日では, 上述の対応 $\mathcal{Q}\to R^{n-1}\tau'_*\pi'^{-1}\mathcal{Q}$ を (Fourier–) 佐藤変換, $\to\mathcal{O}^n_{S^*\boldsymbol{R}^n}(\pi^{-1}\mathcal{O})$ 佐藤のミクロ局所化と呼んでいる.

注 33) このままでは $(1+|z|^2)e^{-\phi(z)}f(z)/J(z)\in L_2(U\cap \boldsymbol{C}^n)$ と限らない. この証明は $-\log d(z)$ よりもう少し複雑な多重劣調和函数 $\theta(z)$ で $\overline{\overline{V}}\subset U$ なる任意の $V\subset \boldsymbol{C}^n$ 上有界となるものを用いて書き直す必要がある. 実は全く一般の U についてはこのような函数の存在はまだ知られていないが, 凸開集合や, Grauert の定理 6.4.1 の証明で用いた型の複素近傍などについてはこのような函数を容易に構成できるので, 以下の議論には十分である.

注 34) なお, この補題の内容は既に H. Kneser により 1932 年に発見されていたことがわかった (Math. Annalen **106**, 656–660).

注 35) 実際, $F\in\mathcal{O}_\infty((\boldsymbol{P}^1)^n\#K)$ が $G_j\in\mathcal{O}(U_jK)$ により $F=G_1+\cdots+G_n$ と表されたとすれば, γ_j を K_j を正の向きに一周する単純閉曲線, ζ_j をその外の点として Cauchy の積分定理により, 例えば

$$\oint_{\gamma_2}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{F(z)dz_2\cdots dz_n}{(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}=\oint_{\gamma_2}\cdots\oint_{\gamma_n}\frac{G_1(z)dz_2\cdots dz_n}{(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}$$

となり, これは z_1 の函数として全平面で正則, かつ無限遠で 0 となるから, Liouville の定理により恒等的に 0. この左辺に $\oint_{\gamma_1}dz_1\frac{1}{\zeta_1-z_1}$ を施せば $(-2\pi i)^nF(\zeta)$ が得られるから, これも 0 であることがわかる.

注 36) この例を進めて $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{kx+\tau}$ のような和を考えると評価式 (4.3.13) 自身の反例ができてしまうのではないかと思われるかもしれない. この和は $\mathrm{Im}\,\tau>0$ において, 例えば C^∞ 級函数の意味で収束し, $\bar\partial_\tau$ を施すと 0 になるので, 確かに τ を正則パラメータとして含む超函数を定めるが, x,τ について

実解析的ではなくなってしまう．(直感的に云えば，x が少しでも複素近傍の下半平面側に出ると，$\mathrm{Im}\,\tau$ が何であってもどれかの項の分母に零点が現れてしまう.) よってその $t\to+0$ における境界値の特異スペクトルから赤道 $dt=0$ が抜けなくても矛盾はない．

注 37) 偏微分方程式への応用に関する文献については，あとがきの中の文献案内を参照されたい．

問の答

第1章

問 1.1.1 $x_+^{-m}+(-1)^m x_-^{-m}=\left[-\dfrac{z^{-m}}{2\pi i}\log(-z)+\dfrac{z^{-m}}{2\pi i}\log z\right]=\left[\dfrac{z^{-m}}{2\pi}(\arg z-\arg(-z))\right]$. ここで $\pm\operatorname{Im} z>0$ において $(\arg z-\arg(-z))=\pm\pi$ となるから.

問 1.1.2 $x\cdot\delta^{(k)}(x)=\left[z\dfrac{d^k}{dz^k}\left(-\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{z}\right)\right]=\left[z\left(-\dfrac{1}{2\pi i}\right)\dfrac{(-1)^k k!}{z^{k+1}}\right]=\left[-\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{(-1)^k k!}{z^k}\right]$ $=-k\left[-\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{z^k}\right]=-k\delta^{(k-1)}(x)$. ただし $k=0$ の場合は $x\cdot\delta(x)=0$.

問 1.1.3 $\left(\text{f. p.}\dfrac{1}{x}\right)^{(k)}=\dfrac{(-1)^k k!}{2}\left(\dfrac{1}{(x+i0)^{k+1}}+\dfrac{1}{(x-i0)^{k+1}}\right)=(-1)^k k!\,\text{f. p.}\dfrac{1}{x^{k+1}}$

$\lambda\notin\boldsymbol{Z}$ 又は $\lambda\in\boldsymbol{Z}$ で $\lambda-k>0$ のとき

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k(x_\pm{}^\lambda)=(\pm1)^k\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)x_\pm{}^{\lambda-k}$$

$\lambda\in\boldsymbol{Z}, \lambda-k=0$ のとき

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k(x_\pm{}^\lambda)=(\pm1)^k\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)\,Y(\pm x)$$

$\lambda\in\boldsymbol{Z},\ \lambda\geq0,\ \lambda-k<0$ のとき

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k(x_\pm{}^\lambda)=(\pm1)^{\lambda+1}\lambda!\ \delta^{(k-\lambda-1)}(x)$$

最後に $\lambda\in\boldsymbol{Z},\ \lambda<0$ のときは

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k(x_\pm{}^\lambda)=(\pm1)^k\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)x_\pm{}^{\lambda-k}$$
$$+\frac{(\mp1)^{\lambda-1}(-1)^k}{(k-\lambda-1)!}\left\{\sum_{j=1}^k(-1)^j\frac{k!}{j(k-j)!}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+j+1)\right\}\delta^{(-\lambda+k-1)}(x).$$

また

$$(\log|x|)^{(k)}=(-1)^{k-1}(k-1)!\ \text{f. p.}\frac{1}{x^k}$$

いずれも定義函数に対して計算した後，例 1.1.5 の定義により超函数に翻訳すればよい.

問 1.2.1 $\operatorname{supp} Y(x)=\{x\geq0\}$, $\operatorname{supp}\delta(x)=\{0\}$, $\operatorname{supp}(x\pm i0)^\lambda=\boldsymbol{R}$, $\operatorname{supp} x_\pm{}^\lambda=\{\pm x\geq0\}$, $\operatorname{supp}|x|^\lambda=\boldsymbol{R}$, $\operatorname{supp}\text{f. p.}\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{R}$, $\operatorname{supp}\log|x|=\boldsymbol{R}$.

問 1.2.2 後半は x による掛け算が層の準同型であることから，前半は同じく $1/x$ が $x\neq0$ において層の準同型となることから出る.（定義函数を用いて直接確かめることもできる.）

問 1.3.1 $\operatorname{sing\,supp}(x\pm i0)^\lambda=\{0\}$（ただし λ が非負整数のときは $=\phi$), $\operatorname{sing\,supp} x_\pm{}^\lambda$

$=\{0\}$，sing supp $|x|^{\lambda}=\{0\}$（λ が非負偶整数のときは $=\phi$），sing supp f. p. $\dfrac{1}{x}=\{0\}$（一般に sing supp f. p. $F(x)=F(x)$ の実軸上の極の集合），sing supp $\log|x|=\{0\}$．

問 1.3.2　$\displaystyle\int_a^b \text{f. p.}\frac{1}{x}dx=\int_{\gamma_+}\frac{1}{2z}dz+\int_{\gamma_-}\frac{1}{2z}dz=\frac{1}{2}\log\frac{b}{|a|e^{i\pi}}+\frac{1}{2}\log\frac{b}{|a|e^{-i\pi}}=\log\frac{b}{|a|}$

問 1.3.3　$u(x)=[F(z)]$ とおくと $xu(x)=[zF(z)]=1=[\varepsilon(z)]$，すなわち，原点の近傍で正則な函数 $H(z)$ があって $zF(z)=\varepsilon(z)+H(z)$．従って $F(z)=\varepsilon(z)/z+c/z+H_1(z)$．故に $u(x)=\dfrac{1}{x+i0}+c_1\delta(x)$．

問 1.4.1　一つの答は $\left[-\dfrac{1}{2\pi i}e^{1/z}\log(-z)\right]$．これは形式的には $e^{1/x}Y(x)$ に等しい．

問 1.4.2　$\dfrac{1}{x+i0}=x_+{}^{-1}-(x_-{}^{-1}+i\pi\delta(x))$．両成分に原点を台とする超函数を同時につけ加えることができ，これが不定性となる．

問 1.6.1　積分区間を $]-\infty,\varepsilon]$，$[\varepsilon,1-\varepsilon]$，$[1-\varepsilon,\infty[$ の三つに分けると，被積分超函数はそれぞれの区間で $-(-z)^{p-1}(1-z)^{q-1}/2i\sin\pi(p-1)$，$z^{p-1}(1-z)^{q-1}\varepsilon(z)$，$z^{p-1}(z-1)^{q-1}/2i\sin\pi(q-1)$ という定義函数を持つ．これらを用いて定積分を具体的に表わせば，パラメータ p,q に関する正則性がわかる．（これは Pochhammer の公式として古典的に知られているものになる．）その他は略．

問 1.6.2　被積分超函数は $-(-z)^{s-1}e^{-z}/2i\sin\pi(s-1)$ という，それ自身も $+\infty$ で絶対積分可能な定義函数を有する．これを用いて通常の計算に帰着させる．（Hankel の公式．）

問 1.6.3　S. S. $\dfrac{1}{x+i0}$ は上下対称ではないので $\dfrac{1}{x+i0}$ は実数値でない．$\mathrm{Re}\dfrac{1}{x+i0}=$ f. p. $\dfrac{1}{x}$，$\mathrm{Im}\dfrac{1}{x+i0}=-\pi\delta(x)$．複素共役はまさに $\dfrac{1}{x-i0}$．

問 1.6.4　$z\dfrac{dF(z)}{dz}+F(z)=0$ を求積して $F(z)=\dfrac{c}{z}$．これから，超函数解の線型基底 $\dfrac{1}{x+i0}$，$\dfrac{1}{x-i0}$ が直ちに得られる．実数値にするには実部，虚部をとればよい．答は f. p. $\dfrac{1}{x}$，$\delta(x)$．

問 1.6.5　分解は $f(x)=(f(x)+f(-x))/2+(f(x)-f(-x))/2$ で与えられる．一意性は明らか．$\dfrac{1}{x+i0}=-\pi i\delta(x)+\dfrac{1}{2}$ f. p. $\dfrac{1}{x}$．

問 1.7.1　$\mathcal{B}\oplus\mathcal{B}$．これは $\boldsymbol{R}\supset\Omega\mapsto\mathcal{B}(\Omega)\oplus\mathcal{B}(\Omega)$ で定義される層である．

問 1.8.1　$F(z)=1$ で反例を構成する．積分起点を z_0 とするとき $D^{-k}F(z)=\dfrac{1}{k!}(z-z_0)^k$ に注意すれば補題 1.8.1 と同様にゆく．

問 1.8.2　$\displaystyle\frac{1}{D-\lambda}\delta(x)=\frac{1}{1-\lambda/D}\frac{1}{D}\delta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{D}\right)^k Y(x)=\left[-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{D_z}\right)^k\log(-z)\right]$ $\displaystyle=\left[-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{z^k}{k!}\left\{\log(-z)-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right\}\right]=e^{\lambda x}Y(x)$．ここで次の二つの技巧を用いた．a)　積分起点は $z_0=-\varepsilon$ととるべきだが，積分の絶対収束性の故に $z_0=0$に変更した．b) $\dfrac{1}{2\pi i}\lambda^k\dfrac{z^k}{k!}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right)$は整函数なので超函数としては 0 を定める．ついでながらここで用いた擬微分作用素 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{D_z}\right)^k$ は収束半径 ∞ であり，上の超函数解も大域的に定まる．

第2章

問2.1.1　最大値原理：領域 $U\subset \boldsymbol{C}^n$ で正則な函数 $F(z)$ の絶対値が U の内点で最大値に到達すれば，$F(z)$ は U で定数となる．これは多重円板に対する Cauchy の積分公式(2.1.1)から得られる不等式 $|F(a)|\leq \dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}|F(a_1+r_1e^{i\theta_1},\cdots,a_n+r_ne^{i\theta_n})|d\theta_1\cdots d\theta_n$ から直ちに従う．（多重円板に対しては最大値は境界の一部 $\{|z_1-a_1|=r_1\}\times\cdots\times\{|z_n-a_n|=r_n\}$ でとられることに注意せよ．）一致の定理：領域 $U\subset\boldsymbol{C}^n$ 上の二つの正則函数 $F(z), G(z)$ が U のある開部分集合 V 上で一致していれば実は U 全体で一致する．（U 内に集積点を持つ点列の上で一致しているだけではだめ．）証明は一変数の場合に帰着させれば容易．これから一変数のときと同様に解析接続の概念が意味を持ち，単連結領域における解析接続の一価性が導かれる．

問2.1.2　$\sum\limits_\alpha z_1z^\alpha=z_1/(1-z_1)\cdots(1-z_n)$（多重等比級数）．$r_j\leq 1$, $j=1,\cdots,n$, かつどれか一つは等号が成り立つような組 $(r_1,\cdots,r_n)$ がすべて関連収束半径となる．この冪級数が広義一様収束する範囲は $|z_j|<1$, $j=1,\cdots,n$. ただし $z_1=0$（z_2 以下任意）という点でも"収束"はしている．$\sum\limits_\alpha\dfrac{|\alpha|!}{\alpha!}z^\alpha=\sum\limits_{k=0}^\infty(z_1+\cdots+z_n)^k=\dfrac{1}{1-(z_1+\cdots+z_n)}$　（多項定理）$r_1+\cdots+r_n=1$ を満たす組 $(r_1,\cdots,r_n)$ がすべて関連収束半径となる．冪級数は $|z_1|+\cdots+|z_n|<1$ で(広義一様に)収束する．（括弧でくくった方はもっと広いところ $|z_1+\cdots+z_n|<1$ で収束している．）

第3章

問3.1.1　Γ° の端点が有限個 $\xi^1,\cdots,\xi^N$ の場合，$\sum\limits_{k=1}^N W(x,\xi^k)$ は $\{0\}+i\Gamma 0$ の境界を越えて延長できない $\mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n+i\Gamma 0)$ の元の境界値となるが S. S. はちょうど端点のみより成る．端点が無限にある場合も収束する級数で同様の例が作れる．

問3.2.1　$\alpha_j\leq\beta_j$ のとき $x^\alpha\delta^{(\beta)}(x)=\sum\limits_\sigma\left[\dfrac{z^\alpha\,\mathrm{sgn}\,\sigma}{(-2\pi i)^n}D_z{}^\beta\left(\dfrac{1}{z_1\cdots z_n}\right)\right]_{z\to x+i\Gamma_\sigma 0}$

$$=\sum_\sigma\left[\frac{\mathrm{sgn}\sigma}{(-2\pi i)^n}\frac{(-1)^{|\beta|}\beta!}{z_1{}^{\beta_1-\alpha_1+1}\cdots z_n{}^{\beta_n-\alpha_n+1}}\right]_{z\to x+i\Gamma_\sigma 0}$$

$$=\sum_\sigma\left[\frac{\mathrm{sgn}\,\sigma}{(-2\pi i)^n}\frac{(-1)^{|\beta|}\beta!}{(-1)^{|\beta-\alpha|}(\beta-\alpha)!}D_z{}^{\beta-\alpha}\frac{1}{z_1\cdots z_n}\right]_{z\to x+i\Gamma_\sigma 0}=(-1)^{|\alpha|}\frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}\delta^{(\beta-\alpha)}(x)$$

それ以外のときは 0 になる．

問3.3.1　$u(x)=\sum\limits_{j=1}^N F_j(x+i\Gamma_j 0)$ とおけば $\dfrac{\partial}{\partial x_1}u=\sum\limits_{j=1}^N\dfrac{\partial F_j}{\partial z_1}(x+i\Gamma_j 0)=0$. 補題3.2.7により $\dfrac{\partial F_j}{\partial z_1}=\sum\limits_{k=1}^N H_{jk}(z)$ と書ける．不定積分で $\dfrac{\partial G_{jk}(z)}{\partial z_1}=H_{jk}(z)$ の解 $G_{jk}(z)$ を求め，$G_j(z)=F_j(z)-\sum\limits_{k=1}^N G_{jk}(z)$ とおけば，$\dfrac{\partial G_j}{\partial z_1}=0$, つまり G_j は $z_2,\cdots,z_n$ のみの函数で，$u(x)=\sum\limits_{j=1}^N G_j(x+i\Gamma_j 0)$.

問 3.4.1 一変数のときと同様の計算で $\int_{\boldsymbol{R}}\varphi(x)\delta(x_1)dx_1=\varphi(0,x')$ を確かめ，反復積分を実行するか，あるいは Taylor の定理 $\varphi(x)=\varphi(0)+\sum_{j=1}^{n}x_j\varphi_j(x)$ を用い，問 3.2.1 により $\varphi(x)\delta(x)=\varphi(0)\delta(x)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)x_j\delta(x)=\varphi(0)\delta(x)$ を示してもよい．

問 3.4.2 $\varphi(x)\neq 0$ なるところでは $\dfrac{1}{\varphi(x)+i0}=\dfrac{1}{\varphi(x)}$ は実解析函数，$\varphi(x)=0$ の近傍では $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ は $\operatorname{Im}\varphi(z)>0$ で正則であり，この領域は $\left\{\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)_x y>0\right\}$ の開きを持つ（x に依存する）無限小半空間である．この境界値として $\dfrac{1}{\varphi(x)+i0}$ が定まる．（この説明は定理 3.4.8 の証明の繰返しである．）$\operatorname{supp}\dfrac{1}{\varphi(x)+i0}=\boldsymbol{R}^n$，$\operatorname{sing\,supp}\dfrac{1}{\varphi(x)+i0}=\{\varphi(x)=0\}$，S. S. $\dfrac{1}{\varphi(x)+i0}=\{(x,id\varphi(x)\infty);\varphi(x)=0\}$，同様にして $\operatorname{supp}\delta(\varphi(x))=\operatorname{sing\,supp}\delta(\varphi(x))=\{\varphi(x)=0\}$，S. S. $\delta(\varphi(x))=\{(x,\pm id\varphi(x)\infty);\varphi(x)=0\}$．

問 3.4.3 上の特別の場合として $\operatorname{supp}\delta(x_1-x_2^2)=\operatorname{sing\,supp}\delta(x_1-x_2^2)=\{x_1-x_2^2=0\}$，S. S. $\delta(x_1-x_2^2)=\{(x,\pm i(dx_1-2x_2dx_2)\infty);x_1-x_2^2=0\}$．

$$\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x_1-x_2^2+i0}-\frac{1}{x_1-x_2^2-i0}\right)dx_1$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\frac{dz_1}{z_1-x_2^2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\frac{dz_1}{z_1-x_2^2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{dz_1}{z_1-x_2^2}=1$$

ここに $\gamma=-\gamma_++\gamma_-$ は x_2^2 のまわりを一周する積分路である．（x_2 は実解析パラメータなので実のままで計算しても差支えない．）

$$\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x_1-x_2^2+i0}-\frac{1}{x_1-x_2^2-i0}\right)dx_2=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_2}{x_2^2-z_1}\right]_{z_1\to x_1+i0}$$
$$-\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_2}{x_2^2-z_1}\right]_{z_1\to x_1-i0}=\left[\frac{1}{2\sqrt{z_1}}\right]_{z_1\to x_1+i0}-\left[\frac{1}{2\sqrt{z_1}}\right]_{z_1\to x_1-i0}$$

ここで積分路を実軸から上半平面へ無限遠まで変更し，留数定理を用いた．従って $\sqrt{z_1}$ の分枝はいずれも $\sqrt{-1}=i$ となるものの上及び下半平面への接続である．従って答は $(x_1)_+^{-1/2}$ となり，これは $x_1<0$ では 0，$x_1>0$ では $1/\sqrt{x_1}$ という実解析函数に等しい．（上の計算において積分を実軸上で行なえるのは x_2 が実解析パラメータだからである．積分領域は本当は $a>\sqrt{|x_1|}$ を選んで $[-a,a]$ とせねばならないのだが，a の変更は結果の超函数を変えないので $a\to+\infty$ とした．）

問 3.4.4 $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)_+^{\lambda}$ は $\boldsymbol{R}^3\setminus\{0\}$ で意味を持ち，そこで実解析函数 $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\lambda}$ に等しい．今までの議論ではまだ原点までは定義できない．$(x_1^2-x_2^2-x_3^2)_+^{\lambda}$ も $\boldsymbol{R}^3\setminus\{0\}$ では今までの議論により定義可能で，その台，特異台，特異スペクトルは順に $\{x_1^2\geq x_2^2+x_3^2\}$，$\{x_1^2=x_2^2+x_3^2\}$，$\{(x,\pm i(x_1dx_1-x_2dx_2-x_3dx_3)\infty);x_1^2=x_2^2+x_3^2\}$．

問 3.4.5 $\operatorname{supp}f(x_1^2+x_2^2-1)=\{x_1^2+x_2^2=1\}$ はコンパクトなので畳み込みは定義 3.4.10 により定義可．さらに S. S. $f=\{(x,\pm i(x_1dx_1+x_2dx_2)\infty);x_1^2+x_2^2=1\}$ に注意すれ

ば定理 3.4.11 の諸公式より

$$\operatorname{supp} f(x_1{}^2+x_2{}^2-1)*Y(x_1)\subset\{x_1\geq -1\}$$
$$\text{S. S. } f(x_1{}^2+x_2{}^2-1)*Y(x_1)\subset\{(x,\pm idx_1\infty);x_1=\pm 1\}$$
$$\operatorname{sing\,supp} f(x_1{}^2+x_2{}^2-1)*Y(x_1)\subset\{x_1=1\}\cup\{x_1=-1\}$$

最後の評価は(3.4.32)を直接適用すると$\{-1\leq x_1\leq 1\}$と悪くなることに注意.

問 3.4.6 $\operatorname{supp} f(x_1-y_1,x_2-y_2)\delta(y_1-y_2{}^2)$ は y について放物線 $y_1=y_2{}^2$, $x_1-y_1=(x_2-y_2)^2$ の交点に含まれ，x につき一様にコンパクトとなるから y に関する積分が意味を持つ．これを畳み込みと呼べばよい．

$$\operatorname{supp} f(x_1,x_2)*\delta(x_1-x_2{}^2)\subset\left\{x_1\geq\frac{1}{2}x_2{}^2\right\}$$
$$\operatorname{sing\,supp} f(x_1,x_2)*\delta(x_1-x_2{}^2)\subset\left\{x_1\geq\frac{1}{2}x_2{}^2\right\}$$
$$\text{S. S. } f(x_1,x_2)*\delta(x_1-x_2{}^2)\subset\{(x,\pm i(dx_1-2\lambda dx_2)\infty);2\lambda^2-2x_2\lambda+x_2{}^2-x_1=0\}$$

問 3.5.1 (3.5.11)の $F(z)$ を用いて補題 3.5.4 により $\iota(f)$ の標準定義函数を計算し，それが $F(z)$ に戻ることを見る．（なお，後述の定理 4.1.5 によれば，これは計算しなくても明らか．）

問 3.5.2 原点以外では $1/(x_1+ix_2)$ は実解析函数であり，これをそのまま定義函数としてとれる．$(D_1+iD_2)(1/(x_1+ix_2))=0$ も初等的に確かめられる．原点の近傍の定義函数は，例えば

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\frac{1}{x_1+ix_2}\frac{1}{x_1-z_1}\frac{1}{x_2-z_2}dx_1dx_2$$

で計算できる．これは次のようになる：

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-a}^{a}\frac{-i}{x_1-z_1}dx_1\ \text{p. v.}\int_{-b}^{b}\frac{1}{ix_1-z_2}\left(\frac{1}{x_2-ix_1}-\frac{1}{x_2-z_2}\right)dx_2$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-a}^{a}\frac{1}{x_1-z_1}\frac{1}{x_1+iz_2}\left[\log\frac{x_2-ix_1}{x_2-z_2}\right]_{-b}^{b}dx_1$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-a}^{0}\frac{1}{x_1-z_1}\frac{1}{x_1+iz_2}\left[\log\frac{x_2-ix_1}{x_2-z_2}\right]_{-b}^{b}dx_1$$
$$+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{0}^{a}\frac{1}{x_1-z_1}\frac{1}{x_1+iz_2}\left[\log\frac{x_2-ix_1}{x_2-z_2}\right]_{-b}^{b}dx_1$$

ここで p. v. は $x_1=0$ のとき Cauchy の主値で積分を計算することを示す．結果の分母の x_1+iz_2 は積分路上で 0 になり得るが，それは次の log 因子で打ち消されている．$b\to+\infty$ とすれば偏角だけが残り，$\operatorname{Im} z_2>0$ のときは

$$\text{第一項}\longrightarrow-\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{0}\frac{1}{x_1-z_1}\frac{1}{x_1+iz_2}dx_1=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z_1+iz_2}\left[\log\frac{x_1-z_1}{x_1+iz_2}\right]_{-a}^{0}$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\frac{\log(-z_1)-\log(iz_2)-\log(-a-z_1)+\log(-a+iz_2)}{z_1+iz_2}$$

第二項 $\longrightarrow 0$

同様に $\mathrm{Im}\, z_2<0$ のときは

第一項 $\longrightarrow 0$

第二項 $\longrightarrow -\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\log(-z_1)-\log iz_2-\log(a-z_1)+\log(a+iz_2)}{z_1+iz_2}$

これで定義函数が求まった. D_1+iD_2 を計算するには, 開集合 $z_1+iz_2\neq 0$ の上で定義函数の $D_{z_1}+iD_{z_2}$ を計算すればよいから, 等式 $(D_{z_1}+iD_{z_2})(1/(z_1+iz_2))=0$ より原点で正則な函数を除き $-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{z_1z_2}$ を得る. 故に $(D_1+iD_2)(1/(x_1+ix_2))=2\pi\delta(x_1, x_2)$.

問 3.5.3 古典的な Fourier 変換を経由して $\dfrac{1}{r}=\dfrac{i}{2\pi^2}\displaystyle\int_{S^2}\dfrac{d\omega}{x\omega}$ を得る. これを $\sum_\sigma F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0)$, $F_\sigma(z)=\dfrac{i}{2\pi^2}\displaystyle\int_{S^2\cap\overline{\Gamma_\sigma}}\dfrac{d\omega}{z\omega}$ と超函数に解釈すれば, $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right)=\sum_\sigma(\Delta F_\sigma)(x+i\Gamma_\sigma 0)$, $\Delta F_\sigma(z)=\dfrac{i}{2\pi^2}\displaystyle\int_{S^2\cap\overline{\Gamma_\sigma}}\dfrac{d\omega}{(z\omega)^3}=-4\pi W_0(z, \overline{\Gamma_\sigma})$. 故に $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(x)$.

第4章

問 4.1.1 命題 3.4.3 c) より $\int D_j(f\varphi)dx=0$. 従って $\int D_jf\cdot\varphi dx=-\int f\cdot D_j\varphi dx$. これを繰返せばよい.

問 4.1.2 定理 4.1.7 の証明の逐語訳でよい.

問 4.1.3 まず $\mathcal{B}[K\cup L]$ において $f_k\to f$, $f_k\to g$ となることから $f=g$. ところで $\mathcal{B}[K]$ における収束は $F_{k,\sigma}(z)=\displaystyle\int_{R^n}f_k(w)W(z-w, \overline{\Gamma_\sigma})dw$ の $\mathcal{O}(U_\sigma{}^K)$ における収束を意味する. これは同様に $\mathcal{O}(U_\sigma{}^L)$ でも収束するから, 結局 $\mathcal{O}(U_\sigma{}^{K\cap L})$ で収束する. なお, この主張は Fréchet 空間の位相的完全列 $0\to\mathcal{B}[K\cap L]\xrightarrow{\lambda}\mathcal{B}[K]\oplus\mathcal{B}[L]\xrightarrow{\mu}\mathcal{B}[K\cup L]\to 0$ に開写像定理を適用しても得られる. ここに $\lambda(f)=f\oplus f$. $\mu(f\oplus g)=f-g$ である.

問 4.2.1 $rdr=\sum_{j=1}^n\xi_jd\xi_j$ に対し $\sum_{j=1}^n\xi_jd\xi_j\wedge\omega(\xi)=|\xi|^2d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n$ となる. (故に半径 1 以外では $\omega(\xi)/|\xi|$ ととるべきである.)

問 4.2.2 略(第 3 章 §4, 4° の計算を参考にせよ.)

問 4.2.3 $2n$ 変数 x, ξ の超函数として S. S. $W_0(x, \xi)=\{(x, \xi, \pm i(xd\xi+\xi dx)\infty); x\xi=0\}$ であることを用いて同様に計算する. なお, Δ が凸多角形のとき S. S. $W_0(x, \Delta)$ には $\partial\Delta$ の端点に対応する方向しか原点から外へのしみ出しはない.

問 4.3.1 z^λ は z, λ につき $\{\pm\mathrm{Im}\, z>0\}\times\boldsymbol{C}$ で正則だから. $x_\pm{}^\lambda$ の方は定義函数から $\lambda=-1, -2, \cdots$ において一位の極を持つ. ($\lambda=0, 1, 2, \cdots$ で極を持たないのは $\lambda\sim m$ のとき $\left[\mp\dfrac{(\mp z)^\lambda}{2i\sin\pi\lambda}\right]=\left[\mp\dfrac{(\mp z)^\lambda-(\mp z)^m}{2i\sin\pi\lambda}\right]$ と正則函数の調節により分母の因子を打ち消せるからである.) $|x|^\lambda=x_+{}^\lambda+x_-{}^\lambda$ の方はさらに偶数点の極が打ち消し合い, $\lambda=-1, -3, -5, \cdots$ 以外で正則となる.

問 4.3.2 $\lambda\sim -m$ において級数展開 $(\mp z)^\lambda\sim(\mp z)^{-m}+\dfrac{\log(\mp z)(\mp z)^{-m}}{1!}(\lambda+m)+\dfrac{\log^2(\mp z)(\mp z)^{-m}}{2!}(\lambda+m)^2+\cdots$. 一方 $\mp\dfrac{1}{2i\sin\pi\lambda}\sim\mp(-1)^m\left\{\dfrac{1}{2\pi i(\lambda+m)}+\dfrac{\pi}{2i\cdot 3!}(\lambda+m)+\cdots\right\}$. 故に $\left[\mp\dfrac{(\mp z)^\lambda}{2i\sin\pi\lambda}\right]\sim\left[\mp\dfrac{(\pm z)^{-m}}{2\pi i}\dfrac{1}{\lambda+m}\mp\dfrac{\log(\mp z)(\pm z)^{-m}}{2\pi i}\mp\left(\dfrac{\log^2(\mp z)(\pm z)^{-m}}{2\pi i\cdot 2!}+\dfrac{\pi(\pm z)^{-m}}{2i\cdot 3!}\right)(\lambda+m)+\cdots\right]=\dfrac{(\mp 1)^{m-1}\delta^{(m-1)}(x)}{(m-1)!}\dfrac{1}{\lambda+m}+x_\pm{}^{-m}+\left(-\left[\dfrac{(\pm 1)^{m-1}\log^2(\mp z)z^{-m}}{2\pi i\cdot 2!}\right]+\dfrac{(\mp 1)^{m-1}\pi^2}{(m-1)!3!}\delta^{(m-1)}(x)\right)(\lambda+m)+\cdots$. $(\lambda+m)$ の係数の初項は $\pm x\geq 0$ に台を持つ超函数で，$\pm x>0$ では実解析函数 $|x|^{-m}\log|x|$ に等しいことが分枝の計算からわかる.

問 4.3.3 $\mathrm{Re}\lambda>0$ のときは $(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^\lambda$ は L_1 級函数の範囲で λ につき微分可能であり，$(\partial/\partial\bar{\lambda})(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^\lambda=0$. これは超函数の意味での微分とみなせるから λ は超函数としても正則パラメータとなる.（定理 3.5.7 を用いるなら $\mathrm{Re}\,\lambda>1$ とすればよい.）偏微分作用素 $\Box=(\partial^2/\partial x_1{}^2-\partial^2/\partial x_2{}^2-\partial^2/\partial x_3{}^2)$ は $\partial/\partial\bar{\lambda}$ と可換だから超函数としての正則パラメータ λ を保存する. 故に公式

$$(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^\lambda=\frac{1}{4(\lambda+1)(\lambda+3/2)}\Box(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^{\lambda+1}$$
$$=\frac{\Box^m(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^{\lambda+m}}{4^m(\lambda+1)\left(\lambda+\dfrac{3}{2}\right)\cdots\left(\lambda+\dfrac{2m+1}{2}\right)}$$

により分母の因子が 0 とならない点に解析接続することができる. 特異点は高々一位の極であり，留数は x について局所的に計算できることに注意すれば台の見当も付いて

$$\lambda=-m\ \text{において}\quad \frac{\Box^m Y(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)}{2(2m-2)!},$$
$$\lambda=-\frac{2m+1}{2}\ \text{において}\quad -\frac{\pi\Box^{m-1}\delta(x)}{(2m-1)!}$$

(ここに $\Box(x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2)_+{}^{-1/2}=2\pi\delta(x)$ を用いた).
$(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)_+{}^\lambda$ の方は $\lambda=-m$ において正則となる. 留数だけ記すと

$$\lambda=-\frac{2m+1}{2}\ \text{において}\ \frac{2\pi\triangle^{m-1}\delta(x)}{(2m-1)!}$$

(ここに $\triangle(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)_+{}^{-1/2}=-4\pi\delta(x)$ を用いた).

問 4.3.4 二つの超函数を $|x_1|\leq\varepsilon$, $|x_2|\leq\varepsilon$ で切ったものをコンパクト台の超函数と見て $\varphi(x_1, x_2)$ との内積が等しいことから超函数としての等号を導く.（双対性と Hahn-Banach の定理による.）これはしばしば役に立つ方法である. 今の場合系 4.3.11 b) により，例えば

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{Y(-x_1)}{x_1+i(x_2+i0)}\varphi(x_1, x_2)dx_1dx_2=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{Y(-x_1)}{x_1+i\tau}\varphi(x_1, \tau)dx_1\right]_{\tau\to x_2+i0}dx_2$$

$$= \int_{\gamma} d\tau \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\varphi(x_1, \tau)}{x_1 + i\tau} dx_1 = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{-\varepsilon + i\delta}^{\varepsilon + i\delta} \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\varphi(x_1, \tau)}{x_1 + i\tau} dx_1 d\tau$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\varphi(x_1, x_2)}{x_1 + ix_2} dx_1 dx_2$$

最後の等式は Lebesgue の収束定理だが Riemann 式広義積分による正当化も易しい.

問 4.5.1 台が十分小さいコンパクト集合に含まれるような f に対し，与えられた方程式の解で台が同じ集合に含まれるようなものが常に求まれば，一般の f については局所有限和に分解することにより解ける．故に局所座標変換により $x_1u=f$ の繰返しに帰着する.

問 4.5.2 $\mathcal{B}^{(m)}[K]$に $\mathcal{B}[L]$から誘導される位相を便宜上 $\mathcal{B}^{(m)}[L]$と記せば，各写像 $('\mathcal{B}[K'])^m \to \mathcal{B}^{(m)}[K] \to \mathcal{B}^{(m)}[L]$ は明らかに連続．逆に $f_k = \sum_{j=0}^{m-1} f_{k,j}(x')\delta^{(j)}(x_1)$ が $\mathcal{B}[L]$において g に収束したとせよ．任意の $\varphi(x') \in {}'\mathcal{A}(K')$ に対し $\psi \in \mathcal{A}(L)$ を

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j \psi \Big|_{x_1=0} = \begin{cases} (-1)^{j_0}\varphi(x'), & j = j_0, \\ 0, & j \leq m-1, \ j \neq j_0 \end{cases}$$

となるように選べば，$\langle f_k, \psi \rangle = \langle f_{k,j_0}(x'), \varphi(x') \rangle \to \langle g, \psi \rangle$．故に系 4.1.13 により f_{k,j_0} は $'\mathcal{B}[K']$において収束する．上のような ψ の選び方は L が $x_1=0$ との切り口で一番太くなっている時は簡単 ($(-1)^{j_0}\varphi(x')x_1{}^{j_0}/j_0!$ でよい) だが，一般の場合は自明ではない(下巻で述べるコホモロジーの結果を用いて証明する.) 一方，泥臭いが定理 4.1.1 の定義を直接用いれば全く初等的に証明することもできる.

第5章

問 5.1.1 $\mathcal{F}$ が脆弱なら $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to 0$ が $\mathcal{F}$ の長さ 0 の分解となる．逆に $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}^0 \to 0$ が完全なら，$\mathcal{F}$ は脆弱層 $\mathcal{L}^0$ と同型になるのでそれ自身も脆弱.

問 5.1.2 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ を任意の開集合とするとき，切断空間の列 $0 \to C(\Omega) \overset{\iota}{\to} \mathcal{F}(\Omega) \overset{\rho}{\to} \mathcal{F}/C(\Omega) \to 0$ の完全性を示せば，$\mathcal{F}$ の脆弱性から $\mathcal{F}/C$ の脆弱性が従う．この列の完全性を示すには補題 5.1.4 の証明を次のように変更する：$s'' \in \mathcal{F}/C(\Omega)$ が与えられたとし，まずそこで用いた集合 $\mathfrak{M}$ を次のものでおき換える.

$$\mathfrak{M} = \{V \subset U; \exists s \in \Gamma(V, \mathcal{F}) \text{ について } \rho(s) = s''|_V\}$$

さらに，順序 $V_1 \succ V_2$ を "$\rho(s_2)=s''|_{V_2}$ を満たす $\forall s_2 \in \Gamma(V_2, \mathcal{F})$ と，$\forall W \Subset V_2$ に対し，$\exists s_1 \in \Gamma(V_1, \mathcal{F})$ で $\rho(s_1)=s''|_{V_1}$ かつ $s_1|_W = s_2|_W$ なるものが存在する" により定めると，$\mathfrak{M}$ はやはり帰納的順序集合となり，従って極大元 V が存在する．証明の後半は次のように修正する．$\forall W \Subset V$ に対し $s \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ と $s_x \in \Gamma(V_x, \mathcal{F})$ の差 $s - s_x \in C(V \cap V_x)$ は，連続函数の性質により $s' \in C(V)$, $s'_x \in C(V_x)$ で $\operatorname{supp} s' \subset V \setminus W$ なるものにより $s' - s'_x$ の形に分解される．故に $s - \iota(s')$ という "微小修正" が $s_x - \iota(s'_x)$ として V_x まで

延びることになり，$V \prec V \cup V_x$ となって V の極大性に反する．

層 $\mathscr{F}$ の切断の各 $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対する値は数だが，$C^0(C)$ の方のそれは点 x における連続函数芽であるから，後者の方がはるかに大きい．なおこの層 $\mathscr{F}$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上の定数層 $\boldsymbol{C}$ の標準脆弱分解の初項に一致する．

問 5.2.1 略

問 5.2.2 (5.2.8) の中項における完全性を示す．$z^1 \in \varinjlim_\lambda K_\lambda^1$ はある λ について $z_\lambda^1 \in K_\lambda^1$ で代表される．従ってその像 $z^2 \in \varinjlim_\lambda K_\lambda^2$ は z_λ^1 の像 z_λ^2 で代表される．それが $\varinjlim_\lambda K_\lambda^2$ の零元になるとは，$\exists \mu \geq \lambda$ について $h_{\mu\lambda}(z_\lambda^2)$，即ち，$z_\mu^1 = h_{\mu\lambda}(z_\lambda^1)$ の像が K_μ^2 の零元となることを意味する．故に与えられた添え字 μ の短列の完全性により，$z^0{}_\mu \in K_\mu^0$ で z_μ^1 にゆくものが存在する．このとき z_μ^0 が定める $\varinjlim_\lambda K_\lambda^0$ の元 z^0 は明らかに z^1 にゆく元となる．その他の項における完全性はこの特別の場合である．

問 5.3.1 Y 上の標準脆弱分解 $0 \to \boldsymbol{C}_Y \to C^\cdot(\boldsymbol{C}_Y)$ が f^{-1} により X 上のそれ $0 \to \boldsymbol{C}_X \to C^\cdot(\boldsymbol{C}_X)$ に移るから，

問 5.3.2 $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^\cdot$ を任意の脆弱分解とするとき，U の内部においては $H^n(\Gamma_U(\mathscr{L}^\cdot)) = H^n(\mathscr{L}^\cdot) = 0$ だから．

問 5.3.3 X が一点のとき，その上の層はすべて脆弱だから，$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to 0$ が脆弱分解となり，$H^0(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$，$H^n(X, \mathscr{F}) = 0\ (n \geq 1)$．

問 5.4.1 問 5.1.2 により fl. dim $C=1$ なので $\mathscr{H}^j{}_F(C) = 0\ (j \geq 2)$．一方．$F$ が内点を持たぬことから，任意の開集合 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ に対し $H^0{}_{F \cap \Omega}(\Omega, C) = \Gamma_{F \cap \Omega}(\Omega, C) = 0$．故に $\mathscr{H}^0{}_F(C) = 0$．なお，基本長完全列より $H^1{}_F(\boldsymbol{R}^n, C) = C(\boldsymbol{R}^n \setminus F)/C(\boldsymbol{R}^n)$ が得られるが，これは連続函数を F へ延長するときの障害(obstruction)を表わしていることに注意．

問 5.5.1
$$\begin{aligned}\delta^n \varphi &= \sum_{(\lambda_{n+1}, \lambda_0, \cdots, \lambda_n)} \check{\varphi}_{\lambda_0 \cdots \lambda_n}|_{U_{\lambda_{n+1}}} U_{\lambda_{n+1}} \wedge U_{\lambda_0} \wedge \cdots \wedge U_{\lambda_n} \\ &= \sum_{(\lambda_0, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1})} (-1)^{n+1} \check{\varphi}_{\lambda_0 \cdots \lambda_n}|_{U_{\lambda_{n+1}}} U_{\lambda_0} \wedge \cdots \wedge U_{\lambda_n} \wedge U_{\lambda_{n+1}}\end{aligned}$$
に反対称化を施そう．σ が $n+2$ 次の置換を動くとき，$\sigma(n+1) = j\ (0 \leq j \leq n+1)$ の値によって分類すれば，反対称化の結果は
$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!} \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma \check{\varphi}_{\lambda_{\sigma(0)} \cdots \lambda_{\sigma(n)}}|_{U\lambda_{\sigma(n+1)}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!} \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{\sigma(n+1)=j} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 0, & \cdots, & n, & n+1 \\ \sigma(0), & \cdots, & \sigma(n), & j \end{pmatrix} \check{\varphi}_{\lambda_{\sigma(0)} \cdots \lambda_{\sigma(n)}}|_{U_{\lambda_j}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \sum_{j=0}^{n+1} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 0, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & n, & n+1 \\ 0, \cdots, j-1, j+1, & \cdots, & n+1, & j \end{pmatrix} \check{\varphi}_{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1} \lambda_{j+1} \cdots \lambda_{n+1}}|_{U_{\lambda_j}} \\ &= \frac{1}{n+2} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \check{\varphi}_{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1} \lambda_{j+1} \cdots \lambda_{n+1}}|_{U_j}.\end{aligned}$$

問 5.5.2 (5.3.8) と (5.5.8)，及び後者の $\mathscr{L}^j$ を $C^j(\mathscr{F})$ で置き換えた可換図式を三つ

の面に持つ立体的可換図式を想像するとよい.

問 5.5.3　(5.5.8)図の図式追跡で証明できる.

問 5.5.4　一般論より $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})=H^0(U, \mathcal{O})=\mathcal{O}(U)$. また上巻補題 1.5.2 により任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ について $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})=0$, 従って定理 5.5.10 より $H^1(U, \mathcal{O})=0$. 故に定理 5.4.1 より $H^n(U, \mathcal{O})=0$, $n\geq 2$ も成り立つ. 故に, 任意の開被覆は Leray 被覆となり $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{O})=H^n(U, \mathcal{O})=0$ も成り立つ. fl. dim $\mathcal{O}=1$ である.

問 5.5.5　長完全列 $0\to H^0{}_\Omega(U, \mathcal{O})\to H^0(U, \mathcal{O})\to H^0(U\setminus\Omega, \mathcal{O})\to H^1{}_\Omega(U, \mathcal{O})\to H^1(U, \mathcal{O})\to\cdots$ において, 正則函数に対する解析接続の一意性より $H^0{}_\Omega(U, \mathcal{O})=\Gamma_\Omega(U, \mathcal{O})=0$, また前問より $H^1(U, \mathcal{O})=0$ に注意すればよい. $\mathcal{B}(\Omega)=\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)$ はほぼ一変数超函数の定義であった. (上巻定理 1.1.3 参照)

問 5.6.1　$0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}''$ を X 上の層の完全列とすれば, 開集合 $U\subset Y$ に対して補題 5.1.4 により $0\to\mathcal{F}'(f^{-1}(U))\to\mathcal{F}(f^{-1}(U))\to\mathcal{F}''(f^{-1}(U))$ は完全. 故に帰納極限 $\varinjlim_{U\ni y}$ に移れば $0\to(f_*\mathcal{F}')_y\to(f_*\mathcal{F})_y\to(f_*\mathcal{F}'')_y$ が完全となる.

問 5.6.2　定理 5.4.4 の証明を $\Gamma_S\Rightarrow f_*, \Gamma_F\Rightarrow g_*$ なるおき換えで翻訳せよ.

問 5.6.3　a)　$0\to\boldsymbol{C}_Y\to\mathcal{L}^\cdot$ を(標準)脆弱分解とすれば $0\to\boldsymbol{C}_X\to f^{-1}\mathcal{L}^\cdot$ は一つの分解となり, 従って定理 5.3.3 の後の注意により $H^n(f^{-1}\mathcal{L}^\cdot(X))\to H^n(X, \boldsymbol{C}_X)$ という自然な写像が存在する. ここで各 $\mathcal{L}^j(Y)$ から $f^{-1}\mathcal{L}^j(X)$ へ, 従って $H^n(\mathcal{L}^\cdot(Y))=H^n(Y, \boldsymbol{C}_Y)$ から $H^n(f^{-1}\mathcal{L}^\cdot(X))$ へ自然な写像が存在することに注意すればよい. b)　Y の被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\lambda\}$ に対し $f^{-1}\mathfrak{U}=\{f^{-1}U_\lambda\}$ は X の被覆となる. $\sum_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)} c_{\lambda_0\cdots\lambda_n}U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge U_{\lambda_n}$ に $\sum_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)} c_{\lambda_0\cdots\lambda_n}f^{-1}U_{\lambda_0}\wedge\cdots\wedge f^{-1}U_{\lambda_n}$ を対応させることにより $H^n(\mathfrak{U}, \boldsymbol{C}_Y)\to H^n(f^{-1}\mathfrak{U}, \boldsymbol{C}_X)$ という写像が得られる. これから極限へ行ったものが求める写像となる. 実際, 自然な写像より成る図式

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathfrak{U}, \boldsymbol{C}_Y) & \longrightarrow & H^n(f^{-1}\mathfrak{U}, \boldsymbol{C}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(Y, \boldsymbol{C}_Y) & \longrightarrow & H^n(X, \boldsymbol{C}_X) \end{array}$$

が可換となることが Weil の補題式の論法で確かめられる. c)定理 5.6.7 により $H^n(I, \boldsymbol{C}_I)=0\,(n\geq 1)$ を示せばよい. これは Čech コホモロジーで容易に確かめられる. $\pi_*{}^n$ が同型となることは定理 5.6.4 による. d)$0\to\boldsymbol{C}_{X\times I}\to\mathcal{M}^\cdot$ を脆弱分解とすれば, π の純 0 次元性により $0\to\boldsymbol{C}_X\to\pi_*\mathcal{M}^\cdot$ も脆弱分解となる. これを用いて π^{*n} 及び $\pi_*{}^n$ を表現すれば, これらは明らかに $H^n(\pi_*\mathcal{M}^\cdot(X))\to H^n(\mathcal{M}^\cdot(X\times I))$ 及びその逆写像となる. e)$\pi\circ\iota_j=id_X$, $j=0, 1$, より $\iota_j{}^{*n}\circ\pi^{*n}=id: H^n(X, \boldsymbol{C}_X)\to H^n(X, \boldsymbol{C}_X)$ を得るから. f) $F\circ\iota_j=F(x, j)$, $j=0, 1$, より $\iota_j{}^{*n}\circ F^{*n}=F(x, j)^{*n}$. ここで $\iota_0{}^{*n}=\iota_1{}^{*n}$ だから.

第6章

問6.1.1　$n=1$ のときは Čech コホモロジーで容易に計算できる．一般の場合を直接 Čech の方法でやるのも教育的だが，$\pi: K\to K'=K_1\times\cdots\times K_{n-1}$ が $\boldsymbol{C}_K$ につき純0次元的となること及び $\pi_*\boldsymbol{C}_K=\boldsymbol{C}_{K'}$ に注意し $H^k(K,\boldsymbol{C}_K)=H^k(K',\boldsymbol{C}_{K'})$ を用いれば帰納法に持ち込める．

問6.2.1　$a\in\partial U$ とすれば，$1/(z-a)\in\mathcal{O}(U)$ が点 a まで解析接続できない元となる．多変数函数の場合には，系2.2.5の後で注意したように孤立零点を持った正則函数は存在しないのでこの論法は通用しない．（実はある領域が正則領域かどうかは正則函数の零点の領域内部への滲み込み具合と密接な関係がある．）

問6.3.1　$\gamma\subset U$ を単純閉曲線とし，γ の内部に ∂U の点 a があるとする．このとき，a を特異点とする $\mathcal{O}(U)$ の元 $u(z)$（例えば $u(z)=1/(z-a)$）は多項式で U 上広義一様に近似できない．何者，$p_k(z)\to u(z)$ とすれば，この収束は γ 上一様だから，最大値原理により列 $\{p_k(z)\}$ は γ の内部においても一様 Cauchy 列となり，従ってある正則函数 $v(z)$ に収束する．γ の近傍では $v(z)=u(z)$ だから，これは $u(z)$ の取り方に反する．（多変数の場合の Runge 領域の必要条件も本質的にはこれと同様の原理で出て来る．）

問6.3.2　一次元の領域 U 内の任意のコンパクト集合 K は

$$D=\{z\in\boldsymbol{C};|z|\leq R,|z-a_j|\geq r_j, j=1,\cdots,m\}$$

（ここに $a_j\notin U$）なる形の解析的多面体に含めることができる．（実際，まず K を有限の円板に入れておき，次に $\boldsymbol{C}\setminus U$ の各点を中心として円盤状の近傍を考え，そのいくつかをくり貫けばよい．）故に一般にこの形のコンパクト集合について，その上の正則函数 $F(z)$ が z と $1/(z-a_j)$, $j=1,\cdots,m$ の多項式により一様近似できることを示せば十分である．$w_j=1/(z-a_j)$, $j=1,\cdots,m$ とおけば

$$\iota: D\subsetneq\Delta=\{|z|\leq R,|w_j|\leq r_j,\ j=1,\cdots,m\}\subset\boldsymbol{C}^{m+1}$$

となる．$\iota(D)$ 上の正則函数 $F(z)$ を Δ 上の正則函数まで延長できれば，Taylor 展開を用いて求める近似函数が得られる．この延長は $1/(z-a_j)$ が大域的に定義された函数ではない為，系6.1.5では間に合わない．しかし今の場合は一次元の段階でコホモロジーを解くことにより次のように初等的に証明できる：D' を D の定義式から条件 $|z-a_1|\geq r_1$ を取り除いたものとする．$D=D'\cap\{|z-a_1|\geq r_1\}$ なる分解に応じて $F(z)=F'(z)-F_1(z)$ と Cousin 積分を用いて分解する（この分解はコンパクト集合に対するものなので Runge の近似定理は不要）．$F_1(z)$ の方は $|z-a_1|\geq r_1$ で正則なので，$F_1(a_1+1/w_1)$ と解釈して Δ 上の函数に延長できる．以下 $F'(z)$ に対しこの操作を続ければよい．

問6.3.3　実は本文の証明が変更無しにそのまま通用する．実際 $H^1(\pi(U),\mathcal{O}')=0$ は $\pi(U)$ が Stein なだけで十分だし，$V=U\cap\pi^{-1}(V')$ は Stein となるから $H^k(V,\mathcal{O})=0$ も良い．また不定積分 $\int_{a_1}^{z_1}G(z)dz_1$ は繊維が単連結なことから各繊維上で大域的に存在す

る.

問 6.5.1 a) (6.5.4)-(6.5.5) で定まる $n+1$ 個の元より成る被覆が $\boldsymbol{C}$ に対する Leray 被覆となるから，b) 同じ被覆によるコホモロジーの表現として(6.5.20)が得られる．ここに $\boldsymbol{C}((U\sharp\Omega)\times V)$ は開集合 $(U\sharp\Omega)\times V$ 上の局所定数の全体を表わす．従ってその元は各連結成分毎に独立の値をとる．(6.5.20)の右辺は V の連結成分に応じて直和に分解し，また V が連結のときは因子 V を取り去ったものと標準的に同型となる．故に(6.5.21)が成り立つ．c) この写像で分母の元に 0 が対応し，従って $H^n{}_\Omega(U,\boldsymbol{C})$ からの写像が確定することは明．また $\mathbf{1}=(1_\sigma)$, $1_{(1,\cdots,1)}=1$, $1_\sigma=0$(その他)，という分子の元が明らかに 1 にゆくから全射である．最後に分子の任意の元 $\boldsymbol{c}=(c_\sigma)$ の $\sigma\neq(1,\cdots,1)$ なる象限に対する成分 c_σ は分母の元を調節しつつ σ_j の符号を正に換えた位置に持ってゆけば，最終的にすべて第一象限に集められるので，商空間(6.5.20)は上に定義した元 $\mathbf{1}$ で生成され，従って $\boldsymbol{C}$ 上高々 1 次元である．d) この写像は V の連結成分への分解と整合的なので，V が連結の場合を考えれば十分である．このとき W の連結成分の数を μ とすれば，この写像は上の同型で $\boldsymbol{C}\ni c\mapsto(c,\cdots,c)\in\boldsymbol{C}^\mu$ と表現され，従って単射となる．e) $\Omega'=\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{n-1}$ とおき完全列

$$\cdots\to H^p{}_{\Omega\times V}(U\times V,\boldsymbol{C})\to H^p{}_{\Omega'\times U_n\times V}(U\times V,\boldsymbol{C})$$
$$\to H^p{}_{\Omega'\times(U_n\setminus\Omega_n)\times V}(U'\times(U_n\setminus\Omega_n)\times V,\boldsymbol{C})\to\cdots$$

を用い，d)に注意して n に関する帰納法を行なえばよい．

第7章

問 7.1.1 正則 de Rham 列の各項 $\mathcal{O}^{(j)}$ (ただし $\mathcal{O}^{(-1)}=\boldsymbol{C}$ とする)に対し，標準脆弱分解 $\mathcal{L}^{j\cdot}$ をとり，それに函手 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\cdot)$ を施せば，

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
0 & \to & \mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{L}^{-1,0}) & \to & \mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{L}^{00}) & \to & \cdots\cdots & \to & \mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{L}^{n0}) \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
0 & \to & \mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{L}^{-1,n}) & \to & \mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{L}^{0n}) & \to & \cdots\cdots & \to & \mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{L}^{nn}) \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

という図式が得られる．ここで横行は常に完全，また縦列も定理 6.5.6 及び問 6.5.1 により第 n 行以外の項においては完全である．故に第 n 行をその次の写像の核でおき換えると，上の図式の上半部分は

$$\begin{array}{ccccccccc} & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ 0 \to & \mathcal{Z}^{(-1)} & \to & \mathcal{Z}^{(0)} & \to \cdots\cdots \to & & \mathcal{Z}^{(n)} & \to & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ 0 \to & \mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}) & \to & \mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}^{(0)}) & \to \cdots\cdots \to & & \mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}^{(n)}) & \to & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ & 0 & & 0 & & & 0 & & \end{array}$$

と修正され，有限な図式が得られる．これを Weil の補題の証明を真似て追跡すれば，$\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}) \hookrightarrow \mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}^{(0)})$ がわかる．ちなみに，核より成る行の完全性が，もとの図式の下半部分

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & & 0 & & & 0 & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ 0 \to & \mathcal{Z}^{(-1)} & \to & \mathcal{Z}^{(0)} & \to \cdots\cdots \to & & \mathcal{Z}^{(n)} & \to & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ 0 \to & \mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{L}^{-1,n}) & \to & \mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{L}^{0n}) & \to \cdots\cdots \to & & \mathcal{T}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{L}^{nn}) & \to & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \end{array}$$

に Weil の補題を適用することによりわかる．従って導来層より成る行は全体としても完全となる．これは正則 de Rham 分解を仮定した超函数 de Rham 分解の証明となる．(なお以上の議論を少し精密化すると問 6.5.1 は引用しなくてもこれらの図式から自然に出て来ることがわかる．次問参照.)

問 7.1.2 問 7.1.1 と同様，$\mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}^{l_0}) \xrightarrow{P_0} \mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}^{l_1}) \xrightarrow{P_1} \cdots \to \mathcal{H}^n{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}^{l_n}) \to 0$ を導くことができる．$\mathcal{B}_{P_0}$ は定義により上の写像 P_0 の核である．後半は上の議論を Ω の凸近傍 U と，それから定まる例 7.1.3 a) の被覆による被覆コホモロジーにおき換えて遂行すればよい．

問 7.2.1 Γ を第 1 象限とし実解析函数 $\varphi(x)$ を $\varphi(x+i\Gamma 0)$ として超函数に埋め込むことを考える．$\varphi(x)\not\equiv 0$ なら，適当な実凸部分領域 Ω 及びその複素凸近傍 U を考えることにより $\varphi(z)\not\equiv 0$ としても一般性を失わない．今

$$\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_\sigma(z)\},\quad \varphi_\sigma(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \sigma = (1, \cdots, 1) \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とおけば，$\varphi(x+i\Gamma 0)$ は例 7.1.3 a) の表現で $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{O}(U \sharp \Omega)$ が定める $H^n{}_\Omega(U, \mathcal{O})$ の元に対応する．従ってもしこれが超函数として 0 なら，ある $F_j(z) \in \mathcal{O}(U \sharp_j \Omega)$ を以て $\boldsymbol{\varphi} = \sum_{j=1}^n F_j(z)|_{U\sharp\Omega}$ と書ける．仮定 $\varphi(z)\not\equiv 0$ よりこの式の両辺を $\varphi(z)$ で割れば $\mathbf{1} = \sum_{j=1}^n F_j(z)/\varphi(z)|_{U\sharp\Omega}$ を得るが，これは 1 の像が 0 となることを意味し，問 7.1.1 に矛盾する．

問 7.3.1 $\mathcal{B}[\partial\Omega]$ の元 g が $\mathcal{B}[\bar{\Omega}\setminus\Omega_{k-1}]$ において f_k を近似するとは定義により g の "標準的定義函数" $G_\sigma(z)$ が f_k のそれを件の領域で広義一様近似することであった．

問 7.3.2 $\mathcal{B}^{(n)}(\Omega)/d^{n-1}\mathcal{B}^{(n-1)}(\Omega) \cong \mathcal{B}(\Omega)/\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{B}(\Omega)+\cdots+\dfrac{\partial}{\partial x_n}\mathcal{B}(\Omega)\right)=0$ を言えばよい．しかるに $\forall f(x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ は $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ の元に延長でき，凸開集合 $\boldsymbol{R}^n$ に対しては同じ商空間は 0 だから，上のものも 0 となる．

問 7.3.3 一般論よりまず $H^0(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})=\Gamma(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})\cong\boldsymbol{C}$, かつ $k\geq n$ に対し $H^k(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})=0$. 次に $\boldsymbol{S}^{n-1}$ の北極を P とすると基本長完全列より

$$\cdots\to H^k{}_P(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})\to H^k(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})\to H^k(\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus P, \boldsymbol{C})\to\cdots$$

ここで $\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus P$ は $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の凸開集合と同相だから $H^k(\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus P, \boldsymbol{C})=0\,(k\geq 1)$, 従って $k\geq 2$ について

$$H^k(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})\cong H^k{}_P(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})$$

となる. さらに, $H^0(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})\to H^0(\boldsymbol{S}^{n-1}\setminus P, \boldsymbol{C})$ は明らかに同型 $\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ を与えるから, 実は $k=1$ についても上の同型は成り立つ. 切除定理により P の近傍を径由して $H^k{}_P(\boldsymbol{S}^{n-1}, \boldsymbol{C})=H^k{}_P(\boldsymbol{R}^{n-1}, \boldsymbol{C})$ となり Euclid 空間内の話に持ち込まれた. 後者は系 7.3.4 の計算から $H^{n-1}{}_P(\boldsymbol{R}^{n-1}, \boldsymbol{C})\cong\boldsymbol{C}$ がわかっているが, 残りの次元についても de Rham 分解を用いた同様の計算で 0 になることが確かめられる. (定理 7.3.3 の証明を微分形式 f に台の制限をつけて繰返す. 0 次のところで $f(x, t)\in\mathcal{B}_{x,t}[P]$ に対し $d_tf(x, t)=0\Rightarrow f(x, t)=0$ となることに注意すれば帰納法が使える.) 或は $U_j=\{x_j\neq 0\}$, $j=1, \cdots, n$ という $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ の被覆を用いると問 6.5.1 と同等な被覆コホモロジーの計算となり, これからも同じ結果に到達する. (もちろん $\boldsymbol{R}^{n-1}\setminus P\approx\boldsymbol{S}^{n-2}$ というホモトピーを用いれば(問 5.6.3), 更に容易に帰納法に乗せられる. ここではなるべく超函数論の演習問題にふさわしい解答を述べたのである.)

問 7.4.1 補題 5.4.3 により任意の閉集合 $F\subset\boldsymbol{R}^n$ について $H^{n+1}{}_F(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O})=0$ を言えばよい. しかるに, 基本長完全列

$$\cdots\to H^n(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O})\to H^n(\boldsymbol{C}^n\setminus F, \mathcal{O})\to H^{n+1}{}_F(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O})\to H^{n+1}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O})\to\cdots$$

より $H^{n+1}{}_F(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O})\cong H^n(\boldsymbol{C}^n\setminus F, \mathcal{O})$ であり, 後者は Malgrange の定理より 0 となる.

問 7.4.2 a) 凸柱状領域 $U\subset\boldsymbol{C}^n$ に対し $H^k(U, \pi_*\mathcal{B}\mathcal{O})=H^k(U\times V, \mathcal{B}\mathcal{O})=0\,(k\geq 1)$ を示せば十分だが, これは定理 7.4.5 の脆弱分解を用いて補題 7.4.6 により計算すれば出る. b) $\pi_*\mathcal{B}\mathcal{O}$ が脆弱なことは定理 7.4.4 による. c) $H^k{}_{S\times V}(\boldsymbol{C}^n\times V, \mathcal{O})=H^k{}_S(\boldsymbol{C}^n, \pi_*\mathcal{O})$ を上の脆弱分解で計算する.

第 8 章

問 8.1.1 a) は定義より明. b) K はコンパクトなので, $x\in K$ の連続函数 $x\eta$ はある点 $a\in K$ において上限 $H_K(\eta)$ に到達する. このとき $x\in K$ に対し明らかに $x\eta\leq a\eta=H_K(\eta)$ が成り立つ. c) $H_K(\eta)\leq H_{\widehat{K}}(\eta)$ は自明であるが, 逆に η を固定したとき上述のようにある $a\in K$ について $H_K(\eta)=a\eta$ かつ半空間 $x\eta\leq a\eta$ は K を含み, 従って $\widehat{K}$ を含む. 故に $x\in\widehat{K}$ に対しても $x\eta\leq a\eta$ となり, 従って $H_{\widehat{K}}(\eta)\leq H_K(\eta)$. d) 凸集合 $\widehat{K}$ とその外の点 a は超平面により分離できる. 即ち, η, c を適当にとれば $a\eta+c>0$, かつ $x\in\widehat{K}$ に対して $x\eta+c<0$ となる. 故に $a\eta>-c\geq H_K(\eta)$. 逆の主張は自明. e) は各函数の定義

式を書いて見れば自明. f) 上限の性質より $H_{K+L}(\eta)\leq H_K(\eta)+H_L(\eta)$ は明らかだが，逆に与えられた η に対し右辺の各項の上限を達成する点を $a\in K$, $b\in L$ とすれば $a+b\in K+L$ だから $(a+b)\eta=H_{K+L}(\eta)$ でなければならない. g) も定義より明らか. h) $K\times L=K\times\{0\}+\{0\}\times L$ であり，前項と同じ理由で $H_{K\times\{0\}}(\xi,\eta)=H_K(\xi)$ 等が成り立つから，この等式は f) の特別の場合となる.

問 8.4.1 積分が収束することは明らか. $F_\sigma(z)$ が緩増加となることは，積分を $|\mathrm{Re}\,z-w|\leq\frac{1}{2}|w|$ なる部分と $|\mathrm{Re}\,z-w|\geq\frac{1}{2}|w|$ なる部分に分けてみるとわかる. 前者は，$|w|\leq 2|\mathrm{Re}\,z|$ という有界領域に含まれ，その上の積分は $f(w)$ の緩増加性により $\forall\varepsilon>0$ に対して $C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}\cdot|z|^n$ で評価される. 後者においては $-\mathrm{Re}\,(z-w)^2\leq-\frac{1}{8}|w|^2-\frac{1}{10}|\mathrm{Re}\,z|^2+|\mathrm{Im}\,z|^2$ が成り立つので対応する積分は $\mathrm{Re}\,z$ につき急減少となる. (w の虚部の寄与は本質的ではないので実数として扱った.) $\{F_\sigma(z)\}$ がもとと同じ Fourier 超函数 $f(x)$ を定めることは，例えば定理 8.4.1 の証明と同様 Fourier 変換を計算してみればよい.

問 8.4.2 Fourier 変換と公式 (8.4.4) を用いて確かめよ.

問 8.4.3 同上. ただし公式 (8.4.4) に相当することを準備しなければならない. 或は $F_\sigma(x+iy)$ が $y\in\Gamma_\sigma$ を 0 に近づけるとき $L_1(\boldsymbol{R}^n)$ において収束しその和が $f(x)$ を与えることを用い，補題 8.4.7 をこれに合わせて拡張してもよい.

問 8.4.4 補題 8.4.7 とその後の注意により

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha x}Y(x))=\int_{\boldsymbol{R}}e^{-ix\xi-\alpha x}Y(x)dx=\int_0^\infty e^{-ix\xi-\alpha x}dx=\frac{1}{i\xi+\alpha}$$

と通常の意味で計算できる. 結果は $\mathcal{O}(\boldsymbol{D}+i\{|\eta|<\alpha\})$ の元であるから，定理 8.2.6 によりもとの函数が超函数としても指数減少なことがわかる.

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha x}Y(x)*e^{-\beta x}Y(x))=\frac{1}{i\xi+\alpha}\cdot\frac{1}{i\xi+\beta}=\frac{1}{\beta-\alpha}\left\{\frac{1}{i\xi+\alpha}-\frac{1}{i\xi+\beta}\right\}\qquad(\alpha\neq\beta)$$

$$=-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{i\xi+\alpha}\qquad(\alpha=\beta)$$

であるからそれぞれ $e^{-\alpha x}Y(x)*e^{-\beta x}Y(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha x}Y(x)-e^{-\beta x}Y(x))$ $(\alpha\neq\beta)$，又は $xe^{-\alpha x}Y(x)$ $(\alpha=\beta)$ となる. (この計算は Fourier 変換と同様，通常の意味のものと一致することが理論的にも確かめられる.) 最後に $e^{-\alpha x}Y(x)$ の定義函数であるが，まず標準定義函数は

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{R}}\frac{e^{-\alpha w}Y(w)}{z-w}dw=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha w}}{z-w}dw$$

これは実軸に沿って指数減少はしない. 指数減少する定義函数は，この被積分函数に $e^{-(z-w)^2}$ を乗ずるか，または $\frac{1}{i\xi+\alpha}$ の逆 Fourier 変換を指数減少因子を用いて計算す

れば得られる．（なお，$-\dfrac{e^{-\alpha z}}{2\pi i}\log(-z)$ という定義函数は $z\to-\infty$ で緩増加になっていないので，大域的な定義函数としては使えない．これについては次節の局所性の項を参照せよ．）

問 8.4.5 a) $(x+i0)^\lambda=x^m(x+i0)^{\lambda-m}$ なので，λ が十分小さいときに計算しておいてそれを微分すればよい．（正則パラメータを含む Fourier 超函数の理論を用意しておけば解析接続でも求まる．）遠方での積分が絶対収束すれば積分 $\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(x+i0)^\lambda e^{-ix\xi}dx$ が通常の函数として ξ の各点毎に値を計算できる．$\xi>0$ とすれば，$x\xi$ を新しい変数にとることにより

$$\hat{f}(\xi)=\xi^{-\lambda-1}\int_{-\infty}^{\infty}(x+i0)^\lambda e^{-ix}dx=\xi^{-\lambda-1}\int_0^\infty e^{-y}y_+{}^\lambda(e^{(3\pi/2)i\lambda}-e^{-(\pi/2)i\lambda})idy$$
$$=-2e^{(\pi/2)i\lambda}\sin\pi\lambda\Gamma(\lambda+1)\xi^{-\lambda-1}=2\pi e^{(\pi/2)i\lambda}\xi^{-\lambda-1}/\Gamma(-\lambda)$$

を得る．ここで係数の計算には負の虚軸への積分路変更と第 1 章問 1.6.2 とを用いた．同様に $\xi<0$ のときは正の虚軸への積分路変更を用いて $\hat{f}(\xi)=0$ を得る．微分については第 1 章問 1.1.3 の結果を参照すれば，結局答 $2\pi e^{(\pi/2)i\lambda}\xi_+{}^{-\lambda-1}/\Gamma(-\lambda)$ を得る．（ただし $\lambda=m\in\boldsymbol{Z}_+\cup\{0\}$ のときは $2\pi i^m\delta^{(m)}(x)$.）また $(-\xi)_+=\xi_-$ に注意すれば，

$$\mathscr{F}((x-i0)^\lambda)(\xi)=\mathscr{F}(\overline{(x+i0)^\lambda})(\xi)=\overline{\mathscr{F}((x+i0)^\lambda)}(-\xi)=2\pi e^{-(\pi/2)i\lambda}\xi_-{}^{-\lambda-1}/\Gamma(-\lambda)$$

($\lambda=m\in\boldsymbol{Z}_+\cup\{0\}$ のときは $2\pi i^m\delta^{(m)}(x)$.) b) 上の結果を用いて $\mathscr{F}^{-1}$ を $\mathscr{F}$ に調節し直せば $\mathscr{F}(x_\pm{}^\lambda)=\mp ie^{\mp(\pi/2)i\lambda}\Gamma(\lambda+1)(\xi\mp i0)^{-\lambda-1}$．ただし，$\lambda=-m\in\boldsymbol{Z}_-$ の場合は上の計算結果に現われないので別にやらねばならない．$x_\pm{}^{-m}=\left[\mp\dfrac{(\pm z)^{-m}}{2\pi i}\log(\mp z)\right]$ を思い出し，ξ の正負に応じて上と同様の変数変換の後積分路を負または正の虚軸にもってゆけば，

$$\mathscr{F}(x_+{}^{-m})(\xi)=(i\xi)^{m-1}\int_0^\infty e^{-y}y_+{}^{-m}dy-\xi^{m-1}\log i(\xi-i0)\oint_{|z|=\varepsilon}\frac{z^{-m}}{2\pi i}e^{-iz}dz$$
$$=(i\xi)^{m-1}\times(\Gamma(\lambda)\text{ の }\lambda=-m+1\text{ における有限部分})$$
$$-\frac{(-i\xi)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\log(\xi-i0)+\frac{\pi}{2}i\right)$$

この定数は Γ 函数の函数等式より得られる帰納法で $\dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\Gamma'(1)$ と求まる．ちなみに $\Gamma'(1)=-\gamma$，γ は Euler 定数 $=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{k}-\log n\right\}$．また，$\mathscr{F}(x_-{}^{-m})(\xi)=\mathscr{F}((-x)_+{}^{-m})(\xi)=\mathscr{F}(x_+{}^{-m})(-\xi)$ だから上の結果で $\xi\mapsto-\xi$ とすればよい．c) $|x|^\lambda=x_+{}^\lambda+x_-{}^\lambda$ であったから b) の結果を加えればよい．特に $\lambda=2m\geq0$ なら $2\pi(-1)^m\delta^{(2m)}(\xi)$ に，また $\lambda=2m+1>0$ なら $2(-1)^{m+1}(2m+1)!\ \mathrm{f.p.}\dfrac{1}{\xi^{2m+2}}$ となる．d) $\mathrm{f.p.}\dfrac{1}{x^m}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(x+i0)^m}+\dfrac{1}{(x-i0)^m}\right\}$ を用いて a) より $\dfrac{(-i)^m\pi}{(m-1)!}(\xi_+{}^{m-1}+(-1)^m\xi_-{}^{m-1})$．$m$ が偶数のときこれは，$\dfrac{(-1)^{m/2}\pi}{(m-1)!}|\xi|^{m-1}$ となり c) の対応する結果と整合する．e) b), d) より $\mathscr{F}^{-1}(\log(\xi-i0))=$

$-x_+{}^{-1}+\left(\Gamma'(1)-\frac{\pi}{2}i\right)\delta(x)=-\frac{1}{2}\left(|x|^{-1}-\mathrm{f.\,p.}\frac{1}{x}\right)+\left(\Gamma'(1)-\frac{\pi}{2}i\right)\delta(x)$. これと $\log|x|=\log(x-i0)+\pi i Y(-x)$ とを用いて $\mathscr{F}(\log|x|)=-\pi|\xi|^{-1}+\pi\ \mathrm{f.\,p.}\frac{1}{\xi}-\frac{\pi}{\xi+i0}+(2\pi\Gamma'(1)-\pi^2 i)\delta(x)=-\pi|\xi|^{-1}+2\pi\Gamma'(1)\delta(x)$. なお計算法については問 8.5.5 及び問 8.6.4 も参照.

問 8.4.6 $f(x)=(f(x)/J(x))\cdot J(x)$ が古典的な意味でも Fourier 超函数の意味でも成り立つことから明らか.

問 8.5.1 $G(\zeta)\in\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{D}^n-i\Gamma)$ で $\forall\varepsilon>0, \forall R>0, \forall\triangle\Subset\Gamma$ に対し $\boldsymbol{R}^n-i\triangle\cap\{|\eta|\geq\varepsilon\}$ の上で一様に $G(\zeta)=O(e^{\varepsilon|\zeta|-R|\mathrm{Im}\,\zeta|})$ を満たすものが存在して $\hat{f}(\xi)=G(\xi-i\Gamma 0)$ と書けること. 証明は $\mathrm{supp}\,f\subset\overline{\Gamma}\setminus\Gamma\Leftrightarrow\forall a\in\Gamma$ について $\mathrm{supp}\,f\subset\overline{\overline{a+\Gamma}}$ に注意して系 8.5.8 を適用すればよい.

問 8.5.2 $\mathrm{supp}\,(d/dx-1)f(x)\subset\{+\infty\}$ は明らか. もしもこれが ϕ なら, Fourier 変換して $(i\xi-1)\hat{f}(\xi)=0$. ところで $\dfrac{1}{i\zeta-1}$ は実軸の管状近傍 $|\mathrm{Im}\,\zeta|<1$ で緩増加正則なので, これを掛けることにより $\hat{f}(\xi)=0$, 故に $f(x)=0$ となるがこれは $f(x)|_{\boldsymbol{R}}=e^x\neq 0$ に矛盾する.

問 8.5.3 $\triangle$ は層準同型なので $u=\tilde{f}(x)*(-1/4\pi|x|)$ が $\mathcal{Q}^{-\delta}(\boldsymbol{D}^3)$ において $\triangle u=\tilde{f}$ を満たすことから $\triangle(u|_{\boldsymbol{R}^3})=\tilde{f}|_{\boldsymbol{R}^3}=f$. ここで f が実解析的(又は C^∞ 級)ならば $u|_{\boldsymbol{R}^3}$ もそうであることに注意すれば $\mathcal{A}(\boldsymbol{R}^3), C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ に対する全射性も出る. この u の滑らかさについては通常のたたみ込みの場合の公式(3.4.32)をこの場合に拡張すれば得られる. ($\tilde{f}$ の台を $\boldsymbol{D}^3=\bigcup_\sigma\Gamma_\sigma\cap\{|x|\geq R\}\cup\{|x|\leq R\}$ くらいに分けておいて定義函数で直接各積分の正則性を検討してもよい. C^∞ 性を調べるときは $|x|\leq R$ への切り落としには $C_0{}^\infty$ 級函数を使う.)

問 8.5.4 Fourier 変換により多項式 $\xi^2=\xi_1{}^2+\cdots+\xi_n{}^2$ に関する割り算に帰着させる. $\hat{f}(\xi)$ の台を $|\xi|\geq 1$ と $|\xi|\leq 1$ に分ければ, 前者は直接割り算ができる. 後者は通常の(コンパクト台を持つ)超函数の割り算の問題になる. 原点以外での割り算の結果を $\mathcal{B}$ の脆弱性を用いて原点まで延長したものを差引けば, 結局 $\xi^2:\mathcal{B}[\{0\}]\to\mathcal{B}[\{0\}]$ の全射性を示せばよい. また後半の問題もこの写像の核を調べることに帰着する. 見易くするため ξ を x に変えよう. 証明を短くするため双対性を用いる. $\mathcal{B}[\{0\}]$ の双対空間 $\mathcal{A}(\{0\})$ は原点における正則函数芽(即ち収束冪級数)の全体である. 与えられた $u\in\mathcal{B}[\{0\}]$ に対し $v\in\mathcal{B}[\{0\}]$ で $\forall\varphi\in\mathcal{A}(\{0\})$ について $\langle u,\varphi\rangle=\langle x^2 v,\varphi\rangle$ を満たすようなものを構成すればよい. Späth の割り算定理により $\forall\varphi\in\mathcal{A}(\{0\})$ は

$$\varphi(x)=x^2\varphi_2(x)+x_1\varphi_1(x')+\varphi_0(x')$$

と一意に書け, 対応 $\varphi\mapsto\varphi_2$ は連続である. (この場合は直接代入で初等的にも示せる.) 故に $\langle v,\varphi\rangle=\langle u,\varphi_2\rangle$ とおけば $v\in\mathcal{A}(\{0\})'=\mathcal{B}[\{0\}]$ であり, 定義により $\langle x^2 v,\varphi\rangle=\langle v,x^2\varphi\rangle=\langle u,\varphi\rangle$ となって, v は求める答である. 核の方は x^2 の同次性により $x^2u=0$ なら u の

各同次部分も同じ方程式を満たす．故に一般解は同次解を収束するように加えたものである．逆 Fourier 変換すれば，調和多項式を劣指数型整函数に対応する評価を満たす係数で足し合わせたものが得られる．

問 8.5.5 定義は通常の超函数の場合（第1章定義 1.6.11，第3章問題 5）と同様である．Fourier 変換との関係は簡単のため一変数の場合に述べると，

f が実数値 $\Rightarrow \overline{(\mathcal{F}f)(\xi)}=(\mathcal{F}f)(-\xi)$

f が偶（または奇）$\Rightarrow \mathcal{F}f$ も偶（または奇）

f が実数値かつ偶（実数値かつ奇）$\Rightarrow \mathcal{F}f$ は実数値かつ偶（純虚数値かつ奇）

f が（正）λ 次同次 $\Rightarrow \mathcal{F}f$ は（正）$-\lambda-1$ 次同次（n 変数のときは（正）$-\lambda-n$ 次同次）

となる．いずれも Fourier 積分の座標変換で容易に確かめることができる．

問 8.6.1 $\forall\delta>0$ に対し $\sup|e^{\delta|x|}f(x)|=+\infty$ と仮定すると矛盾が出ることを示す．今，単調増加列 $\{c_k\}$ を

$$\sup_{c_{k-1}\leq|x|\leq c_k}|e^{1/k|x|}f(x)|\geq k$$

となるように帰納的に選ぶ．（ただし $c_0=0$ とする．） 緩増加な L_∞ 級函数 $g(x)$ を

$$g(x)=e^{1/k|x|},\quad c_{k-1}\leq|x|\leq c_k \text{ において，}$$

で定義すると $|g(x)f(x)|$ は有界でなくなるが，命題 8.1.6-補題 8.1.7 により $|g(x)|\leq J(x)$ なる J が存在するのでこれは仮定に反する．なお $g(x)$ は列 $\{c_k\}$ のみで決まるので単独の函数 $f(x)$ ではなく収束列のようなものに対しても同様の議論が適用できることに注意．

問 8.6.2 有限和の段階では δ 函数の正（-1）次同次性により成立する．それを極限に持ってゆけばよい．

問 8.6.3 指数減少超函数 $f(x)$ に対し $\int_{R^n}D_jf(x)dx=0$ を確かめておけば極限論法で証明できる．この式は定義函数を用いて積分を通常の積分に書き直したあと x_j 変数について最初に積分すれば得られる．

問 8.6.4 $\varphi(x)\in\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D})$ に対し $\langle|x|^\lambda,\varphi(x)\rangle$ の微分可能性を考えるのが最も手取り早い．（弱収束⇒通常の収束を使う．）Fourier 変換は連続だから，この極限操作と可換になり $\mathcal{F}(\log|x|)=\mathcal{F}\left(\frac{d}{d\lambda}|x|^\lambda\Big|_{\lambda=0}\right)=\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}(|x|^\lambda)\Big|_{\lambda=0}$ で問 8.4.5 c) からも e) が出せる．なお λ は正則パラメータなので Taylor 展開を使えば更にいろいろのものが計算できる．

問 8.6.5 γ を正の向きに一回取り囲む積分路 γ' をとれば $\varphi\in\mathcal{P}_*(\boldsymbol{D})$ に対し $\langle[F],\varphi\rangle=-\int_{\gamma'}F(z)\varphi(z)dz=-\int_{\gamma'}\int_\gamma\frac{\exp e^{\zeta^2}}{\zeta-z}d\zeta\cdot\varphi(z)dz$．ここで積分順序変更と Cauchy の積分公式を用いれば $=2\pi i\int_\gamma\exp e^{\zeta^2}\varphi(\zeta)d\zeta$ が得られる．γ はいくらでも $+\infty$ へ縮退させてゆけるが，これはこの汎函数の台が $\{+\infty\}$ 一点のみであることに対応している．

あとがき

本書の後さらに進んで佐藤超函数を勉強される方々のために文献を少し紹介しておく．

まず，理論的に勉強を続けられる方々に対する案内であるが，現行の研究論文を読むにはとりあえず導来圏の記号を習得する必要がある．一言で云えば，これは複体のカテゴリーにおいてコホモロジーの同型を導くような射 $h: K^{\cdot}\to L^{\cdot}$ (quasi-isomorphism) が存在するような対象を同一視することにより得られるカテゴリーである．層の複体 $\mathscr{F}^{\cdot}$ については脆弱層 $\mathscr{L}^{\cdot}$ を項にもつ quasi-isomorphism $h:\mathscr{F}^{\cdot}\to\mathscr{L}^{\cdot}$ が単独の層 $\mathscr{F}$ に対する脆弱分解の概念を一般化したものとなる（理論を本格的に展開するには，本書で解説を省略した単射分解という，より高度な分解が必要となる）．すると，例えばこのカテゴリーでの導来函手 $\boldsymbol{R}\Gamma_S(\mathscr{F}^{\cdot})$ や $\boldsymbol{R}f_*(\mathscr{F}^{\cdot})$ はこのような分解を用いて $\Gamma_S\mathscr{L}^{\cdot}$ や $f_*\mathscr{L}^{\cdot}$ で定義される．$\mathscr{F}^{\cdot}$ が単項の複体 $0\to\mathscr{F}\to 0\to\cdots$ に帰すると $H^n(\boldsymbol{R}\Gamma_S(\mathscr{F}^{\cdot}))=R^n\Gamma_S\mathscr{F}$ あるいは $H^n(\boldsymbol{R}f_*(\mathscr{F}^{\cdot}))=R^nf_*\mathscr{F}$ となる．すなわち，$\boldsymbol{R}$ は全ての次数の導来函手を合わせて考えたような概念である．定理 5.4.4 あるいは定理 5.6.4 はそれぞれ $\boldsymbol{R}\Gamma_F(X,\mathscr{F}^{\cdot})=\boldsymbol{R}\Gamma_F\boldsymbol{R}\mathscr{T}_S(\mathscr{F}^{\cdot})$ あるいは $\boldsymbol{R}\Gamma_{f^{-1}(S)}(X,\mathscr{F}^{\cdot})=\boldsymbol{R}\Gamma_S(Y,\boldsymbol{R}f_*(\mathscr{F}^{\cdot}))$ と，因子の純次元性の仮定無しで成立する主張に拡張される．これらの公式はまた古典的なコホモロジー理論における，所謂スペクトル系列の理論の諸公式にも対応している．導来圏の理論の標準的な文献は Hartshorne[1] であるが，なかなか通読は大変である．この内容を手短に要約したものが柏原[3] あるいは柏原[5] の付録にあり，これらの簡明な解説は読者の役に立つであろう．なお，導来圏の概念は佐藤が $\mathscr{D}ist$ の一般化（定義 5.3.4 を見よ）という形で独立に得ており，未刊の "Theory of hyperfunctions III" にそれが書かれるはずであった．柏原–河合–木村[1] はその流儀で書かれている．

偏微分方程式論への応用については S–K–K[1]，或はそれを易しくした柏原–河合–木村[1] から勉強を始められると良いであろう．S–K–K[1] の最初の数十ページには本書で詳述した超函数論の基礎が上述の導来圏の記号を使って簡潔に論じられており，最初にこれを見ると何のことか全くわからないであろ

うが，既に本書を読まれた方は上に要約した程度のことを知っておくだけでもそこに書かれたことが想像できるようになるであろう．このほか Bony [1], Schapira[1]，[2] もそれぞれの観点からの興味深い入門書である．

S–K–K 後の発展として重要なものに，ミクロ局所微積分法と呼ばれる，多項式冪の Fourier 変換計算のミクロ局所化理論（佐藤–柏原[1]），その一部としての b–函数の理論（矢野[1]，Björk[1]），層 $\mathscr{C}_{N|X}, \mathscr{C}_{M+|X}$ の理論とその境界値問題への応用（柏原–河合[2]，片岡[1]–[3]，大阿久[1]–[2]），第二ミクロ局所化理論とその偏微分方程式論への応用（柏原–河合[2]，Laurent[1], Lebeau[1]，野呂–戸瀬[1]，片岡–戸瀬[1]，岡田–戸瀬[1]），境界特異スペクトルの理論（Lieutenant[1]，Schapira[3]），Fourier 超函数の特異スペクトル理論（金子[5]; この文献は片岡のアイデアによる層 $\mathscr{C}$ の脆弱性の解析的証明を含んでいる)，一般的な層のミクロ局所理論（柏原–Schapira[1]）などがある．特に，最後に挙げた柏原–Schapira[1] は最近の文献として導来圏の理論と偏微分方程式論の最近の発展を合わせて学習するには便利であろう．これもいきなり読むと抽象的に過ぎて何をやっているかわからないかもしれないが，本書の後に続いて読めば書いてあることの意味が理解しやすいであろう．ミクロ局所作用素や無限階の微分作用素については更に片岡[1]，青木[1]–[2]，石村[1]，打越[1] 等を見られたい．$\mathscr{D}$–加群の一般論は連立偏微分方程式の理論を代数解析的に現代化したものであり，解析のみならず幾何学への応用上も重要であるが，これについては最近日本語で手頃な教科書が出た（堀田[1]）．

また Sjöstrand [1] は Bros-Iagolnitzer の非線型 Fourier 変換（現在では FBI 変換と呼ばれる）の流れを汲む解析的波面集合の取扱いにおいて大変便利な 1 の分解法を開発し，それを偏微分方程式に応用して目覚ましい成果を挙げた．彼の方法は基本的に佐藤超函数にも通用する（Sjöstrand[2] も見よ)．これに関連して Laubin と de Roever は独立に Sjöstrand の公式の次のような興味深い変種を与えた：

$$\delta(x-w) = \frac{2^n\Gamma(3n/2)}{(-2\pi i)^{3n/2}}\int_{R^n\times S^{n-1}} \frac{(1+(i/2)(x-w)\omega)dzd\omega}{((x-w)\omega+i((x-z)^2+(w-z)^2+i0)^{3n/2}}.$$

この公式は形式的には単に積分

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\iint_{\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n} e^{ix\xi-iw\xi-|\xi|\{(x-z)^2+(w-z)^2\}}(2|\xi|)^{n/2}(1+(i\xi/2|\xi|)(x-w))dzd\xi$$

を二通りの方法で計算すれば得られる：まず，z について先に積分し Bony の公式（4.2.10）を用いると $(2\pi)^{n/2}\delta(x-w)$ が得られる．次に，$\xi=\rho\omega$ とおき，ρ について先に積分すれば上の式の右辺の $(2\pi)^{n/2}$ 倍が得られる．以上の計算の正当化は柏原の公式（補題 4.6.8）を証明したときと同様にやればできる．この公式を用いると，積分領域 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{S}^{n-1}$ を可測集合で分割することにより超函数の特異スペクトルを標準的な仕方で分解することができる．（特に，層 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ や $\mathscr{C}$ が細層であること，すなわち 1 の分解を持つことがわかる．）これについては de Roever[1] を見られたい．

佐藤超函数論の一般化の試みもいろいろある．Bengel[1] の解析 P-汎函数，Silva-荷見-森本の (Fourier) ウルトラ超函数など (更に詳しい文献は Sargos-森本[1] を見よ) や，ベクトル値（即ち Banach 空間や Fréchet 空間等の位相線型空間に値をとる）(Fourier) 超函数（大内[1]，Ion-河合[1]，伊東[1] など)，Clifford 代数値の超函数（Sommen[1]）など．また，佐藤超函数とその部分族である種々の超函数の関係についても多くの研究がある（小松[6]-[7]，Petzsche[1]，Hörmander[4]，de Roever[1]，松澤[1] 及び，これらに引用されている文献を見よ)．Hörmander[5] は，試験函数の空間が準解析的函数よりなれば，その双対として得られる超函数の空間は常に脆弱性を持つことを示した．これは一見，佐藤超函数よりも狭いところでもすべてがうまく行くように思わせて面白いが，偏微分方程式の境界値問題のようなものを考えると必然的に佐藤超函数がすべて出現してしまうので，応用上はそれほどの意味は無い．Aronszajn は熱方程式の解の時刻 $t\to+0$ での形式的な極限をとると，佐藤超函数よりももっと広い超函数の空間が得られることを示し，Baouendi はその中では Lewy-溝畑作用素のようなものまで解けてしまうことを示したが，この空間は局所化不能で，応用上はそれほどありがたいものではない．松澤[1] はその中である種の増大度条件が局所化可能性を意味し，そのとき極限として佐藤超函数が得られることを示したもので，きわめて興味深い．

佐藤超函数論の応用については更に目覚ましい文献が数多く存在する．これについては文献の冒頭に掲げた関連シンポジウムの記録等を見られたい．

次に応用方面の読者のために，日本語で読めるSchwartzの超函数（分布）理論の基本的文献としてSchwartz[1]，Gelfand-Shilov[1]，山中[1] を挙げておく．もちろん易しい入門書はこの他にも沢山あろう．本書では佐藤超函数とSchwartz超函数とを合わせて解説することはしなかったが，後者は前者の中で特異性がややおとなしい（局所有限階の，即ち局所的に連続函数の有限階の導函数として表されるような）部分集合をなしており，これらを計算手段として応用する読者はいずれかの流儀に組するということでは無く両者の考え方を臨機に採用すべきことは云うまでも無い．Gelfand-Shilov[1] の計算例はその意味でSchwartz理論の枠組にとらわれぬ自由さを持っており大変啓発的である．超函数というものを本書で初めて学ばれた読者も，応用に際してはまた実解析函数の枠にとらわれず自由にやってもらいたい．例えば，公式 $\int \varphi(x)\delta(x)dx=\varphi(0)$ は本書においては実解析函数 $\varphi(x)$ に対してしか定義されていないが，極限操作によって連続函数 $\varphi(x)$ まで拡張できる等々である．金子[1] はSchwartzの超函数の解説を佐藤超函数論の議論運びを大幅に取り入れた形で展開しているので，そのような行き方の参考にして欲しい．

最後に私事に渡って恐縮であるが，まえがきにも述べたように，著者が佐藤超函数論の全体を初めて体系的に把握するきっかけとなったのは，フランスのGrenoble大学に留学中，大学院生（DEA）向けの超函数の講義をさせて頂くことになったときである．初めての本格的な講義をフランス語でやったものだから汗顔の至りであった．金子[4] はそのときの記録である．これは日本語文献の紹介をも意図していたため一部において本書よりは柏原[1]，[4]，森本[1] により近い形をとっていた．が，一年間の講義ですべてを自足的にやる必要から論理の運びにいろいろと工夫をし，また，“佐藤の積分論は代数的と云いながらPoincaré双対という非常に位相的なものに依拠しているのではないか”というMalgrange先生の異議に答えるため，コホモロジー的積分論を柱状領域に対するCauchyの積分定理のみに依拠して構成してみる等の試みもした．本書では，応用上の自然さをも考慮して新たにRadon分解を理論の基礎に用い，積分論もその上に展開し直してみたのである．興味のある方は両者を読み比べてみられると良いであろう．（ただし［4］のフランス語は，Iの方については当時学生として聴講してくれたL. Guillopé博士に添削してもらっ

たので何とか様になっているものの，IIの方は相当ひどいことをご承知おき願いたい.）金子[5]-[7] には著者がその後佐藤の超函数に関して得た新たな知見が書かれている．佐藤超函数自身はもはや研究の対象という段階では無かろうが，それでもいくつかの興味深い問題が未解決のまま残されている．例えば，台が固有閉凸錐に含まれる超函数の全体が畳み込みに関して作る可換代数に零因子が存在するかどうかの問題など．これについては，Schwartz分布のときに零因子の非存在証明の基礎となった，コンパクト台の超函数の畳み込みの台の凸包に関するTitchmarsh-Lionsの定理

$$(\mathrm{supp}\, f * g)^{\frown} = (\mathrm{supp}\, f)^{\frown} + (\mathrm{supp}\, g)^{\frown}$$

が佐藤超函数では成立しないことが昔から知られている（第8章の問題1参照)．ここに $^{\frown}$ は本書では凸包を表すのであった．佐藤超函数に対するFourier変換以外の各種積分変換の作用についても，Schwartzの超函数ほどには調べ尽くされていない．Laplace変換については小松[8]，Mellin変換についてはZiemian[1]，Radon変換については滝口-金子[1] がある．

文　献

I.　論文集・雑誌特集号

a)　超函数論特集，数学 **25** 巻 3 号，岩波書店，1973.

b)　Hyperfunctions and Pseudo-differential Epuations, Lecture Notes in Math. No. **287**, Springer, 1973(1971 年 10 月堅田シンポジウム報告集).

c)　Proceedings of Oji Seminar on Algebraic Analysis 1976, Publ. RIMS Kyoto Univ. Vol. **12**, Supplement, 1977.

d)　数理解析研究所講究録　No. **108**, **114**, **145**, **162**, **168**, **192**, **201**, **209**, **225**, **226**, **227**, **238**, **248**, **266**, **281**, **287**, **295**, **324**, **341**, **355**, **361**, **410**, **416**, **431**, **459**, **468**, **497**, **508**, **533**, **555**, **558**, **573**, **578**, **592**, **594**, **629**, **638**, **660**, **667**, **668**, **675**, **694**, **718**, **750**, **810**, **845**, **854**, **894**, **935**, **937**. (超函数関係のシンポジウムの報告集)

e)　Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lecture Notes in Physics, No. **126**, Springer, 1980.

f)　Group Representations and Systems of Differential Equations (Proceedings of Symposium, 1982), Ed. K. Okamoto, Advanced Studies in Pure Math. **4**, 1984.

g)　Algebraic Analysis I, II, 佐藤幹夫教授還暦記念論文集，Academic Press, 1988.

h)　*D*-Modules and Microlocal Geometry (Proceedings of Symposium at Lisbon, 1990), Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

II.　引用文献

青木貴史 [1]: Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators, Advanced Studies in Pure Math. **4** (1948), 181–208.

[2]: Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini I, Ann. Inst. Fourier **33** (1983); II, *ibid.* **36** (1986), 143–165.

Bengel G. [1]: Sur une extension de la théorie des hyperfonctions, C. R. Acad. Sci. Paris **262** (1966), 499–501.

Björk, J. E. [1]: Rings of Differential Operators, North-Holland, 1979.

Bony J.-M. [1]: Hyperfonctions et Equations aux Dérivées Partielles, Cours de 3e cycle, 1974–75, Univ. Paris XI, Orsay.

Bredon G. E. [1]: Sheaf Theory, McGraw-Hill, New York, 1967.

Bros J. & Iagolnitzer D. [1]: Causality and local analyticity : mathematical study, Ann. Inst. Henri Poincaré **18** (1973), 147–184.

[2]: Tuboïdes et structure analytique des distributions I, II, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz, 1974–5, n° 16, 18.

Carleman T. [1]: L'Intégrale de Fourier et Questions qui s'y Rattachent, Institut Mittag-Leffler, Uppsala, 1944.

Cerezo A., Piriou A. & Chazarain J. [1]: Introduction aux hyperfonctions, Colloques hyperfonctions et physique théorique, Lecture Notes in Math. No. **449**, Springer, 1975, pp. 1–53.

de Roever J. W. [1]: Hyperfunctional singular support of ultradistributions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **31** (1985), 585–631.

Gelfand I. M. & Shilov G. E. [1]: 超函数入門 I, II (功力・井関・麦林訳), 共立全書, 1963–64 (露語原書 1958).

Godement R. [1]: Topologie Algebrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

Grothendieck A. [1]: Local Cohomology, Harvard Univ., 1961 (=Lecture Notes in Math. No. **41**, Springer, Berlin, 1967).

[2]: Eléments de Géométrie Algébrique (=EGA) III, IHES, 1961.

Gunning R. C. & Rossi H. [1]: Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice Hall, 1965.

Hartshorne R. [1]: Residues and Duality, Lecture Notes in Math. No. **20**, Springer, 1966.

Harvey R. [1]: Hyperfunctions and Linear Partial Differential Equations, Thesis, Stanford Univ., 1966. (要約 : Proc. Nat. Acad. Sci. USA **55** (1966), 1042–1046.)

一松信 [1]: 多変数解析函数論, 培風館, 1960.

Hörmander L. [1]: 多変数複素解析学入門 (笠原乾吉訳), 東京図書, 1973 (英語原書, 1966).

[2]: Fourier Integral Operators I, Acta Math, **127** (1971), 79–183.

[3]: L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math. **113** (1965), 89–152.

[4]: The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Grundlehren der math. Wiss. No. **256**, Springer, 1983.

[5]: Between distributions and hyperfunctions, Astérisque, Société Math. France **131**, 1985, pp. 89–106.

堀田良之 [1]: *D* 加群と代数群, シュプリンガー東京, 1995.

今井功 [1]: 応用超函数論 I, II, サイエンス社, 1981.

Ion P. D. F.- 河合隆裕 [1]: Theory of vector-valued hyperfunctions, Publ. RIMS Kyoto Univ. **11** (1975), 1–19.

石村隆一 [1]: Existence locale de solutions holomorphes pour les équations différentielles d'ordre infini, Ann. Inst. Fourier **35** (1985), 49–57.

伊東由文 [1]: Theory of (vector valued) Fourier hyperfunctions. Their realization as boundary values of (vector valued) slowly increasing holomorphic functions, J. Math. Tokushima Univ. **18** (1984), 57–101.

弥永昌吉-弥永健一[1]: 集合と位相 I, II, 岩波講座基礎数学, 1976–77.

John F. [1]: Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations, Interscience, New York, 1955.

梶原壌二[1]: 複素函数論, 数学ライブラリー 2, 森北出版, 1968.

金子晃[1]: 定数係数線型偏微分方程式, 岩波講座基礎数学, 1976.

[2]: On the structure of Fourier hyperfunctions, Proc. Japan Acad. **48** (1972), 651–653.

[3]: Remarks on hyperfunctions with analytic parameters, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **22** (1975), 371–407; II, *ibid.* **25** (1978), 67–73.

[4]: Introduction à la Théorie des Hyperfonctions I, II, Cours de DEA, Université de Grenoble, 1978.

[5]: On the flabbiness of the sheaf of Fourier microfunctions, Sci. Pap. College Gen. Educ. Univ. Tokyo **36** (1986), 1–14.

[6]: A topological characterization of hyperfunctions with real analytic parameters, Sci. Pap. College Gen. Educ. Univ. Tokyo **38** (1988), 1–6.

[7]: On hyperfunctions with analytic parameters, in Algebraic Analysis I, Academic Press, 1988, pp. 267–276.

笠原乾吉[1]: 複素解析, 実教出版, 1979.

柏原正樹[1]: 超函数の構造について, 数学の歩み **15** (1970), 9–72.

[2]: 超函数の代数的基礎付け, 数理解析研究所講究録 **108** (1971), 58–71.

[3]: Duality の一般論と Derived Category, Hyperfunction への応用をみこんだ代数幾何のシンポジウム, 1969, 数学振興会セミナー報告集, pp. 3.1–3.29.

[4]: 代数解析学の基礎, 名古屋大学講義(木村達雄記), 1975.

[5]: Systèmes d'Equations Micro-Différentielles, Cours à Univ. Paris-Nord (Notes de T. Monteiro-Fernandes.), 1977. 英訳 Birkhauser, Progress in Mathematics, **34**, 1983.

柏原正樹-河合隆裕[1]: 楕円型境界値問題の理論とその応用, 数理解析研究所講究録 **238**, pp. 1–59.

[2]: Second-microlocalization and asymptotic expansions, Proc. Les Houches Colloquium, Lecture Notes in Physics No. **126**, Springer, 1980. pp. 21–77.

柏原正樹-河合隆裕-木村達雄[1]: 代数解析学の基礎, 紀伊国屋書店, 1980.

柏原正樹-大島利雄[1]: Systems of differentical equations with regular singularities and their boundary value problems, Ann. of Math. **106** (1977), 145–200.

柏原正樹-Schapira P. [1]: Sheaves on Manifolds, Springer, Grundlehren der math. Wiss. No. **292**, 1990.

片岡清臣[1]: 起函数のラドン変換とその応用について, 東京大学修士論文, 1976.

[2]: On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, J. Fac. Sci.

Univ. Tokyo, Sec. IA **28** (1981), 331–413.

[3]: Micro-local theory of boundary value problems I, *ibid.* **27** (1980), 355–399; II, *ibid.* **28** (1981), 31–56.

[4]: Some properties of mild hyperfunctions and an application to propagation of micro-analyticity in boundary value problems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA **30** (1983), 279–297.

片岡清臣–戸瀬信之[1]: Vanishing theorems for the sheaf of microfunctions with holomorphic parameters–Flabbiness of the sheaf of 2-microfunctions–, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA **35** (1988), 313–320.

Kawai T. [1]: On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **17** (1970), 467–517. (cf. 超函数論における Fourier 変換の理論とその応用, 数理解析研究所講究録 **108** (1971), 84–288.)

河田敬義[1]: ホモロジー代数 I, II, 岩波講座基礎数学, 1976–77.

小出昭一郎[1]: 物理現象の Fourier 解析, UP 応用数学選書 4, 東京大学出版会, 1981.

小松彦三郎[1]: 佐藤超函数論, 数理解析研究所講究録 **188**.

[2]: 超函数論入門, 岩波講座基礎数学, 1978.

[3]: 佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方程式, 東大セミナリーノート **22**, 1968.

[4]: An introduction to the theory of hyperfunctions, Lecture Notes in Math. **287**, Springer, 1973, pp. 3–40.

[5]: Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 366–383.

[6]: Ultradistributions I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **20** (1973), 25–105; II, *ibid.* **24** (1977), 607–628; III, *ibid.* **29** (1982), 653–718;

[7]: Microlocal analysis in Gevrey classes and in complex domains, in Microlocal Analysis and Applications, Lecture Notes in Math. **1495**, Springer, 1991, pp. 161–236.

[8]: Laplace transforms of hyperfunctions–A new foundation of the Heaviside calculus–, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **34** (1987), 805–820.

熊之郷準[1]: 擬微分作用素, 岩波書店, 1974.

Laurent Y. [1]: Théorie de la Deuxième Microlocalisation dans le Domaine Complexe, Progress in Math. **53**, Birkhäuser, 1985.

Lebeau G. [1]: Deuxième microlocalization sur les sous-variétés isotropes, Ann. Inst. Fourier, **35** (1985), 145–216.

Lieutenant J.–L. [1]: Microlocalization at the boundary of a convex set, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **33** (1986), 83–130.

Lindelöf E. [1]: Sur les fonctions entières d'ordre entier, Ann. Sci. Ecole Norm.

Sup. (3) **22** (1905), 369–395.

Martineau A. [1]: Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki **13** (1960–61), n° 214.

[2]: Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes. Proc. Intern. Summer Course on the Theory of Distributions, Lisbon, 1964, pp. 195–326.

[3]: Le 'edge of the wedge theorem' en théorie des hyperfonctions de Sato, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, 1969, Univ. Tokyo Press. 1970, pp. 95–106.

松澤忠人[1]: A calculus approach to hyperfunctions I, Nagoya Math. J. **108** (1987), 5–66; II, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 619–654.

松島与三[1]: 多様体入門, 裳華房, 1965.

森本光生[1]: 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.

[2]: Edge of the wedge theorem and hyperfunction, Lecture Notes in Math. **287**, Springer, 1973, pp. 44–81.

[3]: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **17** (1970), 215–239.

Morimoto M. & Yoshino K. [1]: Some examples of analytic functionals with carrier at the infinity, Proc. Japan Acad. **56** (1980), 357–361.

Nagamachi S. & Mugibayashi N. [1]: Quantum field theory in terms of Fourier hyperfunctions, Publ. RIMS Kyoto Univ. **12** Suppl. (1977), 309–341.

野呂正行–戸瀬信之[1]: The theory of Radon transformations and 2-microlocalization (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **34** (1987), 309–349.

大阿久俊則[1]: F-mild hyperfunctions and Fuchsian partial differential equations, Advanced Studies in Pure Math. **4** (1984), 223–242.

[2]: Boundary value problems for systems of linear partial differential equations and propagation of micro-analyticity, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **33** (1986), 175–232.

岡田靖則–戸瀬信之[1]: Second microlocal singularities and boundary values of holomorphic functions, in Geometrical and Algebraical Aspects in Several Complex Variables (Proceedings of Symposium at Cetraro, 1989), EDITEL, 1991, pp. 251–263.

大内忠[1]: Hyperfunction solutions of the abstract Cauchy problem, Proc. Japan Acad. **47** (1971), 541–544.

Palamodov V. P. [1]: 定数係数線型微分作用素 上, 下 (森本・内山・金子訳), 吉岡書店, 1973 (露語原書 1967).

Park Y. S. & Morimoto M. [1]: Fourier ultra hyperfunctions in the Euclidean n-space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **20** (1973), 121–127.

Petzsche H. J. [1]: Generalized functions and the boundary values of holomorphic functions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **31** (1984), 391–431.

佐分利豊[1]: Fourier 超函数について，上智大学修士論文，1978.

[2]: Fundamental properties of modified Fourier hyperfunctions, Tokyo J. Math. **8** (1985), 231–273.

Sargos–森本光生[1]: Transformation des fonctionelles analytiques à porteurs non compacts, Tokyo J. Math **4** (1981), 457–492.

佐藤幹夫[1]: 超函数の理論，数学 **10** (1958), 1–27.

[2]: Theory of hyperfunctions I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I **8** (1959), 139–193.

[3]: Theory of hyperfunctions II, *ibid.* **8** (1960), 387–437.

[4]: 超函数と層 C をめぐって，数理解析研究所講究録 **126**, 1971.

佐藤幹夫–柏原正樹[1]: Micro-local calculus I, II, 数理解析研究所講究録 **226** (1975), pp. 114–214.

S–K–K (= Sato M., Kawai T. & Kashiwara M.) [1]: Hyperfunctions and Pseudo-differential Equations, Part II, Lecture Notes in Math. **287**, Springer, 1973, pp. 263–529.

Schapira P. [1]: Théorie des Hyperfonctions, Lecture Notes in Math. **126**, Springer, 1970.

[2]: Microdifferential Systems in the Complex Domain, Springer, Grundlehren der math. Wiss. **269**, 1985.

[3]: Front d'onde analytique au bord I, C. R. Acad. Sci. Paris **302** (1986), 383–386; II, Séminaire E. D. P. Ecole Polytech. 1985–86, Exposé No. 13.

Schwartz L. [1]: 超函数の理論，第 3 版(岩村・鈴木訳)，岩波書店，1971 (仏語原書初版 1950–51).

Sjöstrand J. [1]: Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems, Comm. PDE **5** (1980), 41–94; II, *ibid.*, 187–207.

[2]: Singularités Analytiques Microlocales, Astérisque Soc. Math. France **95**, 1982, pp. 1–166.

Sommen F. [1]: Microfunctions with values in a Clifford algebra I, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. II **3** (1984), 263–291; II, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo **36** (1986), 15–37.

Suzuki H. [1]: On the global existence of holomorphic solutions of the equation $\partial u/\partial x_1 = f$, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **11** (1972), 253–258.

滝口孝志–金子晃[1]: Radon transform of hyperfunctions and support theorem, Hokkaido Math. J. 24 (1995), 63–103.

打越敬祐[1]: Symbol theory of microlocal operators, Publ. RIMS Kyoto Univ. **24** (1988), 547–584.

Vladimirov V. S. [1]: Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables, MIT Press, 1966 (露語原書 1964).

山中健[1]: 線型位相空間と一般関数, 共立数学講座 16, 共立出版, 1966.

矢野環[1]: On the theory of *b*-functions, Publ. RIMS Kyoto Univ. **14** (1978), 111–202.

吉田耕作[1]: 演算子法——一つの超函数論, UP 応用数学選書 5, 東京大学出版会, 1982.

吉田洋一[1]: 函数論, 岩波全書, 第 2 版 1965.

Ziemian B. [1]: The Mellin transformation and multidimensional generalized Taylor expansions of singular functions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **36** (1989), 263–295.

索　引

た 行

な 行

は 行

ま　行

や　行

ら　行

特種記号

著者略歴

1945年　愛知県に生れる.
1968年　東京大学理学部数学科卒業.
現　在　東京大学大学院数理科学研究科教授，理学博士.

主要著書

『解析演習』(共著，1989年，東京大学出版会)
『教養の数学・計算機』(1991年，東京大学出版会)

新版 超函数入門

1996年11月20日　初　版

[検印廃止]

著　者　金子　晃（かねこ　あきら）

発行所　財団法人　東京大学出版会
代表者　西尾　勝
113 東京都文京区本郷 7-3-1 東大構内
電話 03-3811-8814・振替00160-6-59964

印刷所　株式会社理想社
製本所　誠製本株式会社

ISBN 4-13-061300-6　Printed in Japan